

# 応答曲線を用いた機械構造物の各次振動特性の分離法

## —第三報 掃引速度の影響—

### Separation of Vibration Modes of Machine Structure Using Response Curves Part 3

#### —Effects of Sweep Rate—

高橋 伸晃\*

Nobuaki TAKAHASHI

#### 1. はじめに

既報<sup>1),2)</sup>では機械構造物の各次数の共振点における振動特性を周波数応答曲線から抽出する方法について述べた。その際対象とした応答曲線は加振周波数が一定な定常加振で得られた曲線であった。ところで計測周波数を多点にすると測定時間が増加すること、減衰定数の小さい鋭い共振点では加振周波数のわずかな変動も応答の大きな変化を引起すこと、などのために定常加振の応答を測定することは容易ではない。加振試験を簡単に実施するため周波数をゆるやかに掃引し応答を調べることが一般に行なわれている実験手法であるが、測定値の取扱上は定常加振とみなしており、掃引速度と応答変位の間の関係については従来深く追求されていない。

本報では掃引速度を上げるにつれて共振ピークの高さ、位置、位相差などには定常加振の場合と比べ次第に大きなずれが生ずること、そのために真の値と異なる振動特性が得られることなどを調べた。また補正法を考察し、過渡応答曲線から掃引速度の測定値を使用して振動特性を得る手法についての提案を行なっている。

#### 2. 掃引速度の影響の実験的考察

従来から取扱っているばねで吊下げた溝型鋼材の加振実験を行なった。7通りの掃引速度に対する応答加速度および位相曲線の一部を図1に示す。掃引の方向は低周波数から高周波数に向いている。掃引速度が早まるにつれて共振点の応答加速度の最大値は低下しつつ高周波数域に移動し、加振力と応答加速度の間の位相差は減少している。この共振点は鋼材自体の最低次数の振動で、低周波数域には支持系の振動による共振点、高周波数域には鋼材の連続体としての振動による共振点がある。

#### 3. 一自由度系の応答曲線と掃引速度の関係

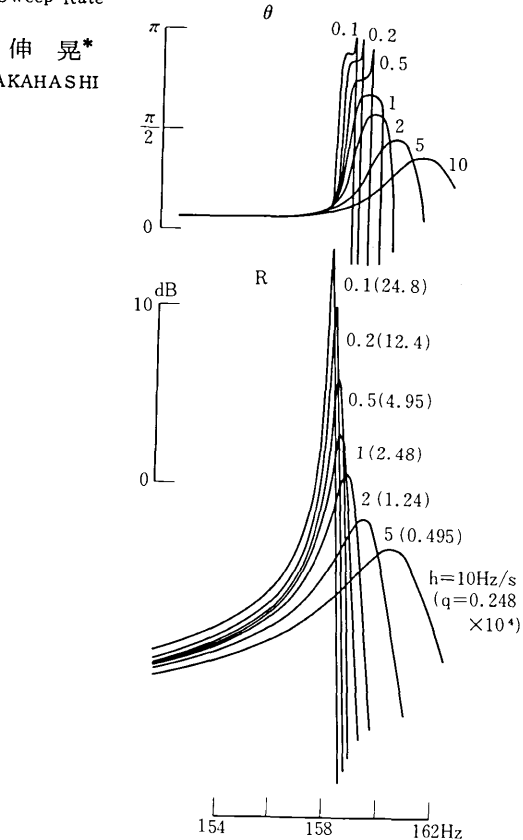


図1 応答加速度及び位相曲線(実験値)

回転軸が危険速度を通過する際の挙動を調べるために加振周波数が時間とともに変る一自由度系の応答に関するいくつかの研究<sup>3),4),5),6),7),8)</sup>が既になされている。いずれにしても過渡応答の厳密解を得るためには数値計算が少なからず必要となる。このうち3)は応答変位の倍率を解析の目的としているので、その手法を機械構造物の過渡応答の解析に適用できるよう発展させ掃引速度がゼロの場合との関係を含ませた。

加振力を $P(t)$ 、質量を $m$ 、変位を $x$ 、系の無減衰固有円振動数を $p$ 、粘性減衰係数を $\xi$ とすると一自由度系の運動方程式は次のようになる。

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = \frac{1}{m}P(t) \quad (1)$$

ただし $n = \xi p$

強制振動の変位 $x(t)$ はよく知られているように

\*東京大学生産技術研究所 第2部

$$x(t) = \frac{1}{m\alpha - \beta} \left\{ e^{\alpha t} \int_0^t P(\tau) e^{-\alpha \tau} d\tau - e^{\beta t} \int_0^t P(\tau) e^{-\beta \tau} d\tau \right\} \quad (2)$$

