

梁理論の精密化に関する二、三の試み (その 5)

Some Attempts on the Refinement of Modern Engineering Theory of Beams (V)

—梁の剪断変形理論 (続)—

—Shear Deformation Theory of Beam (continued)—

川井 忠彦*・藤谷 義信*

Tadahiko KAWAI and Yoshinobu FUJITANI

前号において、梁の剪断変形理論の体系が形成される過程について概観し、従来の理論の限界とその修正理論の定式化について論じた。本号においては、薄肉断面梁について従来から行われている剪断流解析、および本解説 (その 3) で振り解析の場合に紹介した逐次近似解法の応用について解説し、次の中実断面でも薄肉断面でも適用可能な有限要素法による剪断変形解析を紹介する。

1. 応力法による薄肉梁の剪断変形解析

前号で任意形状断面梁の剪断変形解析は 2 次元の場合でも一般に厳密解を求めることはほとんど不可能であるが、薄肉梁の場合は剪断流の考えを導入することによってかなり解析が簡単化され、次に示すような剪断流 $q = \tau t$ に対する計算公式が得られることを述べた。

$$q = \frac{\rho S(s)}{A} - \frac{V_x S_x(s)}{I_{xx}} - \frac{V_y S_y(s)}{I_{yy}} + \frac{M_x \omega(s)}{I_{\omega(s)}} + q^{(1)} \quad (5.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} q^{(1)} \text{ は不静定剪断流を表わし、また} \\ S(s) = \int_0^s t(s) ds, \quad S_x(s) = \int_0^s x(s) t(s) ds \\ S_y(s) = \int_0^s y(s) t(s) ds, \quad S_{\omega}(s) = \int_0^s \omega(s) t(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

である。薄肉閉断面材の場合には不静定剪断流 $q^{(1)}$ はゼロとおけるが、閉断面材の場合には断面が閉じているという条件から $q^{(1)}$ を定めなければならない。単一連結の閉断面材の場合には、前号 (4.74) 式を用いて陽に剪断応力分布を決定することができる。しかしながら、多隔壁閉断面材の場合は振りの場合と同様に不静定次数だけの $q^{(1)}$ が存在し、その次数に相当する連立 1 次方程式を解いて $q^{(1)}$ を決定しなければならない。その計算要領は振りの場合について詳しく説明したのでここでは簡単にその要点だけを記すことにする。

まず、図 5.1 に示すような n 個の部屋からなる薄肉閉断面に n 個のカットを入れて閉断面の静定構造を作る。

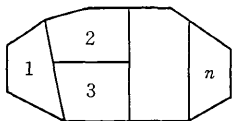


図 5.1 n 室薄肉閉断面

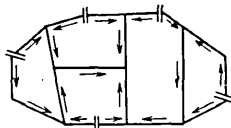


図 5.2 静定剪断流

そして断面をいくつかの薄肉要素に分割し、カット部より出発するように節点番号をつける (図 5.2 参照)。

(i) 静定剪断流

$i j$ 要素の静定剪断応力 $\tau_{ij}^{(0)}(s)$ は (5.1) 式より次のように計算される。

$$\tau_{ij}^{(0)} = \frac{\rho}{A} \left(\frac{S^{ij}(s)}{l_{ij}} \right) - \frac{V_x}{I_{xx}} \left(\frac{S_x^{ij}(s)}{l_{ij}} \right) - \frac{V_y}{I_{yy}} \left(\frac{S_y^{ij}(s)}{l_{ij}} \right) + \frac{M_x \omega(s)}{I_{\omega(s)}} \left(\frac{S_{\omega}^{ij}(s)}{l_{ij}} \right) \quad (0 \leq s \leq l_{ij}) \quad (5.3)$$

ここに、 $S^{ij}(s)$ 、 $S_x^{ij}(s)$ 、 $S_y^{ij}(s)$ 、 $S_{\omega}^{ij}(s)$ はそれぞれ次の公式を用いて計算される。

$$S^{ij}(s) = S_i + \int_0^s t_{ij} ds = \sum_{pq} l_{pq} t_{pq} + t_{ij} s \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} S_x^{ij}(s) &= S_{x_i} + \int_0^s \left\{ \left(1 - \frac{s}{l_{ij}} \right) x_i + \frac{s}{l_{ij}} x_j \right\} t_{ij} ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{pq} (x_p + x_q) l_{pq} t_{pq} + \left\{ s \left(1 - \frac{s}{2l_{ij}} \right) x_i + \frac{s^2}{2l_{ij}} x_j \right\} t_{ij} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} S_y^{ij}(s) &= S_{y_i} + \int_0^s \left\{ \left(1 - \frac{s}{l_{ij}} \right) y_i + \frac{s}{l_{ij}} y_j \right\} t_{ij} ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{pq} (y_p + y_q) l_{pq} t_{pq} + \left\{ s \left(1 - \frac{s}{2l_{ij}} \right) y_i + \frac{s^2}{2l_{ij}} y_j \right\} t_{ij} \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} S_{\omega}^{ij}(s) &= S_{\omega_i} + \int_0^s \left\{ \left(1 - \frac{s}{l_{ij}} \right) \omega_i + \frac{s}{l_{ij}} \omega_j \right\} t_{ij} ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{pq} (\omega_p + \omega_q) l_{pq} t_{pq} + \left\{ s \left(1 - \frac{s}{2l_{ij}} \right) \omega_i + \frac{s^2}{2l_{ij}} \omega_j \right\} t_{ij} \end{aligned} \quad (5.7)$$

ただし、 $0 \leq s \leq l_{ij}$ であり、これらの公式は要素内板厚 (t_{pq}) 一定として計算されたものである。

(ii) 不静定剪断流

n 個の閉路に沿う不静定剪断流 $q_m^{(1)}$ ($m=1, 2, 3, \dots, n$) を用いて、次のような要素 $i j$ の不静定剪断応力 $\tau_{ij}^{(1)}$

* 東京大学生産技術研究所 第 2 部

を得る.

$$\tau_{ij}^{(1)} = \{B_{ij}\} \{X\} \quad (5.8)$$

ここに, $\{X\}^T = (q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \dots, q_m^{(1)})$ であり, また $\{B_{ij}\}$ マトリックスは, ij 要素がその閉路に沿うときは板厚の逆数 $\pm 1/t_{ij}$ を, また関係しない閉路については 0 となる成分をもつ行ベクトルである. $\pm 1/t_{ij}$ の符号はその不静定剪断流が静定剪断流と同方向のときは正, 反対方向のときは負とする.

いま, ij 要素の剪断応力 $\tau_{ij}(s)$ を求めてみると, (5.1), (5.3) および (5.8) 式より次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(s) = & \frac{\rho}{A} \left(\frac{S^{ij}(s)}{t_{ij}} \right) - \frac{V_x}{I_{xx}} \left(\frac{S_x^{ij}(s)}{t_{ij}} \right) - \frac{V_y}{I_{yy}} \left(\frac{S_y^{ij}(s)}{t_{ij}} \right) \\ & + \frac{M_x^0}{I_x^0} \left(\frac{S_{\omega}^{ij}(s)}{t_{ij}} \right) + \{B_{ij}\} \{X\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

以後のマトリックス演算を簡単化するため, この式を次のように書きかえておく.

$$\tau_{ij}(s) = \{S_{ij}(s)\} \{F\} + \{B_{ij}\} \{X\} \quad (5.10)$$

ここに,

$$\{S_{ij}(s)\} = \left[\frac{S^{ij}(s)}{t_{ij}}, -\frac{S_x^{ij}(s)}{t_{ij}}, -\frac{S_y^{ij}(s)}{t_{ij}}, \frac{S_{\omega}^{ij}(s)}{t_{ij}} \right] \quad (5.11)$$

$$\{F\}^T = \left[\frac{\rho}{A}, \frac{V_x}{I_{xx}}, \frac{V_y}{I_{yy}}, \frac{M_x^0}{I_x^0} \right] \quad (5.12)$$

である.

