

円筒液体貯槽の液面動揺の応答 第 3 報

—正弦波過渡応答の簡易計算法—

Response Analysis on Sloshing of Liquid in a Cylindrical Storage-III
—A Method of Simple Evaluation of Transient Response to Sinusoidal Input—

曾我部 潔*・柴田 碧*
Kiyoshi SOGABE and Heki SHIBATA

1. は し が き

第 2 報では液体貯槽系が 1 次の液面動揺の固有周期と等しい周期の正弦波の加振を受けた場合に対する過渡応答を評価し、この応答が実地震波を入力波とした場合の液体貯槽系の応答にほぼ等しくなるように正弦波等価入力波数を推定した。

本報では液体貯槽系が 1 次の液面動揺の固有周期に近い周期の正弦波の加振を受けた場合に対する過渡応答を評価し、この結果を図表に整理し、応答の最大値の評価が簡便に行なえるようにした。

2. 基 礎 式

図 1 に示す系について考察する。第 1 報¹⁾、第 2 報²⁾を参考にすると、地表面が変位

$$d_g = D_g \sin \omega_g t \quad (t \geq 0) \quad (1)$$

したがって速度

$$u_g = D_g \omega_g \cos \omega_g t \quad (t \geq 0) \quad (2)$$

で振動し始めた場合の 1 次の液面動揺の過渡応答は液面変位 η 、側面圧力 p_w 、底面圧力 p_b に対してそれぞれ

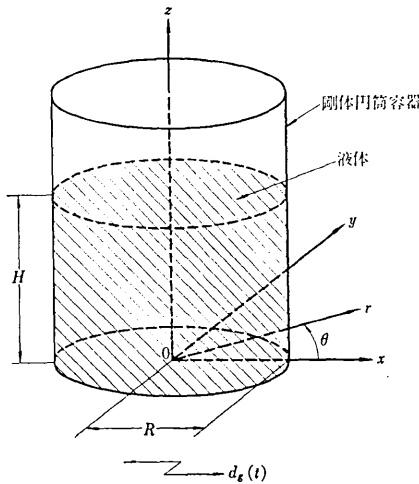


図 1 系のモデル化

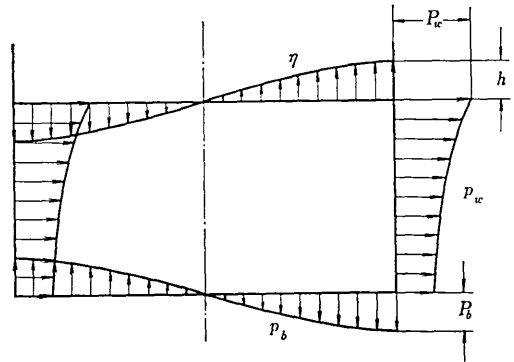


図 2 1 次共振点近傍での液面動揺の応答形

次式で与えられ、それらの応答形は図 2 のようになる。

$$\eta = \frac{R}{g} \left\{ \beta_1 \Phi_1(r, H) \dot{v}_1 - \frac{r}{R} \dot{u}_g \right\} \cos \theta \quad (3)$$

$$p_w = \frac{\gamma R}{g} \left\{ \beta_1 \Phi_1(R, z) \dot{v}_1 - \dot{u}_g \right\} \cos \theta \quad (4)$$

$$p_b = \frac{\gamma R}{g} \left\{ \beta_1 \Phi_1(r, 0) \dot{v}_1 - \frac{r}{R} \dot{u}_g \right\} \cos \theta \quad (5)$$

