

インパルス応答のパワースペクトルによる 減衰定数推定の一方法

On a Method to Obtain Damping Ratios by the Power Spectrum of Impulse Response

三井 公之*・佐藤 寿芳*

Kimiyuki MITSUI and Hisayoshi SATO

1. まえがき

一般に構造物の振動解析にあたって、各振動モードに対する減衰定数を定めることが必要となる。

1 自由度系の減衰定数を求める方法については詳しい記述がある¹⁾。しかし、一般の構造物では、多自由度系であること、その固有振動数の中には、互いに接近しているものもあること、などのため、1 自由度系について用いられる基本的な方法が、そのままでは適用できない。

これらの点を考慮し、また伝達関数測定装置など最近の測定手段の発展に対応し、減衰定数を求める手法についていくつかの研究が発表されている^{2)~6)}。坪⁷⁾らは FFT (Fast Fourier Transform) を用いて構造物に衝撃を与えたときのインパルス応答についてパワースペクトルを求め、注目する固有振動数に対応する山の部分の値のみを逆変換し、得られた減衰波形に 1 自由度系についての方法を適用して減衰定数を求めている。しかし、この方法では、パワースペクトルの注目する山の部分を取り出す際に、山の裾を切り捨てていること、他の固有振動数に対する山の裾を含まま逆変換していること、などの点で厳密さをかいていた。筆者らは、これらの点を考慮して、衝撃応答波形のパワースペクトル曲線が、各固有振動数に対する 1 自由度系応答波形のパワースペクトルの重ね合せにより表わされるものとして曲線適合をおこない、減衰定数を推定する手法を、すでに提案している⁸⁾⁹⁾。以下ではこの手法につきパワースペクトル曲線をあらわす式をより正確な形に改めること、固有振動数も変数として真の固有振動数を推定する演算操作を加えることなどの検討を加え、より精度よく減衰定数を推定しうるようにした結果についてのべる。

2. 1 自由度系インパルス応答の特性

1 自由度系にインパルスを与えた場合についてみると系の運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = I\delta(t) \quad (1)$$

ここで、 x ：質点の変位、 m ：質量、 c ：減衰係数、 k ：ばね定数、 I ：質点に与えるインパルスの強さ、 $\delta(t)$ ：ディラクのデルタ関数をそれぞれ表わす。初期条件 $x(0)$

$= 0, \dot{x}(0) = I/m$ として(1)を解くと

$$x(t) = \frac{(I/k)\omega_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp(-\zeta\omega_0 t) \sin \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t \quad (2)$$

ここで、 $\omega_0^2 = k/m, 2\zeta\omega_0 = c/m, \omega_0^2 \cdot I/k = I/m$

ζ ：減衰定数、 ω_0 ：無減衰時固有円振動数

(2)をラプラス変換したのち、リセプタンス $X(j\omega)$ の絶対値の 2 乗をとり、パワースペクトルは(3)となる。

$$S(\omega) = \frac{\omega_0^4 D^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_0^2 \omega^2} \quad (3)$$

ここで、 $D = I/k, \omega$ ：円振動数である。

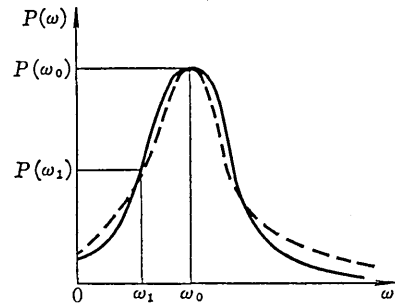


図 1 1 自由度系に対するパワースペクトル曲線の近似

図 1 の実線が実際の系を対象にもとめられたパワースペクトル曲線 $P(\omega)$ とするとき、これを(3)で近似することを考える。パワースペクトルの山の最高点を与える円振動数を固有円振動数と見なして、 ω_0, ω_1 において両パワースペクトル曲線が一致するように D, ζ の値を定めるようにする。円振動数 ω_1, ω_0 において次の 2 つの式が成り立つ

$$P(\omega_1) = \frac{\omega_0^4 D^2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_0^2 \omega_1^2} \quad (4)$$

$$P(\omega_0) = \frac{D^2}{4\zeta^2} \quad (5)$$

したがって(4)、(5)を解くことにより

$$D = \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - 1}{\omega_0^2}\right)^2 \frac{P(\omega_0)}{\{P(\omega_0)/P(\omega_1)\} - (\omega_1^2/\omega_0^2)}} \quad (6)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{D}{4P(\omega_0)}} \quad (7)$$