さて, 断面の有する歪エネルギー V は次式のように与えられる.

$$V = \sum_{ij} \iint \frac{\tau_{ij}^2}{2G} dA \quad (5.13a)$$

(5.10) 式を (5.13a) 式に代入すれば次のようになる.

$$\begin{aligned} V = & \sum_{ij} \int_0^{l_{ij}} \frac{1}{2G} (\{X\}^T \{B_{ij}\}^T + \{F\}^T \{S_{ij}(s)\}^T \\ & \times (\{B_{ij}\} \{X\} + \{S_{ij}(s)\} \{F\}) t_{ij} ds \end{aligned} \quad (5.13b)$$

さて, Castigliano の第 1 定理より, n 個のカットの相対変位を成分とする変位ベクトルを $\{\delta\}$ とすれば,

$$\begin{aligned} \{\delta\} = & \frac{\partial V}{\partial X} = \sum_{ij} \int_0^{l_{ij}} \frac{1}{G} \{B_{ij}\}^T (\{B_{ij}\} \{X\} \\ & + \{S_{ij}(s)\} \{F\}) t_{ij} ds \end{aligned} \quad (5.14)$$

という式が得られる. したがって, 閉断面の条件 $\{\delta\} = 0$ を考慮すると, 不静定剪断流 $\{X\}$ を決める次のマトリックス方程式が得られる.

$$\{D_{11}\} \{X\} + \{D_{10}\} \{F\} = 0 \quad (5.15)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \{D_{11}\} = & \sum_{ij} \int_0^{l_{ij}} \{B_{ij}\}^T \{B_{ij}\} t_{ij} ds \\ = & \sum_{ij} \{B_{ij}\}^T \{B_{ij}\} t_{ij} l_{ij} \\ \{D_{10}\} = & \sum_{ij} \int_0^{l_{ij}} \{B_{ij}\}^T \{S_{ij}(s)\} t_{ij} ds \\ = & \sum_{ij} \{B_{ij}\}^T \{T_{ij}\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\{T_{ij}\} = \int_0^{l_{ij}} \{S_{ij}(s)\} t_{ij} ds \quad \Bigg\}$$

したがって,

$$\{X\} = -\{D_{11}^{-1}\} \{D_{10}\} \{F\} \quad (5.17)$$

と決定される. ところで, 行マトリックス $\{T_{ij}\}$ は, 次のように計算される.

$$\begin{aligned} \{T_{ij}\} = & \{T^{ij}, T_x^{ij}, T_y^{ij}, T_{\omega}^{ij}\} \\ T^{ij} = & \sum_{pq} l_{pq} t_{pq} l_{ij} + \frac{1}{2} t_{ij} l_{ij}^2 \\ T_x^{ij} = & \frac{1}{2} \sum_{pq} (x_p + x_q) l_{pq} t_{pq} l_{ij} + \frac{1}{6} (2x_i + x_j) t_{ij} l_{ij}^2 \\ T_y^{ij} = & \frac{1}{2} \sum_{pq} (y_p + y_q) l_{pq} t_{pq} l_{ij} + \frac{1}{6} (2y_i + y_j) t_{ij} l_{ij}^2 \\ T_{\omega}^{ij} = & \frac{1}{2} \sum_{pq} (\omega_p + \omega_q) l_{pq} t_{pq} l_{ij} + \frac{1}{6} (2\omega_i + \omega_j) t_{ij} l_{ij}^2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

(iii) 剪断応力分布 $\tau(s)$ の決定

不静定剪断流が (5.17) 式より求まると, (5.10) 式で与えられる ij 要素の剪断応力は次のように求められる.

$$\tau_{ij}(s) = (\{S_{ij}(s)\} - \{B_{ij}\} \{D_{11}^{-1}\} \{D_{10}\}) \{F\} \quad (5.19)$$

そして, 要素の中央点における剪断応力の値を求めたい場合は次のように計算すればよい.

$$\tau_{ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right) = \left(\left[\{S_{ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right) \right] - \{B_{ij}\} \{D_{11}^{-1}\} \{D_{10}\} \right) \{F\} \quad (5.20)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \left[\{S_{ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right) \right] = & \left[S^{ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right), -S_x^{ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right), -S_y^{ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right), \right. \\ & \left. S_{\omega}^{ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right) \right] \frac{1}{t_{ij}} \\ S^{ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right) = & \sum_{pq} l_{pq} t_{pq} + \frac{1}{2} l_{ij} t_{ij} \\ S_x^{ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right) = & \frac{1}{2} \sum_{pq} (x_p + x_q) l_{pq} t_{pq} \\ & + \frac{1}{8} (3x_i + x_j) l_{ij} t_{ij} \\ S_y^{ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right) = & \frac{1}{2} \sum_{pq} (y_p + y_q) l_{pq} t_{pq} \\ & + \frac{1}{8} (3y_i + y_j) l_{ij} t_{ij} \\ S_{\omega}^{ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right) = & \frac{1}{2} \sum_{pq} (\omega_p + \omega_q) l_{pq} t_{pq} \\ & + \frac{1}{8} (3\omega_i + \omega_j) l_{ij} t_{ij} \end{aligned} \quad (5.21)$$

2. 逐次近似解法による多隔壁梁の剪断変形解析

本解説 (その 3) において多隔壁断面の捩り問題に対する逐次近似解法を紹介したが, 再び Bruhn に従って, この方法は梁の剪断変形解析にまで拡張応用するこ

とができることを以下に述べてみよう³⁾。

解法の原理は前節ですでに説明したように、 n 室閉断面の各室(Cell)にそれぞれ1ヵ所づつ適当な位置にカットを入れ、静定剪断流 $q^{(0)}$ を前節で述べた方法に従って決定する。次いで各室に導入される不静定剪断流 q_1, q_2, \dots, q_n を各切口における両端面の相対変位がゼロになるように逐次近似的に決定するのである。すなわち図 5.3(a) のような3室閉断面の剪断応力分布を求める問題を考える。

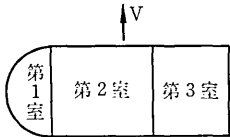


図 5.3(a) 3室断面梁の剪断変形解析

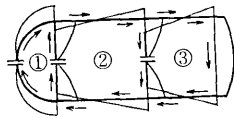


図 5.3(b) 静定剪断流 q_0 の計算

(i) この3室閉断面に3個のカットを入れ静定構造とし静定剪断流 $q^{(0)}$ を計算する。(第0近似)

(ii) 各室を互いに切り離して独立であるとして、各室内の静定剪断流 $q_m^{(0)}$ による切口の相対変位を打ち消すように各室の不静定剪断流 $q_m^{(1)}$ ($m=1, 2, 3$) を決定する。(第1近似)

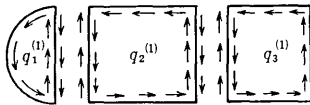


図 5.3(c) 第1近似不静定剪断流 $q_m^{(1)}$ の決定

(iii) 各隔壁上に働く第1近似不静定剪断流 $q_m^{(1)}$ が各室に生ぜしめる振りを打ち消すに必要な第2近似不静定剪断流 $q_m^{(2)}$ を計算する。(第2近似)

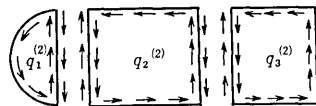


図 5.3(d) 第2近似不静定剪断流 $q_m^{(2)}$ の決定

(iv) 各隔壁上に働く第2近似不静定剪断流 $q_m^{(2)}$ が各室に生ぜしめる振りを打ち消すに必要な第3近似不静定剪断流 $q_m^{(3)}$ を計算する。(第3近似)

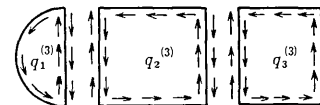


図 5.3(e) 第3近似不静定剪断流 $q_m^{(3)}$ の決定

(v) 以上の計算を付加不静定剪断流 $q_m^{(N)}$ (第 N 近似) が十分小さくなるまでくり返す。実際にはこの計算の収束性は良好で数回のくり返し計算で所要の精度が得られる。

さて、以上の計算結果を用いると各室の不静定剪断流 q_m は次のようにして求まる。

$$q_m = \sum_{i=1}^N q_m^{(i)} \quad (5.22)$$

したがって、最終的に得られる各隔壁の剪断流 q は次式で与えられる。

$$q = q^{(0)} + q_1 + q_2 + q_3 \quad (5.23)$$

ただし、この式の不静定剪断流 q_m の項は、その隔壁が関係する室の q_m のみ和をとることを意味する。

以上において、多隔壁閉断面梁の内部に生ずべき不静定剪断流の計算方法についてあらずしを説明したので、次に実際の計算を行なうときに必要となる公式を導くことにしよう。

図 5.3(f) は第2室を切り離して、その内部を流れる剪断流分布を示したものである。すなわち第2室内には静定剪断流 $q_2^{(0)}$ と不静定剪断流 q_2 の他に、第1室との隔壁および第3室との隔壁内を流れる不静定剪断流 q_1 と q_3 が存在する。そしてこれらの剪断流が作用するときに第2室には振りが生じないはずである。したがって、