ここに  $p > n$  とし  $\alpha = -n + i\sqrt{p^2 - n^2}$   
 $\beta = -n - i\sqrt{p^2 - n^2}$

時間  $t = 0$  で加振円振動数を  $2\pi f_0$ , 円振動数の増加率を  $2\pi h$  ( $h$  を掃引速度と呼ぶことにする), 初期位相を  $\sigma$  とすると, 加振力  $P(t)$  は次のように書ける.

$$P(t) = P_0 \cos(\pi h t^2 + 2\pi f_0 t + \sigma) = P_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\pi h t^2 + 2\pi f_0 t + \sigma)} \right\} \quad (3)$$

時間の取り方を変更し  $r = (f - f_0)t$ , ただし  $p = 2\pi f$  とすると (3) は

$$P(r) = P_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{i\left(\pi \frac{r^2}{q} + 2\pi r \frac{f_0}{f - f_0} + \sigma\right)} \right\} \quad (4)$$

ただし  $q = (f - f_0)^2/h$

また無減衰固有振動数に対する加振周波数比  $1 + \eta$  は次のようになる.

$$1 + \eta = \left(1 - \frac{f_0}{f}\right) \frac{r}{q} + \frac{f_0}{f} \quad (5)$$

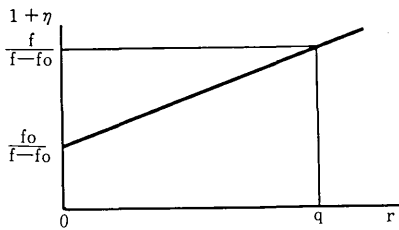


図2 加振周波数比の変化

加振周波数比の時間に対する変化の様子を図2に示す.

応答変位の静変位に対する倍率  $R$  は

$$R(r) = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{i\pi e^{i\sigma}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{f}{f - f_0} \left[ e^{i\pi \left(2 \frac{r}{f - f_0} u_1 r\right)} \times \int_0^r e^{i\pi \left(\frac{r^2}{q} + 2 \frac{f_0 - f u_1}{f - f_0} r\right)} dr - e^{i\pi \left(2 \frac{r}{f - f_0} u_2 r\right)} \int_0^\infty e^{i\pi \left(\frac{r^2}{q} + 2 \frac{f_0 - f u_2}{f - f_0} r\right)} dr \right] \right\} \quad (6)$$

ただし  $u_1 = \sqrt{1 - \zeta^2} + i\zeta$ ,  $u_2 = -\sqrt{1 - \zeta^2} + i\zeta$

$$z_1 = -i\pi q \left( \frac{r}{q} + \frac{f_0 - f u_1}{f - f_0} \right)^2, z_2 = -i\pi q \left( \frac{r}{q} + \frac{f_0 - f u_2}{f - f_0} \right)^2$$

といて変数を変換し,  $r \rightarrow \infty$  のとき  $e^{i\pi \left(2 \frac{r}{f - f_0} u_1 r\right)} \rightarrow 0$ ,  $e^{i\pi \left(2 \frac{r}{f - f_0} u_2 r\right)} \rightarrow 0$  を用いると

$$R(r) = \operatorname{Re} \left\{ (1 - i) \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{f}{f - f_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \times e^{i\left(\pi \frac{r^2}{q} + 2\pi \frac{f_0}{f - f_0} r + \sigma\right)} \left[ 2\sqrt{\pi} \sqrt{q} e^{iK} + \sqrt{q} \int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{z_1 + v}} dv \right] \right\}$$

$$-\sqrt{q} \int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{z_2 + v}} dv \quad (7)$$

ただし  $\arg(z_1) < \pi$  で  $K = 0$

$\arg(z_1) > \pi$  で  $K = 1$

応答倍率の計算は掃引速度により2つの場合に分ける.

(i)  $h = 0$  ( $q \rightarrow \infty$ ) の場合

$$R(r) = \operatorname{Re} \left\{ (1 - i) \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{f}{f - f_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \times e^{i\left(2\pi \frac{f_0}{f - f_0} r + \sigma\right)} \left[ \sqrt{\frac{q}{z_1}} - \sqrt{\frac{q}{z_2}} \right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}} \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f - f_0} r + \sigma - \theta\right) \quad (8)$$