* 東京大学生産技術研究所 第 2 部

と求められる。一般に、固有円振動数と山の最高点を与える円振動数との違いは、減衰定数が増加すると共に増加するので、減衰定数が大きくなると、この違いを無視することは適当でなく、固有振動数を求めるために補正が必要となる。この間の関係は

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (8)$$

と与えられる。ここで ω_m は山の最高点を与える円振動数である。

3. N自由度系パワースペクトル曲線による近似

一般の構造物についてインパルス応答波形のパワースペクトルを求めた場合、通常図2に示すように、複数個の山を有する曲線が得られる。これを破線で示すN個の1自由度系パワースペクトルの重ね合わせで近似することができれば、各1自由度系の減衰定数として、1次からN次までの振動モードに対応する減衰定数を定めることができよう。N自由度系のインパルス応答が、1自由度系の応答の重畳であらわされるとすると、

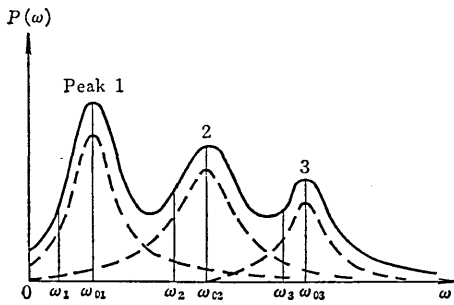


図2 N自由度系によるパワースペクトル曲線の近似

$$x(t) = \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{0j}^2 I_j / k_j}{\omega_{0j} \sqrt{1 - \zeta_j^2}} \exp(-\zeta_j \omega_{0j} t) \sin \omega_{0j} \sqrt{1 - \zeta_j^2} t \quad (9)$$

リセプタンス $X(j\omega)$ は

$$X(j\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{0j}^2 D_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2 - 2i\zeta_j \omega_{0j} \omega)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_j^2 \omega_{0j}^2 \omega^2} \quad (10)$$

ただし $D_j = I_j / k_j$, $i = \sqrt{-1}$ である。

パワースペクトル $S_N(\omega)$ は

$$S_N(\omega) = |X(j\omega)|^2 = \sum_{j=1}^N \frac{D_j^2}{(1 - \omega^2/\omega_{0j}^2)^2 + 4\zeta_j^2 \omega^2/\omega_{0j}^2} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{D_n D_m \{(1 - \omega^2/\omega_{0n}^2)(1 - \omega^2/\omega_{0m}^2) + 4\zeta_n \zeta_m (\omega/\omega_{0n})(\omega/\omega_{0m})\}}{\{(1 - \omega^2/\omega_{0n}^2)^2 + 4\zeta_n^2 \omega^2/\omega_{0n}^2\} \{(1 - \omega^2/\omega_{0m}^2)^2 + 4\zeta_m^2 \omega^2/\omega_{0m}^2\}} \quad (11)$$

ここで固有振動数どうしが、互いに大きくはなれている場合や、減衰定数が充分小さい場合に対し、(11)の第2項を無視すると

$$S_N(\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{D_j^2}{(1 - \omega^2/\omega_{0j}^2)^2 + 4\zeta_j^2 (\omega^2/\omega_{0j}^2)} \quad (12)$$

となる。これを用いて曲線適合をおこない減衰定数を算定する手法についてはすでに発表している⁹⁾。ここでは(11)の第2項を省略せず同様の解析をすすめた場合について述べる。