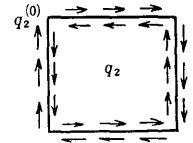


図 5.3(f) 第2室における剪断流分布

$$\oint \gamma ds = 0 \quad (5.24)$$

が成立しなければならない。この式は、 $\gamma = \tau/G = q/Gt$ であるから、次のように変形される。

$$\oint \frac{q}{t} ds = 0 \quad (5.25)$$

そこで、この式を第2室の剪断流にあてはめて計算すると次のような式が得られる。

$$\left(\sum q_2^{(0)} \frac{l}{t} \right)_{\text{②}} - q_2 \left(\sum \frac{l}{t} \right)_{\text{②}} + q_1 \left(\frac{l}{t} \right)_{\text{web 1-2}} + q_3 \left(\frac{l}{t} \right)_{\text{web 2-3}} = 0 \quad (5.26)$$

ここに②は第2室全周にわたって総和をとることを意味し、web 1-2, web 2-3 はその隔壁でのみ計算することを表わす。ここでもちろん l は隔壁の長さ、 t はその板厚を表わしている。(5.26)式を q_2 について解くと、

$$q_2 = \frac{\left(\sum q_2^{(0)} \frac{l}{t} \right)_{\text{②}} + \left(\frac{l}{t} \right)_{\text{web 1-2}} q_1 + \left(\frac{l}{t} \right)_{\text{web 2-3}} q_3}{\left(\sum \frac{l}{t} \right)_{\text{②}}} \quad (5.27)$$

となる。右辺の第1項は静定剪断流 $q_2^{(0)}$ の全周にわたっての平均値を表わすが、これは物理的には静定剪断流 $q_2^{(0)}$ による第2室の振りを打ち消すべき不静定剪断流の第1近似 $q_2^{(1)}$ であると考えられる。また、第2項および第3項はそれぞれ隔壁 1-2, 2-3 に作用する不静定剪断流 q_1 および q_3 の影響による振りを相殺するために加えるべき全周に沿って流れる一定の剪断流を表わしている。そして q_1 の前の比率は第1室から第2室への分配影響係数 (carry over influence factor) と呼び、記号 C_{1-2} で表わすものとする。同様にして q_3 の前の

比率は第3室から第2室への分配影響係数で、 C_{3-2} で表わされる。したがって、(5.27)式は次のように書くことができる。

$$q_2 = q_2^{(1)} + C_{1-2} q_1 + C_{3-2} q_3 \quad (5.28)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} q_2^{(1)} &= \frac{\left(\sum q_2^{(0)} \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{2}}}{\left(\sum \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{2}}} \\ C_{1-2} &= \frac{\left(\frac{L}{t}\right)_{\text{web } 1-2}}{\left(\sum \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{2}}}, \quad C_{3-2} = \frac{\left(\frac{L}{t}\right)_{\text{web } 3-2}}{\left(\sum \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

すでに述べたように、 $q_2^{(1)}$ は第1室と第3室の不静定剪断流がゼロの場合、第2室の振りを打ち消すために必要な全周にわたり一定な剪断流であるから、これは第2室を独立に考えた場合の不静定剪断流の第1近似解となる。このようにしてまず各室を互いに分離して不静定剪断流の第1近似解として次式をとる。

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(1)} &= \frac{\left(\sum q_1^{(0)} \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{1}}}{\left(\sum \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{1}}} \\ q_2^{(1)} &= \frac{\left(\sum q_2^{(0)} \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{2}}}{\left(\sum \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{2}}} \\ q_3^{(1)} &= \frac{\left(\sum q_3^{(0)} \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{3}}}{\left(\sum \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{3}}} \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

次いで、(5.28)式などを用いて、第2近似解は、

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(2)} &= q_1^{(1)} + C_{2-1} q_2^{(1)} \\ q_2^{(2)} &= q_2^{(1)} + C_{1-2} q_1^{(1)} + C_{3-2} q_3^{(1)} \\ q_3^{(2)} &= q_3^{(1)} + C_{2-3} q_2^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

となり、第3近似解は、

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(3)} &= q_1^{(2)} + C_{2-1} q_2^{(2)} \\ &= (1 + C_{1-2} C_{2-1}) q_1^{(1)} + 2C_{2-1} q_2^{(1)} \\ &\quad + C_{3-2} C_{2-1} q_3^{(1)} \\ q_2^{(3)} &= q_2^{(2)} + C_{1-2} q_1^{(2)} + C_{3-2} q_3^{(2)} \\ &= 2C_{1-2} q_1^{(1)} + (1 + C_{2-1} C_{1-2} + C_{2-3} C_{3-2}) q_2^{(1)} \\ &\quad + 2C_{3-2} q_3^{(1)} \\ q_3^{(3)} &= q_3^{(2)} + C_{2-3} q_2^{(2)} \\ &= C_{1-2} C_{2-3} q_1^{(1)} + 2C_{2-3} q_2^{(1)} \\ &\quad + (1 + C_{3-2} C_{2-3}) q_3^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

となる。以上の計算を所要の精度内に不静定剪断流 q_i が収束するまでくり返せばよいことになる。

さて、以上述べた計算法を図5.4(a)に示す3室閉断面に適用してみよう。まず静定剪断流は次式により計算

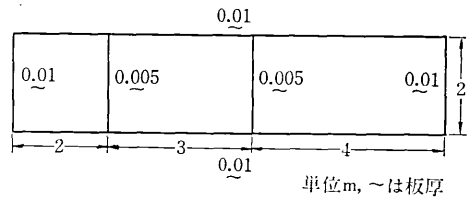


図 5.4(a) 3室閉断面

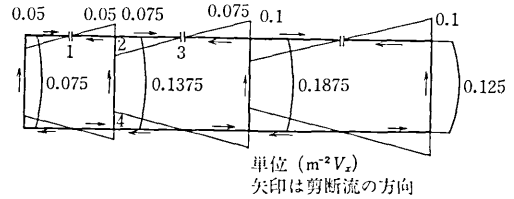


図 5.4(b) 静定剪断応力

することができる ((5.1)式および(その3)(3.8)式参照)。

$$\left. \begin{aligned} q^{(0)} &= -\frac{V_x S_x(s)}{I_{xx}}, \quad S_x(s) = \int_0^s x(s) t(s) ds \\ I_{xx} &= \frac{1}{3} \sum_{ij} (x_i^2 + x_i x_j + x_j^2) l_{ij} t_{ij} = 0.2 \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

たとえば、図5.4(b)に示した隔壁 $\vec{12}$, $\vec{32}$, $\vec{24}$ の静定剪断流を計算すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} q_{12}^{(0)} &= q_{32}^{(0)} = -\int_0^s (1 \times 0.01) ds \left(\frac{V_x}{0.2}\right) \\ &= -0.05 s V_x \\ q_{24}^{(0)} &= -0.05 \times 1 V_x - 0.05 \times 1.5 V_x \\ &\quad - \int_0^s \{(1-s) \times 0.005\} ds \left(\frac{V_x}{0.2}\right) \\ &= (-0.125 - 0.025 s + 0.0125 s^2) V_x \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

ただし、 s は要素の局所座標であり、たとえば(5.34)式で $q_{12}^{(0)}$ の計算式においては、 s は1点を原点とし、 $\vec{12}$ の方向にとった座標系である。(5.34)式と同様の計算を全断面について行なうと静定剪断応力が求まる。その計算結果を図5.4(b)に示す。

次に不静定剪断応力の計算をこの逐次近似解法で行なうにあたり、前述したような次の諸量を計算しておく。

$$\left. \begin{aligned} \left(\sum \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{1}} &= 3 \times \frac{2}{0.01} + \frac{2}{0.005} = 1000 \\ \left(\sum \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{2}} &= 2 \times \frac{3}{0.01} + 2 \times \frac{2}{0.005} = 1400 \\ \left(\sum \frac{L}{t}\right)_{\textcircled{3}} &= 2 \times \frac{4}{0.01} + \frac{2}{0.01} + \frac{2}{0.005} = 1400 \\ \left(\frac{L}{t}\right)_{1-2} &= \left(\frac{L}{t}\right)_{2-3} = \frac{2}{0.005} = 400 \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

