

軸対称液体貯槽の液面動揺の固有周期計算法に対する一提案

On a Method of Evaluating the Period of Sloshing Liquid in a Storage of Revolution

曾 我 部 潔*
Kiyoshi SOGABE

1. は し が き

軸対称容器内部の液体の動揺 (Sloshing) の固有周期を評価することは、液体貯槽の耐震設計を行う上で非常に重要な意味を有する。本文では、剛体容器内部の液体部分を円筒要素に分割し、伝達行列法を用いて固有周期を求める方法について提案する。このような計算は境界条件、接続条件の厳密性を求めるとかなり複雑な議論となる面があるが、本報告では実用面に力点を置き、工学的に満足する精度の結果を得ることを目的とした。

なおこの手法は著者が以前に薄肉円筒シェルと内部の液体の連成振動の固有値解析^{1),2)} に用いたものと類似のものであるが、本文では内部の液体のみに着目し、一般の軸対称容器に適用できるよう拡張した。

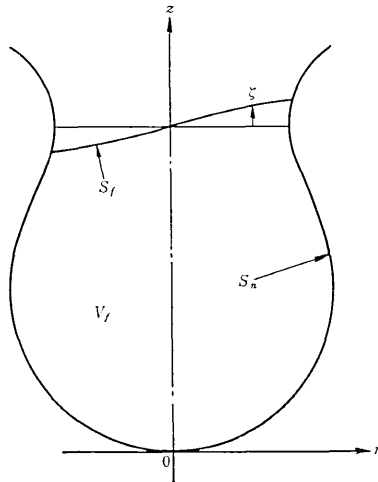


図 1 系の領域表示

図 1 の系を図 2 のように自由表面と底面との間を n 個の円筒要素に分割する。分割した各要素および各節点に対して、下端の状態量 (動圧, 変位) を上端の状態量に伝達する要素伝達行列および節点伝達行列を導き、これらを用いて系の底面の状態量を自由表面の状態量に伝達する系伝達行列を導く。この系伝達行列を用い、底面と自由表面で系の境界条件を満足するように固有周期を決定する。

2. 系の支配方程式

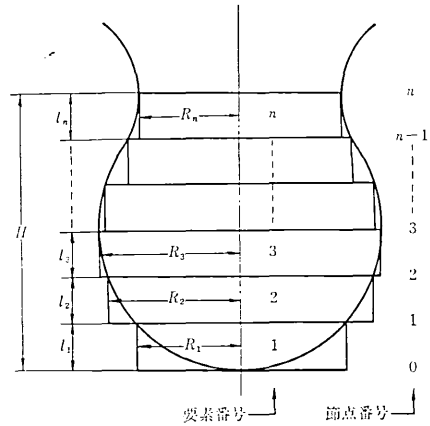


図 2 系の要素分割

液体の運動は速度ポテンシャルを用いて記述できると仮定する。(実験等でこの仮定の妥当性を確かめたが、相当大振幅の振動でも波頭に乱れが生じない場合にはこの仮定がほぼ適用できると判断された。)

系の液体の運動はつぎの三つの式により支配される。

- 1) 液体領域内で連続の条件を満足する。

$$\nabla^2 \bar{\phi} = 0 \quad V_f \text{ で} \quad (1)$$

- 2) 容器と液体の境界上では液体速度の垂直成分は 0 である。

$$-\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = 0 \quad S_n \text{ で} \quad (2)$$

- 3) 自由表面における境界条件

$$\bar{p} = \rho_f g \bar{\zeta} \quad S_f \text{ で} \quad (3)$$

また系の内部の動圧は次式で与えられる。

$$\bar{p} = \rho_f \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \quad V_f, S_n, S_f \text{ で} \quad (4)$$

ここに $\bar{\phi}$ = 速度ポテンシャル, \bar{p} = 動圧

$\bar{\zeta}$ = 自由表面変位, ρ_f = 液体の密度

g = 重力加速度, V_f = 液体領域

S_n = 液体と容器の境界, S_f = 自由表面

いま系全体が単一な周期で調和振動をし、かつ変数は円周方向に対して余弦的に変化すると仮定すると

$$\bar{\phi}(r, \theta, z, t) = j\omega \bar{\phi}(r, z) \cos \theta e^{j\omega t} \quad (5)$$

$$\bar{p}(r, \theta, z, t) = \bar{p}(r, z) \cos \theta e^{j\omega t} \quad (6)$$

$$\bar{\zeta}(r, \theta, t) = \bar{\zeta}(r) \cos \theta e^{j\omega t} \quad (7)$$