ここに $\Phi_1(r, z)$ 、 β_1 はそれぞれ 1 次の液面動揺に対する規準関数および励振係数であり次式で与えられる。

$$\Phi_1(r, z) = J_1\left(\varepsilon_1 \frac{r}{R}\right) \cosh\left(\varepsilon_1 \frac{z}{R}\right) \quad (6)$$

$$\beta_1 = \frac{2}{(\varepsilon_1^2 - 1) J_1(\varepsilon_1) \cosh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right)} \quad (7)$$

$$\varepsilon_1 \cong 1.841 \quad (8)$$

また \dot{v}_1 は 1 次の液面動揺の応答の加速度であり次式で与えられる。

$$\dot{v}_1 = D_g \omega_g^2 e_1(t) \quad (9)$$

ここに

$$e_1(t) = \frac{\lambda_1^2}{\sqrt{(1 - \lambda_1^2)^2 + (2\zeta_1 \lambda_1)^2}} \times \left\{ \sin(\omega_g t - \delta_1) - \frac{1}{\lambda_1 \sqrt{1 - \zeta_1^2}} e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \times \sin(\sqrt{1 - \zeta_1^2} \omega_1 t - \phi_1) \right\} \quad (10)$$

* 東京大学生産技術研究所 第 2 部

研 究 速 報

$$\delta_1 = \tan^{-1} \frac{2\zeta_1 \lambda_1}{1 - \lambda_1^2} \quad (11)$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \frac{\zeta_1}{\sqrt{1 - \zeta_1^2}} \frac{1 + \lambda_1^2}{1 - \lambda_1^2} - \tan^{-1} \frac{\zeta_1}{\sqrt{1 - \zeta_1^2}} \quad (12)$$

ここで λ_1 は入力波の振動数 ω_e と系の固有振動数 ω_1 との振動数比であり次式で与えられる。

$$\lambda_1 = \frac{\omega_e}{\omega_1} = \frac{T_1}{T_e} \quad (13)$$

また系の固有振動数 ω_1 は次式で与えられる。

$$\omega_1^2 = \frac{g}{R} \varepsilon_1 \tanh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right) \quad (14)$$

さらに ζ_1 は 1 次の液面動揺に対する減衰定数である。

式 (14) を用いて 1 次の液面動揺の固有周期 T_1 を求める計算は頻繁に行うのでこれを計算図表として図 3 にまとめた。図 3 では次の例題の計算を行っている。

〔例題〕 直径 $D=10$ m, 液面高さ $H=3$ m の液体貯槽の 1 次の液面動揺の固有周期 T_1 を計算せよ。

〔準備〕 $H/D=3/10=0.3$

〔計算〕 図 3 より次の計算結果を得る。

$$T_1 = 3.75 \text{ sec}$$

3. 正弦波入力を n 波受けた場合の液面動揺の応答の最大値

液面変位, 側面圧力, 底面圧力の振幅の最大値をそれぞれ h, P_w, P_b とする。これらの値は式 (3), (4), (5) に式 (2), (9) を用い, 図 2 を参考にするとつぎのようになる。

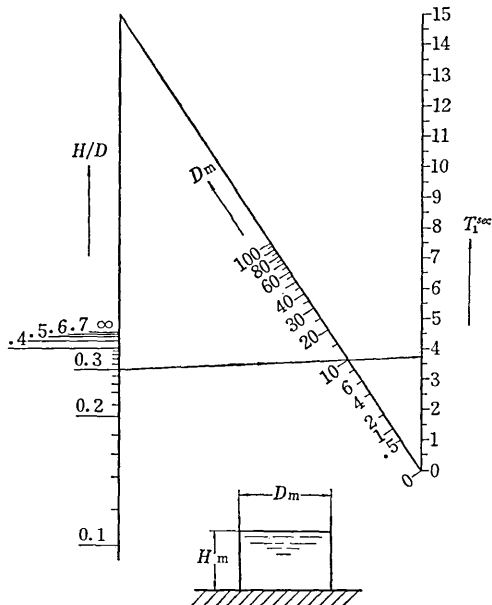


図 3 円筒貯槽スロッシング固有周期計算図表

$$h = \eta \Big|_{\theta=0}^{r=R} = R \frac{D_e \omega_e^2}{g} \left\{ \frac{2}{\varepsilon_1^2 - 1} e_1(t) + \sin \omega_e t \right\} \quad (15)$$

$$P_w = p_w \Big|_{z=H}^{\theta=0} = \gamma R \frac{D_e \omega_e^2}{g} \left\{ \frac{2}{\varepsilon_1^2 - 1} e_1(t) + \sin \omega_e t \right\} \quad (16)$$

$$P_b = p_b \Big|_{\theta=0}^{r=R} = \gamma R \frac{D_e \omega_e^2}{g} \left\{ \frac{2}{\varepsilon_1^2 - 1} \frac{1}{\cosh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right)} e_1(t) + \sin \omega_e t \right\} \quad (17)$$