これより分配影響係数は次のようになる。

$$C_{1-2} = \frac{400}{1400} = 0.286$$

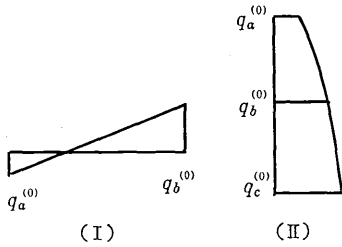


図 5.4(c) 剪断応力分布

$$\left. \begin{aligned} C_{2-1} &= \frac{400}{1000} = 0.4 \\ C_{2-3} &= \frac{400}{1400} = 0.286 \\ C_{3-2} &= \frac{400}{1400} = 0.286 \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

次に、不静定剪断流の第1近似解を決定するにあたり、 $(\sum q^{(0)} l/t)$ を各室で計算しておく必要がある。この値は厳密には $\int (q^{(0)}/t) ds$ で表わされるべきもので、静定剪断応力 $q^{(0)}$ が図 5.4(c)(I) のように線形に変化する要素(剪断荷重の方向に対して直角に位置する要素)については次の公式を用いればよい。

$$q^{(0)} \frac{l}{t} = \frac{1}{2} (q_a^{(0)} + q_b^{(0)}) \frac{l}{t} \quad (5.37 a)$$

また、図 5.4(c)(II) のように $q^{(0)}$ がパラボラ状に変化する要素(剪断荷重の方向に対して平行に位置する要素)については次の公式を用いればよい。

$$q^{(0)} \frac{l}{t} = \frac{1}{6} (q_a^{(0)} + 4q_b^{(0)} + q_c^{(0)}) \frac{l}{t} \quad (5.37 b)$$

ただし、この公式は要素内で板厚 t 一定の場合のみ成立することに注意されたい。また任意の方向に位置する要素については $\int (q^{(0)}/t) ds$ の積分を正しく行なえばよい。よって、以上の公式を用い、また不静定剪断流の符号を各室で反時計方向を正にとることによって、不静定剪断流の第1近似解は(5.30)式より次のように計算される。ただし $\times V_x$ は以下省略する。

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= \frac{(\sum q^{(0)} \frac{l}{t})_{\text{①}}}{(\sum \frac{l}{t})_{\text{①}}} \\ &= \left\{ \frac{1}{6} (-0.125 - 4 \times 0.1375 - 0.125) \times \frac{2}{0.005} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} (0.05 + 4 \times 0.075 + 0.05) \times \frac{2}{0.01} \right\} / 1000 \\ &= -0.04 \\ q_2^{(1)} &= \frac{(\sum q^{(0)} \frac{l}{t})_{\text{②}}}{(\sum \frac{l}{t})_{\text{②}}} \\ &= \left\{ \frac{1}{6} (-0.175 - 4 \times 0.1875 - 0.175) \times \frac{2}{0.005} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{6} (0.125 + 4 \times 0.1375 + 0.125) \\ &\quad \times \frac{2}{0.005} \Big/ 1400 \\ &= -0.01429 \\ q_3^{(1)} &= \frac{(\sum q^{(0)} \frac{l}{t})_{\text{③}}}{(\sum \frac{l}{t})_{\text{③}}} \\ &= \left\{ \frac{1}{6} (-0.1 - 4 \times 0.125 - 0.1) \times \frac{2}{0.01} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} (0.175 + 4 \times 0.1875 + 0.175) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{2}{0.005} \right\} / 1400 \\ &= 0.03571 \end{aligned} \quad (5.38 a)$$

そして、第2近似解は、(5.31)式より

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(2)} &= -0.04 + 0.4 \times (-0.01429) = -0.04571 \\ q_2^{(2)} &= -0.01429 + 0.286 \times (-0.04) \\ &\quad + 0.286 \times 0.03571 = -0.01551 \\ q_3^{(2)} &= 0.03571 \times 0.286 \times (-0.01429) = 0.03163 \end{aligned} \right\} \quad (5.38 b)$$

となる。さらに、第3近似解は(5.32)式より次のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(3)} &= (1 + 0.286 \times 0.4) \times (-0.04571) + 2 \times 0.4 \\ &\quad \times (-0.01551) + 0.286 \times 0.4 \times 0.03163 \\ &= -0.04620 \\ q_2^{(3)} &= 2 \times 0.286 \times (-0.04571) \\ &\quad + (1 + 0.4 \times 0.286 + 0.286 \times 0.286) \\ &\quad \times (-0.01551) + 2 \times 0.286 \times 0.03163 \\ &= -0.01831 \\ q_3^{(3)} &= 0.286 \times 0.286 \times (-0.04571) + 2 \\ &\quad \times 0.286 \times (-0.01551) \\ &\quad + (1 + 0.286 \times 0.286) \times 0.03163 \\ &= 0.03128 \end{aligned} \right\} \quad (5.38 c)$$

これらの逐次計算を組織的に行なう方法を表 5.1 に示す。この表により不静定剪断応力の第6近似解を求めた結果は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(6)} &= -0.04764 \\ q_2^{(6)} &= -0.01916 \\ q_3^{(6)} &= 0.03025 \end{aligned} \right\} \quad (5.38 d)$$

以上、静定剪断応力分布と不静定剪断応力分布が求めたので、これらの和をとることによって求めるべき剪断応力分布が得られる。この剪断応力分布を図 5.4(d) に

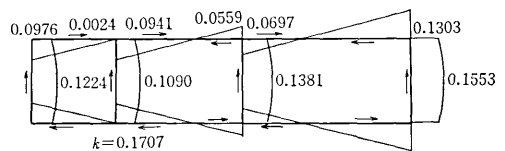


図 5.4(d) 静定剪断応力+不静定剪断応力

表 5.1 計算表 (逐次近似法)

$\Sigma q^{(n)}/l/t$	40	20	-50	
$\Sigma l/t$ (室)	1000	1400	1400	
l/t (web)	400	400		
C	0.286	0.4	0.286	0.286
$q_1^{(1)}$	-0.04	-0.01429		0.03571
C. O.	-0.00571	-0.01143	0.01020	-0.00408
C. O.	-0.00049	-0.00163	-0.00117	-0.00035
C. O.	-0.00112	-0.00014	-0.00010	-0.00080
C. O.	-0.00010	-0.00032	-0.00023	-0.00007
C. O.	-0.00022	-0.00003	-0.00002	-0.00016
Σ	-0.04764	-0.01916	0.03025	
厳密解	-0.04771	-0.01929	0.03020	

示す。

3. 有限要素法による梁の剪断変形解析

前号においては断面不変の仮定に基づく従来の剪断変形理論を紹介し、その支配する仮想仕事方程式は一般に (4.30) 式で与えられ、2次元化が可能の場合には (4.31) 式で与えられることを述べた。しかしながら、この剪断変形理論は不完全であって厳密な梁の剪断応力分布を求めることができないが、構造物理理想化の原理に基づく解析法に従えば有限要素法を用いて梁の精密な剪断変形解析ができることを述べた。そこで、本節ではこの方法について詳しく述べてみよう。

1) 2次元剪断応力解析

材料力学レベルの梁の剪断変形理論においては、ある断面に働く偏差軸応力 ($Z-p/A$), * 横剪断力 V_x, V_y および曲げ振りモーメント M_z^* と静的に等価な剪断応力分布を求めればよい。したがって梁のゆがみ $W_i(x, y)$ は座標 z に依存しないことになり、単位長さの梁について (4.30) 式より次のような $W_i(x, y)$ に関する仮想仕事方程式が成立する。

$$\delta \iint G \left\{ \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_i}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \iint \left\{ \left(Z - \frac{p}{A} \right) + \frac{V_x x}{I_{xx}} + \frac{V_y y}{I_{yy}} - \frac{M_z^* \omega_{ni}}{I_{\omega}^{(i)}} \right\} \times \delta W_i dx dy = 0 \quad (5.39)$$

この式より断面の剪断応力 ($\tau_{xz}^{(i)}, \tau_{yz}^{(i)}$) を決定することができる。この方程式を基礎とする有限要素解析法は本解説 (その3) の中で紹介した Saint-Venant の振り問題の有限要素解析法と同じである。すなわち、断面を図 5.5 に示すように要素 (図では三角形要素) の集合体

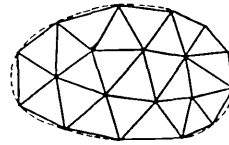


図 5.5 断面の要素分割図

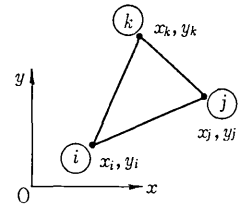


図 5.6 三角形要素

に理想化し、その剪断による要素のゆがみ関数 $W_i(x, y)$ を Saint-Venant の振り問題の場合の $\omega(x, y)$ と同じにとり有限要素法の標準的手法により定式化すればよい。以下に2次元剪断応力解析に用いる代表的な要素とその剛性方程式、剪断応力計算式のみ示しておく。これらは Saint-Venant の振り問題の三角柱要素、矩形柱要素、薄板要素にそれぞれ対応しており、(その3)の4.3節を参考にされたい。