と表わすことができる。したがって式 (1), (2), (3) はつぎのようになる。

* 東京大学生産技術研究所 第 2 部 (柴田研究室)

研究速報

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad V_f \text{ で} \quad (8)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad S_n \text{ で} \quad (9)$$

$$p = \rho_f g \zeta \quad S_f \text{ で} \quad (10)$$

また動圧は式 (4) よりつぎのようになる.

$$p = -\omega^2 \rho_f \phi \quad V_f, S_n, S_f \text{ で} \quad (11)$$

3. 要素伝達行列の誘導

任意の円筒要素に対し図3に示すように上端と下端の節点番号を各々 u, l とする.

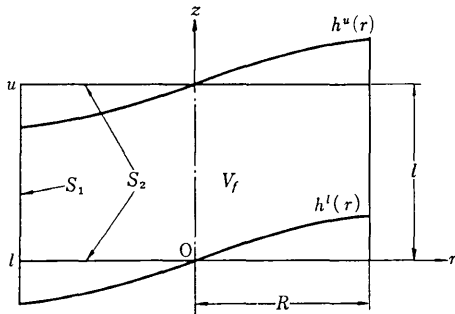


図3 円筒要素

図3中で $h^u(r)$ = 上端における液体の変位

$h^l(r)$ = 下端における液体の変位

V_f = 液体領域

S_1 = 液体と容器の境界

S_2 = 上端, 下端に対する仮想境界

3.1 基礎方程式

円筒内部の液体の運動は 2. と同様に次式により支配される.

$$\nabla^2 \bar{\phi} = 0 \quad V_f \text{ で} \quad (12)$$

$$-\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = 0 \quad S_1 \text{ で} \quad (13)$$

$$-\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = \bar{h} \quad S_2 \text{ で} \quad (14)$$

また要素内部の動圧は次式で与えられる.

$$\bar{p} = \rho_f \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \quad V_f, S_1, S_2 \text{ で} \quad (15)$$

3.2 調和振動の仮定および基礎式の変形

系全体が単一な周期で調和振動すると仮定してあるから各要素内部も同じ周期で調和振動する. したがって 2. と同様に

$$\bar{\phi}(r, \theta, z, t) = j\omega \phi(r, z) \cos \theta e^{j\omega t} \quad (16)$$

$$\bar{h}(r, \theta, t) = h(r) \cos \theta e^{j\omega t} \quad (17)$$

$$\bar{p}(r, \theta, z, t) = p(r, z) \cos \theta e^{j\omega t} \quad (18)$$

と表わすことができる. したがって式 (12), (13), (14) はつぎのようになる.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (19)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \quad (20)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=l} = h^u(r) \quad (21)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = h^l(r) \quad (22)$$

また動圧は式 (15) よりつぎのように表わすことができる.

$$p = -\omega^2 \rho_f \phi \quad (23)$$

3.3 基礎式の解

式 (19), (20) を満足する速度ポテンシャル ϕ はつぎのように表わすことができる.

$$\phi(r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(r, z) \quad (24)$$

ここに

$$\phi_i(r, z) = J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right) \left\{ A_i \cosh\left(\varepsilon_i \frac{z}{R}\right) + B_i \sinh\left(\varepsilon_i \frac{z}{R}\right) \right\} \quad (25)$$

上式中 ε_i は $J_1'(\varepsilon) = 0$ の第 i 番目の正根であり, 1 次の場合 $\varepsilon_1 \approx 1.841$ である.