$$\text{ただし } \tan \theta = \frac{2\zeta f_0 f}{f^2 - f_0^2} \quad (9)$$

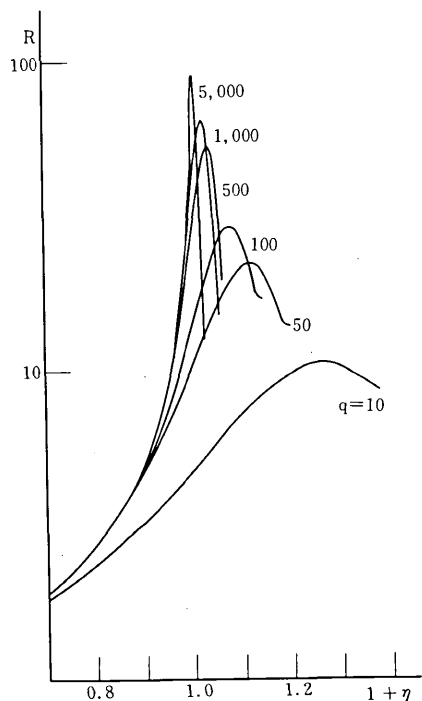
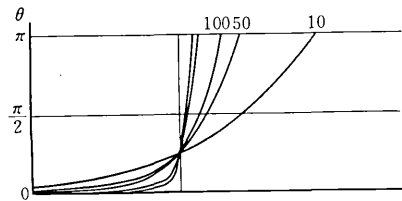


図3  $\zeta = 0.005$  の応答倍率と位相

研究速報 (8), (9)は定常加振の場合に得られる式と一致する<sup>9)</sup>

(ii)  $h \neq 0$  ( $q \neq \infty$ ) の場合

$$a + ib = 2\sqrt{\pi}e^{i\pi}K + \int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{z_1 + v}} dv - \int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{z_2 + v}} dv \quad (10)$$

とおくと

$$R(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{1}{f-f_0} \frac{f}{f-f_0} \sqrt{q} \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\pi \frac{r^2}{q} + 2\pi \frac{f_0}{f-f_0} r + \sigma - \theta) \quad (11)$$

$$\text{ただし } \tan\theta = \frac{b-a}{a+b} \quad (12)$$

$\zeta = 0.005$ ,  $f/(f-f_0) \approx 1$  の場合に数値積分により(10)を計算し応答変位の倍率Rと位相差 $\sigma$ を求めると図3のようになる。掃引速度hが増加すればその逆数に比例するqは減少する。その時応答変位の倍率は減少し、倍率が最大値を示す加振周波数比には遅れが生じて高周波数側にずれ、その時の位相差は $\pi/2$ より増加する。 $\zeta = 0.005$ 以外の値でもこの傾向は不変である。 $\zeta$ をパラメータとして応答変位の倍率の最大値がqにより変化する状況を図4に、倍率が最大値を示す時の周波数比との関係を図5に、位相差 $\sigma$ との関係を図6に示した。 $\zeta$ が大きいかほどqが小さくとも定常加振の状況に近づことはこれらの図に共通して言える。

4. 見かけの振動特性と真値の関係

一般に用いられている共振点fにおけるハーフパワポ

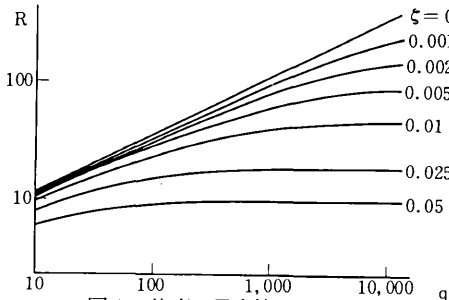


図4 倍率の最大値とqの関係

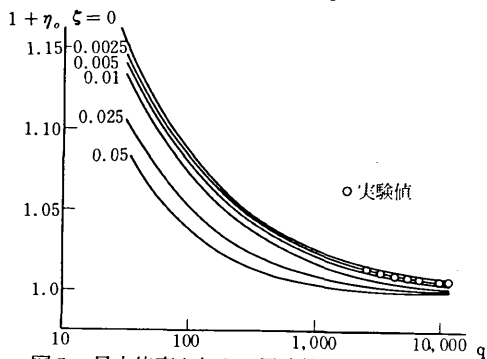


図5 最大倍率を与える周波数比とqの関係

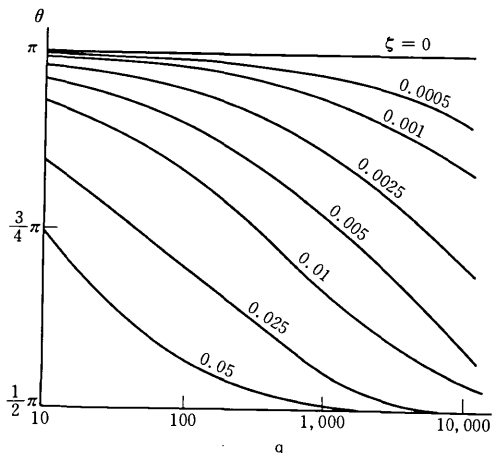


図6 最大倍率の時の位相差とqの関係

イントの周波数幅 $\Delta f$ から $\zeta = \Delta f/2f$ により等価粘性減衰係数 $\zeta$ を求める方法では、掃引速度がゼロでない限り真の値が得られないことは図3で掃引速度が増加するとピークが低く鈍くなることからわかる。前節に求めた手法で得た一自由度系の応答曲線から共振点fの低次側における周波数幅 $\Delta f/2$ を求め、ハーフパワポイント法の見かけの粘性減衰係数 $\zeta'$ を計算して真の値に対して示すと図7のようになる。掃引速度がゼロの定常加振ならば $\zeta' = \zeta$ であるが、掃引速度が増加す