まず(11)をj次の振動モードに対するパラメータ $D_j, \zeta_j, \omega_{0j}$ でそれぞれ偏微分する。

$$\frac{\partial S_N}{\partial D_j} = \frac{2D_j}{(1 - \omega^2/\omega_{0j}^2)^2 + 4\zeta_j^2 (\omega^2/\omega_{0j}^2)} + \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq j)}}^N \frac{2D_n \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0n}^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}\right) + 4\zeta_n \zeta_j \frac{\omega}{\omega_{0j} \omega_{0n}} \right\}}{\left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0n}^2}\right)^2 + 4\zeta_n^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0n}^2} \right\} \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}\right)^2 + 4\zeta_j^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right\}} \quad (13)$$

$$\frac{\partial S_N(\omega)}{\partial \zeta_j} = \frac{-8D_j^2 \zeta_j (\omega^2/\omega_{0j}^2)}{\{(1 - \omega^2/\omega_{0j}^2)^2 + 4\zeta_j^2 (\omega^2/\omega_{0j}^2)\}^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq j)}}^N \frac{8D_n D_j (A - B)}{\left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0n}^2}\right)^2 + 4\zeta_n^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0n}^2} \right\} \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}\right)^2 + 4\zeta_j^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right\}^2} \quad (14)$$

ここで

$$A = \zeta_n \frac{\omega}{\omega_{0n}} \frac{\omega}{\omega_{0j}} \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}\right)^2 + 4\zeta_j^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right\}$$

$$B = 2\zeta_j \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0n}^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}\right) + 4\zeta_n \zeta_j \frac{\omega}{\omega_{0n}} \frac{\omega}{\omega_{0j}} \right\}$$

$$\frac{\partial S_N(\omega)}{\partial \omega_{0j}} = \frac{\frac{4}{\omega_{0j}^2} D_j^2 \left\{ 2\zeta_j^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} - \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}\right) \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right\}}{\left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}\right)^2 + 4\zeta_j^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right\}^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq j)}}^N \frac{\frac{4}{\omega_{0j}} D_j D_n (A' - B')}{\left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0n}^2}\right)^2 + 4\zeta_n^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0n}^2} \right\} \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}\right)^2 + 4\zeta_j^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right\}^2} \quad (15)$$

ここで、

$$A' = \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}\right)^2 + 4\zeta_j^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right\} \times \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0n}^2}\right) \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} - 2\zeta_j \zeta_n \frac{\omega}{\omega_{0j}} \frac{\omega}{\omega_{0n}} \right\}$$

$$B' = \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0n}^2}\right) + 4\zeta_j \zeta_n \frac{\omega}{\omega_{0j}} \frac{\omega}{\omega_{0n}} \right\} \times \left\{ 2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}\right) \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} - 4\zeta_j^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2} \right\}$$

つぎに、 $D_j, \zeta_j, \omega_{0j}$ ($j=1, 2, \dots, N$) をそれぞれ $\Delta D_j, \Delta \zeta_j, \Delta \omega_{0j}$ 微小増加した場合、(11)の $S_N(\omega)$ の増加分 $\Delta S_N(\omega)$ は

$$\Delta S_N(\omega) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial S_N(\omega)}{\partial D_j} \Delta D_j + \frac{\partial S_N(\omega)}{\partial \zeta_j} \Delta \zeta_j + \frac{\partial S_N(\omega)}{\partial \omega_{0j}} \Delta \omega_{0j} \right] \quad (16)$$