2次元剪断応力解析に用いる代表的要素

(a) 三角形要素 (図 5.6 参照)

要素剛性方程式

$$G \times \begin{pmatrix} \frac{x_{kj}^2 + y_{jk}^2}{4A} & & \\ \frac{x_{kj}x_{ik} + y_{jk}y_{ki}}{4A} & \frac{x_{ik}^2 + y_{ki}^2}{4A} & \\ \frac{x_{kj}x_{ji} + y_{jk}y_{ij}}{4A} & \frac{x_{ik}x_{ji} + y_{ki}y_{ij}}{4A} & \frac{x_{ji}^2 + y_{ij}^2}{4A} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{SYM.} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} W_{ii} \\ W_{jj} \\ W_{kk} \end{pmatrix} = [A^{-1}]^T \begin{pmatrix} V_x \\ I_{20} \\ I_{11} \end{pmatrix} + \frac{V_y}{I_{yy}} \begin{pmatrix} I_{01} \\ I_{11} \\ I_{02} \end{pmatrix} - \frac{M_z^*}{I_{\omega}^{(i)}} \begin{pmatrix} I_{00} \text{ SYM.} \\ I_{10} \ I_{20} \\ I_{01} \ I_{11} \ I_{02} \end{pmatrix} \times [A^{-1}] \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

ここに $I_{mn} = \iint_A x^m y^n dx dy$, $A = I_{00}$. $x_{mn} = x_m - x_n$ etc. である。

要素内剪断応力

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{G}{2A} \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \{W_i\} \quad (5.41)$$

(b) 矩形要素 (図 5.7 参照)

要素剛性方程式

$$G \times \begin{pmatrix} \frac{l_x^2 + l_y^2}{3A} & & & \\ \frac{l_x^2 - 2l_y^2}{6A} & \frac{l_x^2 + l_y^2}{3A} & & \\ \frac{l_x^2 + l_y^2}{6A} & \frac{-2l_x^2 + l_y^2}{6A} & \frac{l_x^2 + l_y^2}{3A} & \\ \frac{-2l_x^2 + l_y^2}{6A} & \frac{l_x^2 + l_y^2}{6A} & \frac{l_x^2 - 2l_y^2}{6A} & \frac{l_x^2 + l_y^2}{3A} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{SYM.} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} W_{ii} \\ W_{jj} \\ W_{ik} \\ W_{ii} \end{pmatrix} = [A^{-1}]^T \begin{pmatrix} V_x \\ I_{20} \\ I_{11} \\ I_{21} \end{pmatrix} + \frac{V_y}{I_{yy}} \begin{pmatrix} I_{01} \\ I_{11} \\ I_{12} \end{pmatrix} - \frac{M_z^*}{I_{\omega}^{(i)}} \begin{pmatrix} I_{00} \text{ SYM.} \\ I_{10} \ I_{20} \\ I_{01} \ I_{11} \ I_{02} \\ I_{11} \ I_{21} \ I_{12} \ I_{22} \end{pmatrix}$$

* 偏差軸応力 ($Z-p/A$) に基づく梁の剪断変形について従来あまり考察されていないようであるが、解折の手法の上からは横剪断力 V_x, V_y を受ける場合のそれと同じであるから特にとりあげて論じない。

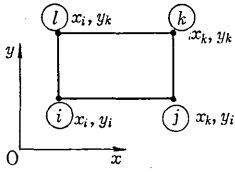


図 5.7 矩形要素

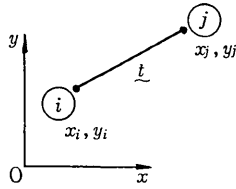


図 5.8 薄肉要素

$$\times [A^{-1}] \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \\ \omega_l \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

ここに、 $l_x = x_k - x_i$, $l_y = y_k - y_i$, $A = l_x \times l_y$ である。
要素内剪断応力

$$\begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{G}{A} \begin{pmatrix} y - y_k, -(y - y_k), y - y_i, -(y - y_i) \\ x - x_k, -(x - x_k), x - x_i, -(x - x_i) \end{pmatrix} \times \{W_s\} \quad (5.43)$$

(c) 薄肉要素 (図 5.8 参照)

要素剛性方程式

$$G \times \begin{pmatrix} \frac{t}{l} \text{SYM.} \\ -\frac{t}{l} & \frac{t}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{si} \\ W_{sj} \end{pmatrix} = \frac{It}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left(\frac{V_x}{I_{xx}} \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} + \frac{V_y}{I_{yy}} \begin{pmatrix} y_i \\ y_j \end{pmatrix} - \frac{M_x}{I_a^{(s)}} \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_j \end{pmatrix} \right) \quad (5.44)$$

要素内剪断応力

$$\tau_s = G(W_{sj} - W_{si})/l \quad (5.45)$$

以上で梁の 2 次元剪断応力分布の有限要素法による解析の説明を終るが、梁の剪断変形問題としてはさらに剪断変形が梁のたわみに及ぼす影響を決定する問題が残されている。横剪断力 V_x の場合には前号 (その 4) の (4.20) 式の微分方程式を解くことによって近似的に求められるものであるが、その際断面の有効剪断係数 k をあらかじめ与えておかねばならない。そこでその具体的な計算法を以下述べよう。実際断面の k の値については 4 節の計算例および本解説 (その 4) を参照されたい。

いま、横剪断力 V_x のみ考えたとすれば、(4.17) 式より、

$$V_x = \frac{V_x^2}{2kGA} \quad (5.46)$$

の関係がある。ここで、いま $V_x/GA = 1$ なる大きさの横剪断力が作用している場合の要素の節点のゆがみを $\{W_s\}$ とすれば、剪断変形によるひずみエネルギー V_s は次式で与えられる。

$$V_s = \frac{1}{2} G \{W_s\}^T [k_s] \{W_s\} \quad (5.47)$$

ただし、 $[k_s]$ は (5.40), (5.42), (5.44) 式の剛性マトリックスのうち G を取り除いた部分であり、 Σ は全要素についての総和を表わす。したがって、(5.46), (5.47)

式および $V_x = GA$ であることより、有効剪断係数 k は次式で計算することができる。

$$k = \frac{A}{\Sigma \{W_s\}^T [k_s] \{W_s\}} \quad (5.48)$$

この方法は材料力学で広く使われてきた伝統的な計算法であり、単一な横剪断力の場合には簡単でしかも実際とよくあう結果を与えるが、いくつかの断面力が同時に作用する場合の k の評価法が確立されていない。

2) 精密な梁の剪断変形理論の有限要素法による定式化²⁰⁾

前号 (その 4) において、仮想仕事の原理を用いた精密な梁の剪断変形理論の定式化を試みた。すなわち、その理論は梁の変位関数 (U, V, W) を梁の工学的理論に基づく変位関数 (u, v, w, θ) とその修正 3 次元変位関数 (U_c, V_c, W_c) の和として次式のように表わすことから出発する。

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= u(z) - y\theta(z) + U_c(x, y, z) \\ V(x, y, z) &= v(z) + x\theta(z) + V_c(x, y, z) \\ W(x, y, z) &= w(z) - xu'(z) - yv'(z) \\ &\quad + \theta'(z)\omega_n(x, y) + W_c(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

さて、この変位に関する関係式をベクトル記号を用いて次のように表わそう。

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_c \quad (5.50)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= (U, V, W) \\ \mathbf{u}_i &= (u, v, w, \theta) \\ \mathbf{u}_c &= (U_c, V_c, W_c) \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

である。この互いに独立な変位 \mathbf{u}_i と \mathbf{u}_c の満足すべき変分式は、全体の変位 \mathbf{u} が次の仮想仕事方程式

$$\delta V - \delta W = 0$$

を満足しなければならないことから求められる。

$$\begin{aligned} & \iiint \delta \epsilon^T \sigma \, dx \, dy \, dz - \iiint \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} \, dx \, dy \, dz \\ & - \iint \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} \, dS = 0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

この式において、梁の応力、ひずみ成分をそれぞれ σ , ϵ , また \mathbf{P}, \mathbf{F} をそれぞれ物体力、表面力のベクトル成分とする。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_i + \epsilon_c = \partial \mathbf{u}_i + \partial \mathbf{u}_c \\ \sigma &= \mathbf{D}_i \epsilon_i + \mathbf{D}_c \epsilon_c \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