上式を境界条件式 (21), (22) に代入すると

$$-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{R} J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right) \left\{ A_i \sinh\left(\varepsilon_i \frac{l}{R}\right) + B_i \cosh\left(\varepsilon_i \frac{l}{R}\right) \right\} = h^u(r) \quad (26)$$

$$-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{R} J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right) B_i = h^l(r) \quad (27)$$

ここで $h(r)$ を直交固有関数系 $J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right)$ を用いて展開するとつぎのようになる.

$$h(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_0^R h(r) J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right) r dr}{\int_0^R \left\{ J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right) \right\}^2 r dr} J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right) \quad (28)$$

$h^u(r), h^l(r)$ を式 (28) を用いて展開したものを式 (26),

(27) に代入し, 両辺で $J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right)$ の係数を等置して A_i, B_i を求めるとつぎのようになる.

$A_i =$

$$\frac{\cosh\left(\varepsilon_i \frac{l}{R}\right) \int_0^R h^l(r) J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right) r dr - \int_0^R h^u(r) J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right) r dr}{\left(\frac{\varepsilon_i}{R}\right) \sinh\left(\varepsilon_i \frac{l}{R}\right) \int_0^R \left\{ J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right) \right\}^2 r dr} \quad (29)$$

$$B_i = -\frac{\int_0^R h^l(r) J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right) r dr}{\left(\frac{\varepsilon_i}{R}\right) \int_0^R \left\{ J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right) \right\}^2 r dr} \quad (30)$$

3.4 m 次振動

系が m 次の振動をしている場合について考えると、要素の上端および下端における液体変位 $h^u(r)$, $h^l(r)$ は各々つぎのように表わすことができる。

$$h^u(r) = H^u J_1\left(\varepsilon_m \frac{r}{R}\right) \quad (31)$$

$$h^l(r) = H^l J_1\left(\varepsilon_m \frac{r}{R}\right) \quad (32)$$

ここで H^u , H^l は各々要素の上端および下端における液体変位の振幅に相当するものである。

このとき速度ポテンシャル ϕ は m 次のものだけが卓越して表われるから式 (24), (25) よりつぎようになる。

$$\phi(r, z) = J_1\left(\varepsilon_m \frac{r}{R}\right) \left\{ A_m \cosh\left(\varepsilon_m \frac{z}{R}\right) + B_m \sinh\left(\varepsilon_m \frac{z}{R}\right) \right\} \quad (33)$$

この場合、式 (31), (32) を式 (29), (30) に代入すると、 A_m , B_m はそれぞれ H^u , H^l の線形結合としてつぎのように表わされる。

$$A_m = \mathbf{A}(m) \mathbf{H} \quad (34)$$

$$B_m = \mathbf{B}(m) \mathbf{H} \quad (35)$$

ここに $\mathbf{A}(m)$, $\mathbf{B}(m)$ は行ベクトル、 \mathbf{H} は列ベクトルでありそれぞれつぎの内容をもつ

$$\mathbf{A}(m) = \left(-\frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_m}{R}\right) \sinh\left(\varepsilon_m \frac{l}{R}\right)}, \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_m}{R}\right) \tanh\left(\varepsilon_m \frac{l}{R}\right)} \right) \quad (36)$$

$$\mathbf{B}(m) = \left(0, -\frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_m}{R}\right)} \right) \quad (37)$$

$$\mathbf{H} = (H^u, H^l)^T \quad (38)$$

式 (34), (35) を式 (33) に代入すると ϕ は H^u , H^l の線形結合としてつぎのように表わされる。

$$\phi(r, z) = J_1\left(\varepsilon_m \frac{r}{R}\right) \left\{ \mathbf{A}(m) \cosh\left(\varepsilon_m \frac{z}{R}\right) + \mathbf{B}(m) \sinh\left(\varepsilon_m \frac{z}{R}\right) \right\} \mathbf{H} \quad (39)$$

したがって要素内部の動圧は式 (23) を用いると式 (31), (32) と類似の関係としてつぎのように表わすことができる。

$$p(r, z) = P(z) J_1\left(\varepsilon_m \frac{r}{R}\right) \quad (40)$$

ここで $P(z)$ は動圧の振幅に相当するものであり、次式で与えられる

$$P(z) = -\omega^2 \rho_f \left\{ \mathbf{A}(m) \cosh\left(\varepsilon_m \frac{z}{R}\right) + \mathbf{B}(m) \sinh\left(\varepsilon_m \frac{z}{R}\right) \right\} \mathbf{H} \quad (41)$$