ここで系が n 波の正弦波入力を受けた場合の $e_1(t)$ の応答の最大値 $A_n(n)$ を次式で定義する。

$$A_n(n) \equiv \max_{0 \leq t \leq nT_e} |e_1(t)| \quad (18)$$

この $A_n(n)$ は 1 質点系が n 波の正弦波入力を受けた場合の相対加速度の応答の最大値に対応するものである。

上の $A_n(n)$ を用いると, 系が n 波の正弦波入力を受けた場合の h, P_w, P_b の応答の最大値は安全側としてそれぞれ次式で評価できる。

$$h(n) = R \frac{D_e \omega_e^2}{g} \left\{ \frac{2}{\varepsilon_1^2 - 1} A_n(n) + 1 \right\} \quad (19)$$

$$P_w(n) = \gamma R \frac{D_e \omega_e^2}{g} \left\{ \frac{2}{\varepsilon_1^2 - 1} A_n(n) + 1 \right\} \quad (20)$$

$$P_b(n) = \gamma R \frac{D_e \omega_e^2}{g} \left\{ \frac{2}{\varepsilon_1^2 - 1} \frac{1}{\cosh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right)} A_n(n) + 1 \right\} \quad (21)$$

上式が示すように $A_n(n)$ の値が分れば, 各応答の最大値は式 (19), (20), (21) を用いて計算することができる。

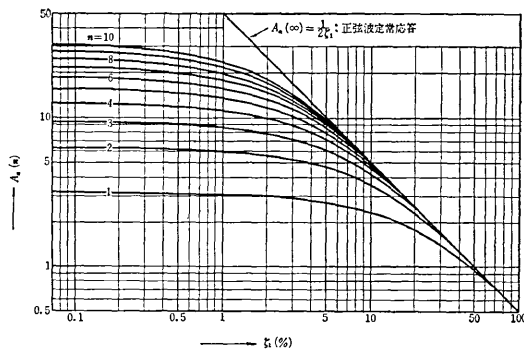


図 4 減衰定数 ζ_1 の変化に対する $A_n(n)$ の変化

図 4 は共振点 ($\lambda_1=1$) における $A_s(n)$ の値を減衰定数 ζ_1 を横軸に取り、入力波数 n をパラメータとして図表に表わしたものである。この図より分るように $\zeta_1 < 1\%$ では ζ_1 の値の変化は $A_s(n)$ の値にそれ程影響を与えないことが分る。実際の液体貯槽で減衰定数を実測した結果、 ζ_1 の値はほぼ 0.1% 前後であることが判明したので、以下 $\zeta_1=0.1\%$ として議論を進める。 ζ_1 の値が 0.1% の前後で少々変化しても応答の大きさは余り変化が無いと考えられるからである。

$A_s(n)$ の値の計算は液体貯槽の液面動揺の応答の最大値を評価する上で非常に重要な意味を有し、かつ頻繁に行うので図表として図 5 にまとめた。

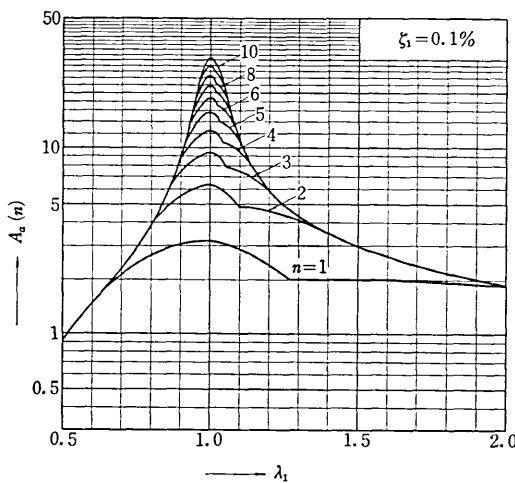


図 5 $\lambda_1 \sim A_s(n)$ 曲線

以上で正弦波入力に対する過渡応答の最大値は図 5 と式 (19), (20), (21) により評価できることを示したが、これらの計算には若干の手計算を必要とする。以下では液面変位の最大値 h および圧力の最大値 P_w の応答の最大値をさらに簡便に評価する方法について示す。