ここに、 ∂ は微小ひずみ弾性論におけるひずみ-変位関係の微分演算子を表わし、 \mathbf{D}_i および \mathbf{D}_c はそれぞれ梁理論および 3 次元弾性論における応力-ひずみ関係を表わすマトリックスである。

仮想仕事方程式 (5.52) 式は、変位 \mathbf{u}_i および \mathbf{u}_c を互いに独立な変位とみなして変分をとるべきであるから、変位 \mathbf{u}_i および \mathbf{u}_c の満足すべき方程式として次の 2 つの方程式が得られる。

(i) 変位 u_i の満足すべき変分方程式

$$\iiint \delta \varepsilon_i^T \sigma_i dx dy dz - \iiint \delta u_i^T P dx dy dz - \iint \delta u_i^T F dS + \iiint \delta \varepsilon_i^T \sigma_c dx dy dz = 0 \quad (5.54)$$

(ii) 変位 u_c の満足すべき変分方程式

$$\iiint \delta \varepsilon_c^T \sigma_c dx dy dz - \iiint \delta u_c^T P dx dy dz - \iint \delta u_c^T F dS + \iiint \delta \varepsilon_c^T \sigma_c dx dy dz = 0 \quad (5.55)$$

これらの式を物理的に解釈すれば、(5.54)式は変位 u_i が物体力 P 、表面力 F のみならず初期応力 σ_c の作用によって生ずべき変位であることを表わし、また(5.55)式は変位 u_c の場合は同様に物体力 P 、表面力 F と初期応力 σ_c によって生ずるものであることを示している。換言すれば、変分方程式(5.54)式と(5.55)式とは初期応力項の存在によって連成しあうことになり、変位 u は(5.54)式および(5.55)式を同時に満足する u_i および u_c を決定することによって求められるのである。

(5.54)式に、実際に考えている梁としての変位、ひずみおよび応力成分を導入すると次のような梁の変位に関する仮想仕事方程式が求められる。

$$\begin{aligned} & \int_0^l \{ EI_x u'' \delta u'' + EI_y v'' \delta v'' + EA w' \delta w' \\ & + EI_\omega \theta'' \delta \theta'' + GK \theta' \delta \theta' - EI_{\omega x} (u'' \delta \theta'' + \theta'' \delta u'') \\ & - EI_{\omega y} (v'' \delta \theta'' + \theta'' \delta v'') \} dz \\ & - \int_0^l (q_x \delta u + q_y \delta v + p \delta w + m_x \delta \theta \\ & + m_y \delta u' - m_z \delta v' + m_\omega \delta \theta') dz \\ & + \int_0^l (P^{(c)} \delta w' + M_y^{(c)} \delta u'' - M_x^{(c)} \delta v'' \\ & + M_\omega^{(c)} \delta \theta'' + M_z^{(c)} \delta \theta') dz = 0 \end{aligned} \quad (5.56)$$

ここに、座標系は図心軸を z 軸とし、断面の慣性主軸を x, y 軸とする右手系とし、 (u, v) は断面の図心の平行変位とする。また上式の中に現われる $P^{(c)}, M_x^{(c)}, M_y^{(c)}, M_\omega^{(c)}, M_z^{(c)}$ は次の定義に従うものとする。

$$\left. \begin{aligned} P^{(c)} &= \iint \sigma_x^{(c)} dx dy \\ M_x^{(c)} &= \iint \sigma_x^{(c)} y dx dy \\ M_y^{(c)} &= -\iint \sigma_x^{(c)} x dx dy \\ M_\omega^{(c)} &= \iint \sigma_x^{(c)} \omega_n dx dy \\ M_z^{(c)} &= \iint \left\{ \tau_{xz}^{(c)} \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial x} - y \right) \right. \\ & \quad \left. + \tau_{yz}^{(c)} \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial y} + x \right) \right\} dx dy \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

一方、(5.55)式は次のように書き表わすことができる。

$$\begin{aligned} & \iiint \left\{ \sigma_x^{(c)} \delta \varepsilon_x^{(c)} + \sigma_y^{(c)} \delta \varepsilon_y^{(c)} + \sigma_z^{(c)} \delta \varepsilon_z^{(c)} \right. \\ & \quad \left. + \tau_{xy}^{(c)} \delta \gamma_{xy}^{(c)} + \tau_{yz}^{(c)} \delta \gamma_{yz}^{(c)} \right. \\ & \quad \left. + \tau_{zx}^{(c)} \delta \gamma_{zx}^{(c)} \right\} dx dy dz \\ & - \iint (X \delta U_c + Y \delta V_c + Z \delta W_c) dx dy dz \\ & - \iint (F_x \delta U_c + F_y \delta V_c + F_z \delta W_c) dS \\ & + \iiint E (w' - x u'' - y v'' + \theta'' \omega_n) \delta W_c dx dy dz \\ & + \iiint G \theta' \left\{ \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial x} - y \right) \delta \left(\frac{\partial U_c}{\partial z} + \frac{\partial W_c}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial y} + x \right) \delta \left(\frac{\partial V_c}{\partial z} + \frac{\partial W_c}{\partial y} \right) \right\} dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

ここに、 $(X, Y, Z), (F_x, F_y, F_z)$ はそれぞれ物体力、表面力の成分を表わしている。この式でもし梁が剛であると仮定できるならば、一般性を失うことなく、 $U_c = V_c = 0$ とおけるので、(5.58)式は次のような付加ゆがみ関数 $W_c(x, y, z)$ に関する仮想仕事方程式を与えることになる。

$$\begin{aligned} & \delta \iiint \frac{1}{2} \left[G \left\{ \left(\frac{\partial W_c}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_c}{\partial y} \right)^2 \right\} \right. \\ & \quad \left. + E' \left(\frac{\partial W_c}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ & - \iint \{ Z + E (w' - x u'' - y v'' + \theta'' \omega_n) \} \\ & \quad \times \delta W_c dx dy dz \\ & - \iint F_z \delta W_c dS = 0 \end{aligned} \quad (5.59)$$

この式はすでに前号(その4)において導いた(4.30)式と同じであるこれはいうまでもなからう。

以上のようにして、正しい梁の剪断変形理論は(5.54)式および(5.55)式で与えられる仮想仕事方程式を同時に満足する梁としての変位 u_i とその修正変位 u_c を求めることを要求していること、したがって、梁の剪断変形問題を正しく取り扱うためには、断面のゆがみ W_c の外に断面変形を表わす変位 (U_c, V_c) も考慮しなければならないこともわかった。換言すると、梁の大前提である断面不変の仮定の枠を取りはずさなければならないことになる。したがって、ここで述べた理論は梁の剪断変形理論というよりは梁の修正理論(improved theory or modified theory)と呼ぶべきものであると思われる。

さて、次にこの修正理論の有限要素法による定式化を行なう。梁を図5.9のように n 個の梁要素に分割し、さらに各梁要素を m 個の要素(三角柱要素など)の集合体に理想化する。そして梁要素の変位関数を次のようにおく。

(a) 変位関数 $u(x, y, z)$

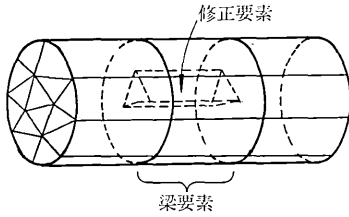


図 5.9 梁要素および修正要素

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{A}_i(x, y, z) \mathbf{d}_i + \mathbf{A}_c(x, y, z) \mathbf{d}_c \quad (5.60)$$

ここに \mathbf{d}_i は梁要素の節点変位, \mathbf{d}_c は梁要素両端面上の修正節点変位ベクトルを表わし, $\mathbf{A}_i(x, y, z)$, $\mathbf{A}_c(x, y, z)$ は各変位ベクトル場のいわゆる形状関数 (shape function) である。

(b) 歪成分 $\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) &= \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_c = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{A}_i \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\partial} \mathbf{A}_c \mathbf{d}_c \\ &= \mathbf{B}_i(x, y, z) \mathbf{d}_i + \mathbf{B}_c(x, y, z) \mathbf{d}_c \end{aligned} \quad (5.61)$$

(c) 応力成分 $\boldsymbol{\sigma}(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(x, y, z) &= \mathbf{D}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \mathbf{D}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c \\ &= \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i(x, y, z) \mathbf{d}_i + \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c(x, y, z) \mathbf{d}_c \end{aligned} \quad (5.62)$$