と与えられる。測定から求められたパワースペクトル曲線を $P(\omega)$ として、各山に(6),(7)を用いて、曲線適合の計算における $D_j, \zeta_j [j=1, 2, \dots, N]$ の初期値が計算される。また $\omega_{0j} [j=1, 2, \dots, N]$ については各山の最高点を与える円振動数を初期値とする。(11)に $D_j, \zeta_j, \omega_{0j} [j=1, 2, \dots, N]$ の初期値を代入して $S_{N1}(\omega)$ とし

$$P(\omega) = S_{N1}(\omega) + \Delta S_N(\omega) \quad (17)$$

となるように $\Delta D_j, \Delta \zeta_j, \Delta \omega_{0j} [j=1, 2, \dots, N]$ を求める。(17)は $3N$ 個の未知数を含むことになるから、各山3個ずつ、全体で $3N$ 個の点を用いて解くことができる。その結果くりかえし計算の第2回目の値はそれぞれの変数にたいし

$$\begin{aligned} D_{j2} &= D_{j1} + \Delta D_j \\ \zeta_{j2} &= \zeta_{j1} + \Delta \zeta_j \\ \omega_{0j2} &= \omega_{0j1} + \Delta \omega_{0j} \\ [j &= 1, 2, \dots, N] \end{aligned} \quad (18)$$

と与えられる。

引続き同様の手順によって繰り返し計算をおこない、収束をはかる。以上は(11),(16),(17)等にもとづいて厳密な展開をしたものであるが、いまこれを手法Iと呼んでおく。

減衰定数が充分小さい場合には、パワースペクトルの山の最高点を与える振動数を固有振動数と考えてよい。この時(16)に対応して次式が得られる。

$$\Delta S_N(\omega) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial S_N(\omega)}{\partial D_j} \Delta D_j + \frac{\partial S_N(\omega)}{\partial \zeta_j} \Delta \zeta_j \right] \quad (19)$$

この場合は、(17)にあたる式は $2N$ 個の未知数を含むことになるから、各山2個ずつ、全体で $2N$ 個の点を用いて解くことができる。これを手法IIとしておく。また減衰定数が充分小さく固有振動数どうしが充分はなれた場合を想定すれば、(11)の第2項を無視することが考えられるが、以下ではこれを手法IIIとする。

4. 数値実験

前節において述べた手法I, 手法IIを用いて、数値実験を行なった。すなわち(11)において $N=5$ とし、各振動モードに対する $D_j, \zeta_j, \omega_{0j} [j=1, 2, \dots, 5]$ を与えてパワースペクトル曲線を計算しておき、その曲線上の各山において、手法Iの場合には3点、手法IIの場合には2点をそれぞれ計算初期値として適当に選び、くり返し計算によって曲線適合をおこない、 ζ_j を求めることを試みた。このとき各山に対する初期値のうち1点は、固

有円振動数の近似値として、山の最高点を与える円振動数とそれに対応する値を選ぶ。表1(a),(b)において、真値の欄に示した数値は、(11)によりパワースペクトル曲線を計算するさいに用いた D_j, ζ_j の値である。また固有円振動数は10.0, 15.0, 22.0, 30.0, 40.0rad/sと与えている。

減衰定数が充分小さい場合には、手法IIによっても充分精度よく ζ_j の値を推定しうることがわかる。しかし、少しその値が大きくなった場合でも、手法Iによれば精度よく推定しうることが明らかである。実際の例について(11)がどこまで妥当かは検討の余地があるにしても、手法IIIは、他にくらべてやや精度がおちる方法であろう。

図3は(11)に表2の真値の欄の値を代入して計算したものであるが、実際の振動波形のパワースペクトル曲線において、隣り合う固有円振動数が接近したために、隣り合う山が明瞭には区別できない場合がある。計算に用いる点を

- 1次モードについて $\begin{cases} \omega=8.0 \\ \omega=9.0 \\ * \omega=10.0 \end{cases}$
- 2次モードについて $\begin{cases} \omega=11.0 \\ * \omega=12.0 \\ \omega=13.0 \end{cases}$

と選び手法Iを適用した結果を表2に示す。

ここで*印は固有円振動数の初期値である。表によれば、図のように山の区別がつかないような場合でも、この方法によれば系のパラメータを推定しうることが示された。2つの固有円振動数がさらに接近した場合は模擬が難しく、上の例程度が限度であろう。