式 (15), (16) より圧力の最大値 P_w と液面変位の最大値 h の間にはつぎの関係

$$P_w = \gamma h \tag{22}$$

が成り立つので、実際には

$$h = R \frac{D_s \omega_s^2}{g} f_1(t) \tag{23}$$

$$f_1(t) = \frac{2}{\varepsilon_1^2 - 1} \varepsilon_1(t) + \sin \omega_s t \tag{24}$$

で表わされる液面変位の最大値 h の応答の最大値を評価すればよいことが分る。

ここで系が n 波の正弦波入力を受けた場合の $f_1(t)$ の応答の最大値 $S_s(n)$ を次式で定義する。

$$S_s(n) \equiv \max_{0 \leq t \leq nT_s} |f_1(t)| \tag{25}$$

この $S_s(n)$ を用いると、系が n 波の正弦波入力を受けた場合の液面変位の最大値 h の応答の最大値 $h(n)$ は次式で与えられる。

$$h(n) = R \frac{D_s \omega_s^2}{g} S_s(n) \tag{26}$$

(A) 入力加速度を基準にして応答を評価する場合

系が周期 T_s 、加速度振幅 $A_s (= D_s \omega_s^2)$ の正弦波を n 波受けた場合の液面変位の最大値 h の応答の最大値 $h(n)$ は式 (26) より次式のようになる。

$$h(n) = R \frac{A_s}{g} S_s(n) \tag{27}$$

式 (27) の計算は頻繁に行うので計算図表として図 6 にまとめた。図 6 では次の例題の計算を行っている。

【例題】直径 $D=80$ m、液面高さ $H=20$ m の液体貯槽 (10 万 kl 相当) が長周期成分 $T_s=12$ sec、加速度 $A_s=2.8$ gal の正弦波を 3 波受けた場合の液面変位の応答の最大値を計算せよ。

【準備】 $H/D=20/80=0.25$

図 3 を用いて固有周期 T_1 を計算すると

$$T_1 = 10.97 \text{ (sec)}$$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{T_1}{T_s} = \frac{10.97}{12} \approx 0.915$$

【計算】 図 6 を用いて ①, ②, ③, ④, ⑤ の手順で次の値を得る。

$$\theta_h(3) \equiv \frac{h(3)}{R} \approx 0.0202$$

$$\therefore h(3) \approx 0.81 \text{ m} = 81 \text{ cm}$$

(B) 入力変位を基準にして応答を評価する場合

系が周期 T_s 、変位振幅 D_s の正弦波を n 波受けた場合の液面変位の最大値 h の応答の最大値 $h(n)$ は式 (26) に式 (14) の関係

$$\frac{R}{g} = \frac{\varepsilon_1 \tanh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right)}{\omega_1^2}$$

を用いて整理すると次式のようになる。

$$h(n) = D_s K_1 \lambda_1^2 S_s(n) \tag{28}$$

ここに K_1 は貯槽の形状により定まる係数であり次式で与えられる。

$$K_1 \left(\frac{H}{D}\right) = \varepsilon_1 \tanh\left(2\varepsilon_1 \frac{H}{D}\right) \tag{29}$$

式 (28) の計算も頻繁に行うので計算図表として図 7 にまとめた。図 7 では次の例題の計算を行っている。

【例題】直径 $D=80$ m、液面高さ $H=20$ m の液体貯槽 (10 万 kl 相当) が長周期成分 $T_s=12$ sec、変位振幅 $D_s=10$ cm の正弦波を 3 波受けた場合の液面変位の応答の最大値を計算せよ。