(d) 歪エネルギーの変分 δV

$$\begin{aligned} \delta V &= \iiint \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dx \, dy \, dz \\ &= \sum_n \sum_m \iiint (\delta \mathbf{d}_i^T \mathbf{B}_i^T + \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{B}_c^T) \\ &\quad \times (\mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i + \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c \mathbf{d}_c) \, dx \, dy \, dz \\ &= \sum_n (\delta \mathbf{d}_i^T \mathbf{k}_{ii} \mathbf{d}_i + \delta \mathbf{d}_i^T \mathbf{k}_{ic} \mathbf{d}_c \\ &\quad + \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{k}_{ci} \mathbf{d}_i + \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{k}_{cc} \mathbf{d}_c) \end{aligned} \quad (5.63)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_{ii} &= \sum_m \iiint \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \, dx \, dy \, dz \\ \mathbf{k}_{ic} &= \sum_m \iiint \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c \, dx \, dy \, dz \\ \mathbf{k}_{ci} &= \sum_m \iiint \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \, dx \, dy \, dz \\ \mathbf{k}_{cc} &= \sum_m \iiint \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c \, dx \, dy \, dz \end{aligned} \right\} \quad (5.64)$$

(e) 外力のなす仮想仕事 δW

$$\begin{aligned} \delta W &= \iiint \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} \, dx \, dy \, dz + \iint \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} \, dS \\ &= \sum_n \sum_m \iiint (\delta \mathbf{d}_i^T \mathbf{A}_i^T + \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{A}_c^T) \mathbf{P} \, dx \, dy \, dz \\ &\quad + \sum_n \sum_m \iint (\delta \mathbf{d}_i^T \mathbf{A}_i^T + \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{A}_c^T) \mathbf{F} \, dS \\ &= \sum_n (\delta \mathbf{d}_i^T \mathbf{f}_i + \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{f}_c) \end{aligned} \quad (5.65)$$

ここに,

$$\mathbf{f}_i = \iiint \mathbf{A}_i^T(x, y, z) \mathbf{P} \, dx \, dy \, dz$$

$$+ \iint \mathbf{A}_i^T(x, y, z) \mathbf{F} \, dS \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c &= \sum_m \iiint \mathbf{A}_c^T(x, y, z) \mathbf{P} \, dx \, dy \, dz \\ &\quad + \sum_m \iint \mathbf{A}_c^T(x, y, z) \mathbf{F} \, dS \end{aligned} \quad (5.67)$$

(f) 仮想仕事方程式 $\delta V - \delta W = 0$

(5.63)式と(5.65)式より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_n \{ \delta \mathbf{d}_i^T (\mathbf{k}_{ii} \mathbf{d}_i + \mathbf{k}_{ic} \mathbf{d}_c - \mathbf{f}_i) \\ + \delta \mathbf{d}_c^T (\mathbf{k}_{ci} \mathbf{d}_i + \mathbf{k}_{cc} \mathbf{d}_c - \mathbf{f}_c) \} = 0 \end{aligned} \quad (5.68)$$

(g) 梁全体の剛性方程式

(5.68)式において変位ベクトル \mathbf{d}_i と \mathbf{d}_c の独立性から, 次のような剛性方程式が得られる。

$$\mathbf{K}_{ii} \mathbf{d}_i + \mathbf{K}_{ic} \mathbf{d}_c = \mathbf{F}_i \quad (5.69 \text{ a})$$

$$\mathbf{K}_{ci} \mathbf{d}_i + \mathbf{K}_{cc} \mathbf{d}_c = \mathbf{F}_c \quad (5.69 \text{ b})$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{ii} &= \sum_n \mathbf{k}_{ii}, & \mathbf{K}_{ic} &= \sum_n \mathbf{k}_{ic} \\ \mathbf{K}_{ci} &= \sum_n \mathbf{k}_{ci}, & \mathbf{K}_{cc} &= \sum_n \mathbf{k}_{cc} \end{aligned} \right\} \quad (5.70)$$

$$\mathbf{F}_i = \sum_n \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{F}_c = \sum_n \mathbf{f}_c \quad (5.71)$$

であり, (5.69)式の \mathbf{d}_i , \mathbf{d}_c は改めてそれぞれ梁全体の梁節点変位および3次元修正節点変位ベクトルであると定義する。

さて, (5.69 b)式を \mathbf{d}_c について解くと,

$$\mathbf{d}_c = \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{F}_c - \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{ci} \mathbf{d}_i \quad (5.72)$$

この式を(5.69 a)式に代入すれば

$$(\mathbf{K}_{ii} - \mathbf{K}_{ic} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{ci}) \mathbf{d}_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{K}_{ic} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{F}_c \quad (5.73)$$

となる。そこで,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{eff}} &= \mathbf{K}_{ii} - \mathbf{K}_{ic} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{K}_{ci} \\ \mathbf{F}_{\text{eq}} &= \mathbf{F}_i - \mathbf{K}_{ic} \mathbf{K}_{cc}^{-1} \mathbf{F}_c \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

とおくと,

$$\mathbf{K}_{\text{eff}} \mathbf{d}_i = \mathbf{F}_{\text{eq}} \quad (5.75)$$

という式が得られる。

ここで定義した \mathbf{K}_{eff} は(5.74)式からわかるように, 断面剛と仮定して得られる梁の剛性 \mathbf{K}_{ii} から剪断変形や断面変形の影響による剛性低下を差し引いた正味の剛性マトリックスで, 与えられた梁の有効剛性マトリックスと呼ばれるべきものである。また \mathbf{F}_{eq} も3次元変形の影響も考慮した梁の等価節点力ベクトルである。換言すれば, (5.75)式は剪断変形ならびに断面変形の影響を考慮に入れた梁の剛性方程式であり, E. Reissner の提唱した剪断遅れ理論すなわち3次元剪断変形理論はこの式で $U_c = V_c = 0$, したがって断面剛と仮定して得られるものである。

さて, (5.49)式で与えられる梁要素の変位関数は具体的に次式のように与えることができる。

$$\begin{Bmatrix} U(x, y, z) \\ V(x, y, z) \\ W(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} N(z) & 0 & 0 & -yN(z) \\ 0 & N(z) & 0 & xN(z) \\ -xN'(z) & -yN'(z) & n(z) & \omega_n(x, y)N'(z) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} N^c(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & N^c(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & N^c(x, y, z) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ v_c \\ w_c \end{Bmatrix} \quad (5.76)$$

ここに、右辺第 1 項のマトリックスについては

$$\begin{aligned} [N(z)] &= [H(z)][A^{-1}] \\ [n(z)] &= [h(z)][a^{-1}] \\ [H(z)] &= [1, z, z^2, z^3], \quad [h(z)] = [1, z] \\ [A] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{pmatrix} \quad [a] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{pmatrix} \\ & \quad l: \text{梁要素の長さ} \\ \{u_i\}^T &= [u_L, u_L', u_R, u_R'] \\ \{v_i\}^T &= [v_L, v_L', v_R, v_R'] \\ \{w_i\}^T &= [w_L, w_R] \\ \{\theta_i\}^T &= [\theta_L, \theta_L', \theta_R, \theta_R'] \end{aligned} \quad (5.77)$$

である。また、第 2 項については

$$[N^c(x, y, z)] = [H^c(x, y, z)][A^c]^{-1} \quad (5.78)$$

と表わすことができるが、 $[H^c(x, y, z)], [A^c]$ マトリックスの具体的な中味は本節の終りに各修正要素に応じて与えることにする。

次に(5.53)式で与えられる歪成分 ϵ_i, ϵ_c は次のように表わされる。

$$\{\epsilon_i(x, y, z)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -xN''(z) & -yN''(z) & n'(z) & \omega_n(x, y)N''(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial x} - y\right)N'(z) \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial y} + x\right)N'(z) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad (5.79)$$

$$\{\epsilon_c(x, y, z)\} = \begin{pmatrix} N_x^c & 0 & 0 \\ 0 & N_y^c & 0 \\ 0 & 0 & N_z^c \\ N_y^c & N_x^c & 0 \\ 0 & N_x^c & N_y^c \\ N_x^c & 0 & N_x^c \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ v_c \\ w_c \end{Bmatrix} \quad (5.80)$$