要素の上端と下端における動圧の振幅を各々 P^u , P^l とすると

$$P^u = P(l) = -\omega^2 \rho_f \left\{ \mathbf{A}(m) \cosh\left(\varepsilon_m \frac{l}{R}\right) + \mathbf{B}(m) \sinh\left(\varepsilon_m \frac{l}{R}\right) \right\} \mathbf{H} \quad (42)$$

$$P^l = p(0) = -\omega^2 \rho_f \mathbf{A}(m) \mathbf{H} \quad (43)$$

式 (42), (43) を用いて動圧振幅 $\mathbf{P} = (P^u, P^l)^T$ と変位振幅 $\mathbf{H} = (H^u, H^l)^T$ の関係を表わす要素の剛性行列 \mathbf{K} を求めるとつぎようになる。

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{H} \quad (44)$$

ここに

$$\mathbf{K} = \omega^2 \rho_f \begin{pmatrix} \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_m}{R}\right) \tanh\left(\varepsilon_m \frac{l}{R}\right)} & -\frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_m}{R}\right) \sinh\left(\varepsilon_m \frac{l}{R}\right)} \\ \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_m}{R}\right) \sinh\left(\varepsilon_m \frac{l}{R}\right)} & -\frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_m}{R}\right) \tanh\left(\varepsilon_m \frac{l}{R}\right)} \end{pmatrix} \quad (45)$$

式 (44) を変形して節点 u の状態量 $\mathbf{X}^u = (P^u, H^u)^T$ と節点 l の状態量 $\mathbf{X}^l = (P^l, H^l)^T$ の関係を示す要素伝達行列 \mathbf{F} を求めるとつぎようになる。

$$\mathbf{X}^u = \mathbf{F} \mathbf{X}^l \quad (46)$$

ここに

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f} \mathbf{A} \quad (47)$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \cosh \varepsilon_m \gamma & R \sinh \varepsilon_m \gamma \\ \frac{\sinh \varepsilon_m \gamma}{R} & \cosh \varepsilon_m \gamma \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2 \rho_f}{\varepsilon_m} \end{pmatrix} \quad (49)$$

上式中 γ は要素の形状を示すパラメータであり

$$\gamma = \frac{l}{R} \quad (50)$$

4. 節点伝達行列の誘導

節点 i では図 4 に示すように一般には要素の半径が異なるので階段状になる。したがってこの点では要素 $i+1$ の下端の状態量 \mathbf{X}_{i+1}^l と要素 i の上端の状態量 \mathbf{X}_i^u をそのまま結合することはできない。そこで節点 i で状態量を伝達する場合に、要素が連続している場合と等価になるように状態量を補正する必要がある。この条件はい

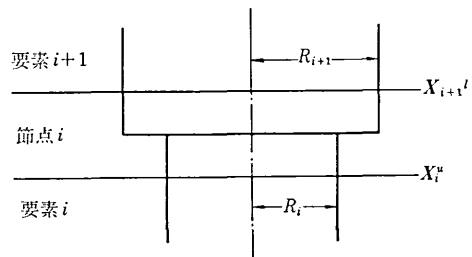


図 4 節点における伝達

研究速報
くつかの数値実験を参考にしてつぎの二つの条件により満足されると考えた。

- 1) 要素 $i+1$ の下端と要素 i の上端で液体の流入、流出量が等しい(連続の条件)。

$$\iint_{(S_2)_{i+1}} \bar{h}_{i+1}(r, \theta, t) r dr d\theta = \iint_{(S_2)_i} \bar{h}_i(r, \theta, t) r dr d\theta \quad (51)$$

- 2) 要素 $i+1$ の下端と要素 i の上端で動圧が等しい。この条件は次式で近似的に満足される。

$$\left. \frac{d\{\bar{p}_{i+1}(r, \theta, t)\}}{dr} \right|_{r=0} = \left. \frac{d\{\bar{p}_i(r, \theta, t)\}}{dr} \right|_{r=0} \quad (52)$$