【準備】 前の例題と同様にして

研究速報

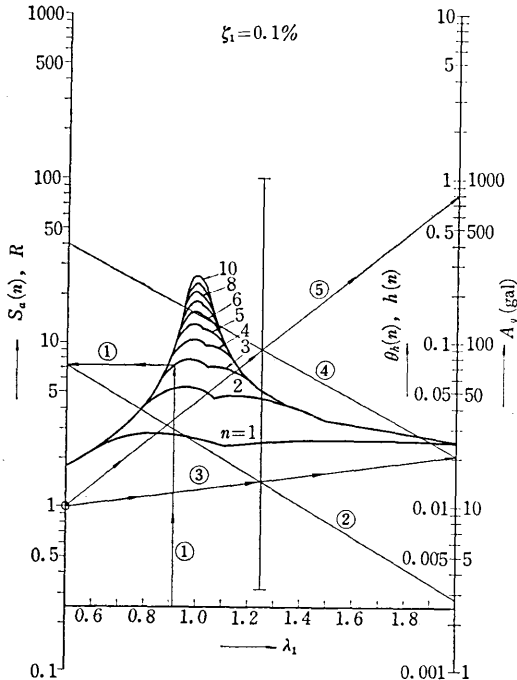


図 6 液面変位応答計算図表 (入力加速度基準)

$\lambda_1 = 0.915$

$H/D = 20/80 = 0.25$

〔計算〕 図 7 を用い①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥の手順で次の値を得る。

$$\frac{h(3)}{D_0} = 8.1$$

$\therefore h(3) = 81 \text{ cm}$

4. ま と め

液体貯槽が n 波の正弦波入力を受けた場合の液面変位, 圧力の応答の最大値を評価する式を誘導し, これらの結果を計算図表等に整理した。これらにより液体貯槽の液面動揺の過渡応答の評価が非常に簡便に行なえるようになった。

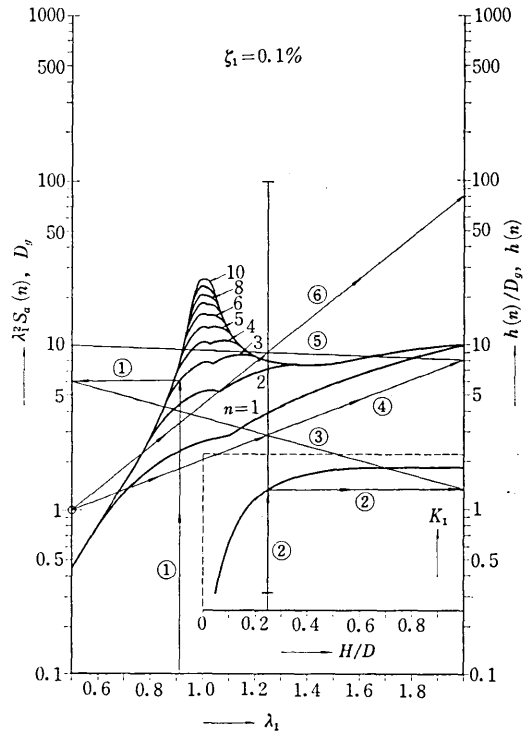


図 7 液面変位応答計算図表 (入力変位基準)

おわりに, 1 質点系の過渡応答の成長については以前に日本揮発油 (株) の岡田氏がアナコンで解析した結果がある³⁾。本報はこれを参考にし, 液体貯槽系を対象として理論的に考察したものである。この機会に岡田氏に御礼申し上げる。
(1974 年 5 月 23 日受理)

参 考 文 献

- 1) 曾我部・柴田: 円筒液体貯槽の液面動揺の応答 第 1 報, 生産研究, Vol. 26, No. 3 (1974.3), p. 31
- 2) 曾我部・柴田: 円筒液体貯槽の液面動揺の応答 第 2 報, 生産研究, Vol. 26, No. 4 (1974.4), p. 22
- 3) Shibata, H.: Observation of Damages in Industrial Firms in Niigata Earthquake, Proc. of Fourth World Conference of Earthq. Eng'g., Vol. III, J-2, (1969.1), p. 8