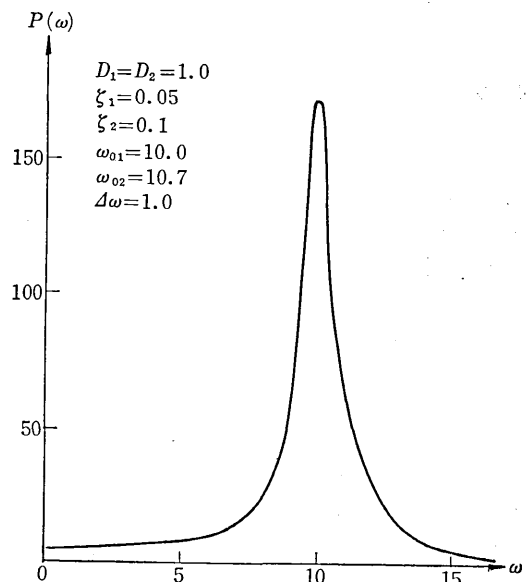


図3 固有振動数が接近している場合 (二つの山が区別できない)

表 1 各手法による数値実験結果
(a)

		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5
真 値		6.00	6.00	5.00	2.00	2.00	0.0400	0.0500	0.0500	0.0200	0.0250
第 5 近似値	手法 I	6.00	6.00	5.00	2.00	2.00	0.0400	0.0500	0.0500	0.0200	0.0250
	手法 II	5.68	5.41	4.81	2.02	2.29	0.0361	0.0442	0.0479	0.0202	0.0284
	手法 III	9.64	6.20	4.54	1.63	1.65	0.0590	0.0497	0.0448	0.0159	0.0201

(b)

		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5
真 値		6.00	6.00	5.00	2.00	2.00	0.0100	0.0125	0.0125	0.00500	0.00600
第 5 近似値	手法 I	6.00	6.00	5.00	2.00	2.00	0.0100	0.0125	0.0125	0.00500	0.00600
	手法 II	6.00	6.00	5.00	2.00	2.00	0.0100	0.0125	0.0125	0.00500	0.00600
	手法 III	9.53	6.72	4.82	1.55	1.65	0.0158	0.0140	0.0120	0.00387	0.00490

表 2 固有振動数が接近している場合に対する数値実験

	D_1	D_2	ζ_1	ζ_2	ω_{01}	ω_{02}
真値	1.0	1.0	0.05	0.10	10.0	10.70
第11近似	1.00495	0.99491	0.05016	0.10005	10.0012	10.7017

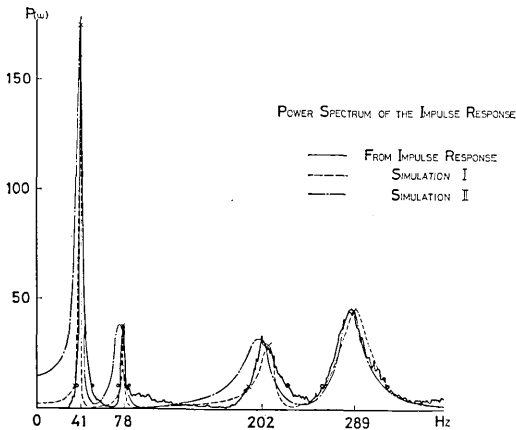


図 4 衝撃応答のパワースペクトル

表 3 図 4 のパワースペクトル曲線に手法 II を用いた結果、() 内は D について平均化した場合

f_0 Hz	41.0	78.0	202	289
D	0.434 (1.863)	0.176 (0.614)	0.322 (0.729)	0.768 (0.656)
ζ	0.0165 (0.0712)	0.0146 (0.0512)	0.0331 (0.0698)	0.0577 (0.0499)

5. 実際例への応用

図 4 の実線は、旋盤ベッドのインパルス応答波形のパワースペクトル曲線である。パワースペクトル曲線上の各山の頂点、およびその他に 1 点 (×印) を計算点として選び、手法 II により減衰定数を算定した。その結果を