式 (51), (52) に式 (17), (18) と式 (31), (32), (40) の関係を用いて変形するとつぎの二つの式を得る。

$$H_{i+1} = \left(\frac{R_i}{R_{i+1}} \right)^2 H_i \quad (53)$$

$$P_{i+1} = \frac{R_{i+1}}{R_i} P_i \quad (54)$$

したがって節点 i における状態量の伝達関係を表わす節点伝達行列 N_i はつぎの形で与えられる。

$$X_{i+1} = N_i X_i \quad (55)$$

ここに

$$N_i = A^{-1} n_i A \quad (56)$$

$$n_i = \begin{pmatrix} k_i & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_i^2} \end{pmatrix} \quad (57)$$

上式中 k_i は節点 i における要素半径の拡大率を表わす係数であり

$$k_i = \frac{R_{i+1}}{R_i} \quad (58)$$

5. 系の伝達行列の誘導および固有振動数の算出

要素 i に対して次式が成立する。

$$X_i = F_i X_i \quad (59)$$

節点 i に対して次式が成立する。

$$X_{i+1} = N_i X_i \quad (60)$$

式 (59), (60) の関係をくり返し用いると系全体の伝達行列 M をつぎの形で得ることができる。

$$X_n = M X_0 \quad (61)$$

ここに

$$M = A^{-1} m A = \begin{pmatrix} m_{11} & \frac{\omega^2 \rho_f m_{12}}{\varepsilon_m} \\ \frac{\varepsilon_m}{\omega^2 \rho_f} m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$m = \prod_{i=1}^n [n_i f_i] \quad (n_n = I) \quad (63)$$

つぎに系の境界条件を考慮する。

系の底面の境界条件式 (9) を節点 0 の状態量を用いて

表わすと

$$H_0 = 0 \quad (64)$$

系の自由表面の境界条件式 (10) を節点 n の状態量を用いて表わすと

$$P_n = \rho_f g H_n \quad (65)$$

式 (61) に式 (64), (65) の関係を用いると

$$\rho_f g H_n = M_{11} P_0 \quad (66)$$

$$H_n = M_{21} P_0 \quad (67)$$

上の二つの式から次式を得る。

$$\rho_f g M_{21} = M_{11} \quad (68)$$

上式に式 (62) の関係を用いると

$$\rho_f g \frac{\varepsilon_m}{\omega^2 \rho_f} m_{21} = m_{11} \quad (69)$$

したがって系の円筒固有振動数は次式により与えられる。

$$\omega^2 = g \varepsilon_m \frac{m_{21}}{m_{11}} \quad (70)$$

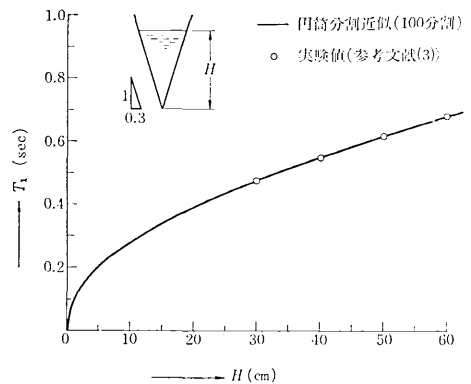


図5 円筒容器内の液体の1次の液面動揺固有周期

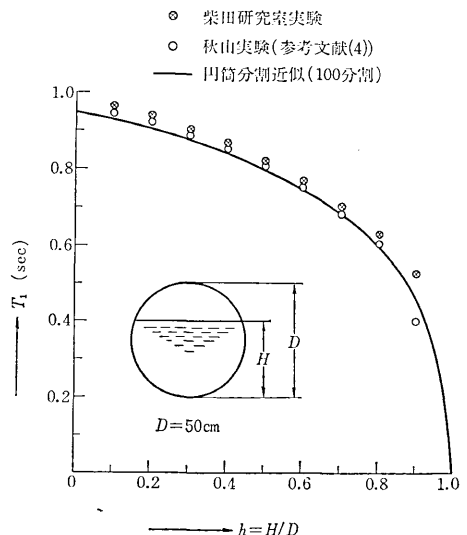


図6 球型容器内の液体の1次の液面動揺固有周期

(P. 35 へつづく)