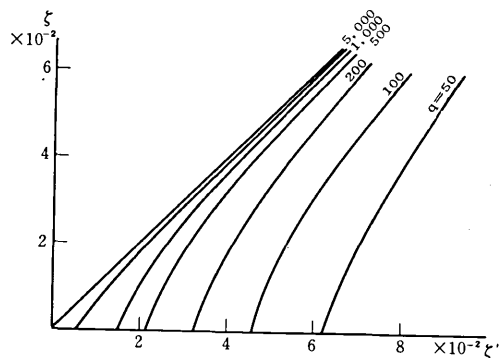


図7 減衰係数の真値とみかけの値の関係

るに従い $\zeta'$ は $\zeta$ より大きくなり、 $\zeta$ の値が小さいほどその増加の量は大きい。一自由度系の場合には応答曲線が得られれば、ハーフパワポイントから見かけの減衰係数 $\zeta'$ を求め、掃引速度hからqを計算し図7により較正することで真値の $\zeta$ が得られる。しかし多自由度系においては、 $\zeta$ を求めるためのハー

## 研究速報

フパワポイントを選ぶ際に他の次数の共振点の影響を取除く必要があるが、応答曲線を実験的に得た段階ではすべての共振点の振動特性は判別できないのでこの手法は使えない。応答倍率の最大値と $q$ の関係、その時の位相差と $q$ の関係なども一自由度系に対してはそのまま用いて $\xi$ を求められるが、多自由度系に対しては同じ理由で使えない。ところが最大倍率を与える周波数比と $q$ の関係は $q$ が大きく周波数比があまり大きくなければ他の共振点の影響をほとんど受けない。それは次のように説明できる。周波数比 $\gamma = 1 + \eta_0$ に減衰係数 $\xi$ の共振点があると仮定する。低域にある固有円振動数 $p_i$ の共振点の裾野との和で応答曲線が表わされるとして最大倍率を与える周波数比に及ぼす影響を計算すると

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\gamma}{1 + \eta_0}\right)^2\right]^2 + 4\xi'^2 \left(\frac{\gamma}{1 + \eta_0}\right)^2} + x \left(\frac{p_i}{p}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{1 + \eta_0}\right)^2}} \quad (13)$$

ただし $x$ は低次と高次の各共振点に対する等価静変位の比を示す。

$$\frac{\partial R}{\partial \gamma} = 0 \text{ より } \frac{\gamma}{1 + \eta_0} \doteq [1 - 2\xi'^2 - 8\xi'^3 x \left(\frac{p_i}{p}\right)^2]^{1/2} \quad (14)$$

$p_i/p < 1$ であり、 $x$ が $1/\xi'$ 程度でも減衰係数による影響と同程度であるから無視できる。そこで掃引速度と応答倍率の最大値を与える周波数比を加振実験で計

測すれば、図5からその共振点の等価減衰係数が得られる。図1に示した共振点の、最大倍率を与える周波数比の実験値が図5中の白丸印である。図1からは応答加速度の最大値を与える周波数比が読取れるが、 $\xi$ が小さいので $\xi$ による修正を行わずにその周波数比で応答変位も最大値を示すと考える。

この共振点では等価粘性減衰係数は $\xi = 0.0025$ と読取れる。

## 5. おわりに

周波数が時間に対して直線的に変化する加振法による応答曲線は定常加振の場合と比べ異なる様相を示すことを実験的、理論的に明らかにした。また応答変位の最大倍率を与える周波数比のずれから減衰係数を求める手法の検討を行なった。(1974年11月30日受理)

## 参考文献

- 1) 高橋, 機講論, 730-14, (昭48-10), P. 141
- 2) 高橋, 機講論, 743-2, (昭49-3), P. 35
- 3) F. M. Lewis, Jr. Ap. M., 54-24, (1932), P. 253
- 4) Pöschl, Ing.-Arch., 4, (1933), P. 102
- 5) J. G. Baker, Jr. Ap. M., 6 (1933), P. 145
- 6) R. B. Meuser, etc., Jr. Ap. M., 70, (1948), P. 21
- 7) 下山ほか, 機論, 15-50, (昭24), P. 113
- 8) 古屋, 機論, 17-57, (昭26), P. 67
- 9) 亘理, 機械力学, (昭29), P. 21