表 3 に示す。また、表 3 の各値を (11) に代入して計算した模擬パワースペクトル曲線を破線で示す。

手法 II を用いる場合、計算に用いる点は各山 2 点でよいが、この組合せを数組づくり、それぞれの点の組合せに対して得られた結果を平均化して、パワースペクトル曲線とよい一致をはかることが考えられる。

各山について 2 点ずつとって D_j, ζ_j を求める計算をくりかえした後、 D を総加平均すると

$$D_j = \sum_{i=1}^M D_{ji} / M \quad [j=1, 2, \dots, N] \quad (20)$$

と求められる。各振動モードについて、 D_j の平均が求められたことになるので、つぎに各山の最高点を与える振動数 $\omega_{01}, \omega_{02}, \dots, \omega_{0N}$ において、模擬されたパワースペクトル曲線が測定されたものに一致するよう $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ の値を求めればよい。すなわち、 ζ_j を $4\zeta_j$ 増加した場合の (11) の $S_N(\omega)$ の増加を $\Delta S_N(\omega)$ とすれば、(19) は

$$\Delta S_N(\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial S_N(\omega)}{\partial \zeta_j} \Delta \zeta_j \quad (21)$$

としうるから、すでに求められている、 $\zeta_j [j=1, 2, \dots, N]$ のうちの適当なものを初期値として選べば、すでに述べたのと同じ手順で減衰定数を定めることができる。このとき (17) は N 個の未知数を含むから、計算に用いる点としては $\omega_{01}, \omega_{02}, \dots, \omega_{0N}$ のみを用いればよい。図 4 の一点鎖線で示した模擬パワースペクトル曲線は、上記の D_j を平均化する方法によって求めたものである。計算点は山の最高点を与える振動数の他に、図 4 の○印で示した 2 点を用いたものである。求められた減衰定数を表 3 に示す。

6. おわりに

本研究ではインパルス応答波形のパワースペクトル曲

線を、1自由度系パワースペクトルの重ね合せで近似することにより、各振動モードの減衰定数を推定する手法を示した。パワースペクトル曲線上の各山について、2ないし3点を計算点として選べば、他の固有振動数に対応する山の裾の影響を考慮して減衰定数を求めること、固有振動数を未知数として扱うことにより減衰定数が大きい場合、あるいは隣り合う固有振動数が接近し、パワースペクトル曲線上で2つの山が区別しにくい場合にも有効であることなどを示した。この方法によりインピーダンス測定装置あるいはフーリエアナライザ等により得られたインピーダンス曲線、伝達関数曲線に対して曲線適合をおこなうことも可能であると考えられる。終りに実験、計算等に協力された本所佐藤研、駒崎正洋、大堀真敬両技官、大学院生黒崎明君に感謝する。

(1974年9月7日受理)

文 献

- 1) 亙理：機械振動，丸善，昭41.
- 2) 柴田，原：うなりをともなう減衰波形の解析法，生産研究，17-8，1969.
- 3) A. L. Klosterman and J. R. Lemon: Building Block Approach to Structural Dynamics, ASME 69-Vibr. 304, 1969.
- 4) 岡村，松原：周波数応答実験から伝達関数を決定する方法，精密機械，37-4 (昭46) 282.
- 5) 山室ほか：建屋および機器配管系の振動特性測定法について，機講論，720-3 (昭47-4) 57.
- 6) 小坪ほか：常時微動による構造物の減衰定数推定における問題点，土木学会耐震工学委員会第12回地震工学研究発表会講演概要 (昭47-7) 31.
- 7) 坪ほか：高速フーリエ変換による帯域波とその応用について，機械学会講演論文集，No. 720-3 (昭47-4) 65.
- 8) K. Mitsui and H. Sato: On a Method to Obtain Damping Ratios by the Power Spectrum of Impulse Response, 生産研究, Vol. 25-3 (昭48) 110.
- 9) 三井，佐藤：衝撃応答のパワースペクトルによる減衰定数推定の方法，機械学会講演論文集，No. 730-3 (昭48-4) 124.