22~23 μm のものが全体の約 1/3 を占め両側に 23 μm を中心として 3 μm の幅で分布し、これ以外のものは見当らない。しかしこの幅をさらにせまくすることができれば、理論段数がさらに大きく値をとりうるものと思われる。

また表面積については、ほぼ他の同じような吸着剤、例えば Amberlite XAD-1 と、同様の値であるが、孔径分布は 40 \AA 付近に集中し、溶積で膨潤した時には、さらに孔径が小さくなることが予想されるので、比較的分子量の大きい物質については、ゲルの表面のみが分離に関与しているものと思われる。

また N_2 の吸着速度がきわめて遅いのは、ゲルの表面が、不活性な性質を持っていることを示し、NMR³⁾ による水の非吸着の結果とよく一致する。

クロマトグラフィーの溶離挙動については、ここにえらんだ試料(ベンジルアルコール、ベンゼン、ナフタリン、アントラセン)の溶離順序は、流速、温度、溶離液の組成を変化させても、変化なく、すべてベンジルアルコール、ベンゼン、ナフタレン、アントラセンの順であった。

カラム温度の影響は、20°C から 60°C までの間では、高温になるほど、溶離時間 t_R (または溶離容積 V_R) が

速くなり、特に後に溶出する物質ほどその影響は著しい。またこの系では、高温になるほど高い理論段数(N)が得られた。これは低温の時にくらべて収着機構が単純になるためと思われる。

つぎにメタノール、水の混合割合を変化した場合、水の含量の多いほど、すなわち溶離液の誘電率(ϵ)の大きいほど、溶離時間が遅くまた理論段数(N)も小さい。したがって、吸着機構が同じような物質の分離には、水の添加はあまりよい結果を与えない。

最後に流速の影響については、0.5 ml/min~2 ml/min の内で V_R の差はあまり大きくないが、理論段数に与える影響は比較的大きい。したがってこの系で流速がクロマトグラムに与える影響は、ほとんど得られるクロマトグラムのピークの幅の広がりについてのみである。

しかし t_R (溶離時間) は、流速を大きくした方が当然早く得ることができる。(1974年5月22日受理)

文 献

- 1) 高井, 山辺: 分析機器, 10 153 (1972)
- 2) 山辺: 化学教育, 21, 181 (1973)
- 3) 山辺: フェルマシア, 8, 512 (1972)
- 4) 山辺: Hitachi S. I. news 15 No. 5, 10 (1972)
- 5) 梅沢, 山辺: 日化 1973 秋, 特別討論会

(P. 28 よりつづく)

6. 数値計算および実験との比較

上記の手法を用いて行った数値計算の結果と実験結果を比較したものを示す。

図5, 図6は各々円錐容器および球型容器内の液体の1次の液面動揺の固有周期を計算したものである。これらの図より理論計算結果と実験結果は良く一致していることが分る。

数値計算は FACOM 230/55 を用いて行った。図5, 図6の場合ともに要素分割数 100 で水深 5 cm 毎に固有周期を計算したが計算時間は両方合わせて約 5 秒であった。

7. ま と め

軸対称剛体容器内の液体の液面動揺の固有周期を評価する手法を開発し、これを用いて数値計算を行い実験結

果と比較したが良く一致した。この手法を用いると液面動揺の固有周期の計算が非常に簡便かつ迅速に行なえることが実証されたので液体貯槽の耐震設計に有用であると考えられる。

おわりに終始御指導いただいた柴田碧教授はじめ有益な御討論をいただいた柴田研究室の皆様へ深く感謝申し上げます。(1974年4月25日受理)

参 考 文 献

- 1) 曾我部: 流体容器の防振・耐震に対する基礎的研究, 東京大学大学院工学系研究科修士論文, (昭 46.3)
- 2) 曾我部, 柴田: 流体・弾性系の固有値解析, 機械学会講演論文集, No. 710-12, (1971.10), p. 167
- 3) 武藤清: 構造物の動的解析, (昭 43.8), p. 154, 丸善
- 4) 通産省: LPG タンクの耐震性に関する研究, 第 13 回高圧ガス及び火薬類保安審議会高圧ガスプラント地震対策分科会資料, (昭 48.10), p. 18