ここに、左下添字記号 x, y, z は $N^c(x, y, z)$ をそれぞれ x, y, z で偏微分することを意味する。

したがって、(5.64)式で与えられる各マトリックスは次のようになる。

$$[k_{ii}] = \begin{pmatrix} EI_{xx}S_b^{ii} & & & & \text{SYM.} \\ 0 & EI_{yy}S_b^{ii} & & & \\ 0 & 0 & EAS_a^{ii} & & \\ -EI_{\omega z}S_b^{ii} & -EI_{\omega y}S_b^{ii} & 0 & EI_{\omega}S_b^{ii} & \\ & & & +GKS_c^{ii} & \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

ここに、

$$\begin{aligned} S_a^{ii} &= \int_0^l n^T n' dz \\ S_b^{ii} &= \int_0^l N''^T N'' dz \\ S_c^{ii} &= \int_0^l N'^T N' dz \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$[k_{ic}] = \sum_m \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\times \begin{pmatrix} -\nu S_{xx}^{ic} & -\nu S_{xy}^{ic} & -(1-\nu)S_{xz}^{ic} \\ -\nu S_{yx}^{ic} & -\nu S_{yy}^{ic} & -(1-\nu)S_{yz}^{ic} \\ \nu S_{xz}^{ic} & \nu S_{yz}^{ic} & (1-\nu)S_z^{ic} \\ \frac{(1-2\nu)}{2}(S_{\omega y}^{ic} + S_{2z}^{ic}) & \frac{(1-2\nu)}{2}(S_{\omega x}^{ic} + S_{1z}^{ic}) & (1-\nu)S_{\omega z}^{ic} + \frac{(1-2\nu)}{2}S_{1y}^{ic} + S_{2z}^{ic} \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

ここに、

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}^{ic} &= \int \alpha N''^T N_{\beta}^c dV \\ S_{\beta}^{ic} &= \int n^T N_{\beta}^c dV \\ S_{1\beta}^{ic} &= \int \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial x} - y\right) N'^T N_{\beta}^c dV \\ S_{2\beta}^{ic} &= \int \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial y} + x\right) N'^T N_{\beta}^c dV \end{aligned} \quad (5.84)$$

であり、 $\alpha = (x, y, z, \omega_n), \beta = (x, y, z)$ である。また積分は 1 つの 3 次元修正要素内について行なう。

$$[k_{ci}] = [k_{ic}]^T \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned}
 [k_{cc}] &= \sum_m \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\
 &\times \left(\begin{array}{ccc}
 (1-\nu)S_{xx}{}^{cc} & & \\
 + \frac{(1-2\nu)}{2}(S_{yy}{}^{cc} + S_{zz}{}^{cc}) & & \\
 \nu S_{yx}{}^{cc} + \frac{(1-2\nu)}{2}S_{xy}{}^{cc} & (1-\nu)S_{yy}{}^{cc} + \frac{(1-2\nu)}{2}(S_{zz}{}^{cc} + S_{xx}{}^{cc}) & \\
 \nu S_{zx}{}^{cc} + \frac{(1-2\nu)}{2}S_{xz}{}^{cc} & \nu S_{zy}{}^{cc} + \frac{(1-2\nu)}{2}S_{yz}{}^{cc} & (1-\nu)S_{zz}{}^{cc} + \frac{(1-2\nu)}{2}(S_{xx}{}^{cc} + S_{yy}{}^{cc})
 \end{array} \right) \text{SYM.} \tag{5.86}
 \end{aligned}$$

ここに,

$$S_{\alpha\beta}{}^{cc} = \int N_{\alpha}{}^c T N_{\beta}{}^c dV \tag{5.87}$$

であり, $\alpha=(x, y, z), \beta=(x, y, z)$ である. 積分は(5.84)式と同様に1つの3次元修正要素について行なうが, この場合は $S_{\alpha\beta}{}^{cc} = S_{\beta\alpha}{}^{cc}$ の関係がある.

以上の諸公式を用いて, 梁構造全体の剛性方程式(5.75)式を組み立てることができるわけであるが, その汎用解析プログラムは相当複雑なものとなるであろう. そこで一般的議論はこれぐらいにして, 断面剛の仮定に立った剪断変形理論についてさらに考えてみよう. この場合は, 前にも述べたように $U_c = V_c = 0$ つまり $u_c = v_c = 0$ であるから, (5.83)式の $[k_{ic}]$, (5.85)式の $[k_{ci}]$, (5.86)式の $[k_{cc}]$ のうち, u_c, v_c に関する行列を取り除けばよい. よって, 断面剛の仮定に基づくこれらのマトリックスは次のようになる.

$$\begin{aligned}
 [\bar{k}_{ic}] &= [\bar{k}_{ci}]^T = \sum_m \begin{pmatrix} -E'S_{xx}{}^{ic} \\ -E'S_{yx}{}^{ic} \\ E'S_{zx}{}^{ic} \\ E'S_{\alpha z}{}^{ic} + G(S_{1y}{}^{ic} + S_{2x}{}^{ic}) \end{pmatrix} \tag{5.88} \\
 [\bar{k}_{cc}] &= \sum_m (E'S_{zz}{}^{cc} + G(S_{xx}{}^{cc} + S_{yy}{}^{cc})) \tag{5.89}
 \end{aligned}$$

となる. したがって, (5.69)式は次のように書き改められる.

$$\left. \begin{aligned}
 K_{ii}d_i + \bar{K}_{ic}w_c &= F_i \\
 \bar{K}_{ci}d_i + \bar{K}_{cc}w_c &= F_c
 \end{aligned} \right\} \tag{5.90}$$

したがって,

$$\bar{K}_{eff}d_i = \bar{F}_{eq} \tag{5.91}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{K}_{eff} &= K_{ii} - \bar{K}_{ic}\bar{K}_{cc}^{-1}\bar{K}_{ci} \\
 \bar{F}_{eq} &= F_i - \bar{K}_{ic}\bar{K}_{cc}^{-1}F_c
 \end{aligned} \right\} \tag{5.92}$$

となる.

ここでさらに具体的な梁の剪断変形の解析法を説明するために, 梁の xz 平面内における横荷重 $q_x(z)$ による曲げの問題について考えてみよう. この場合, 剛性方程式(5.88)はさらに単純化されて, 梁要素について次のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned}
 EI_{xx}S_{\delta}{}^{ii}u_i - \sum_m E'S_{zz}{}^{ic}w_c &= f_i \\
 -\sum_m E'S_{zz}{}^{icT}u_i + \sum_m \{E'S_{zz}{}^{cc} \\
 + G(S_{xx}{}^{cc} + S_{yy}{}^{cc})\}w_c &= f_c
 \end{aligned} \right\} \tag{5.93}$$

さて, (5.93)式を用いて梁の3次元剪断変形解析を行なう場合, 3次元要素として三角柱, 矩形柱および薄板要素が必要となるのは, 前に述べた2次元解析の場合と同じである. そこで, 3次元剪断変形解析用の三角柱, 矩形柱および薄板要素に関する各種計算公式を次に与えておこう.

3次元剪断変形解析に用いる代表的要素

(a) 三角柱要素 (図 5.10 参照)

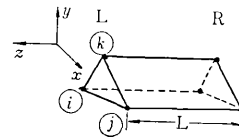


図 5.10 三角柱要素

次の諸式が計算の基礎となる.

$$\left. \begin{aligned}
 [H^c(x, y, z)] &= [1, x, y, z, zx, zy] \\
 [A^c] &= \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_i & y_i & L & Lx_i & Ly_i \\ 1 & x_j & y_j & L & Lx_j & Ly_j \\ 1 & x_k & y_k & L & Lx_k & Ly_k \end{pmatrix} \\
 [w_c]^T &= [w_{Li}, w_{Lj}, w_{Lk}, w_{Ri}, w_{Rj}, w_{Rk}]
 \end{aligned} \right\} \tag{5.94}$$

これらの式を用いると, (5.93)式に対応する各剛性マトリックスは次のようになる.

$$\begin{aligned}
 [k_{ic}] &= [k_{ci}]^T \\
 &= \sum_m (-E \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{10} & -I_{20} & -I_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{10} & I_{20} & I_{11} \end{pmatrix} [A^c{}^{-1}]) \tag{5.95 a}
 \end{aligned}$$

$$[k_{cc}] = \sum_m ([A^c{}^{-1}]^T$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{SYM.} \\ GI_{00}L \\ 0 \\ 0 \\ GI_{00}L^2/2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ GI_{00}L \\ 0 \\ 0 \\ GI_{00}L^2/2 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ EI_{00}L \\ EI_{10}L \\ EI_{01}L \\ EI_{01}L \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ GI_{00}L^3/3 + EI_{20}L \\ GI_{10}L^3/3 + EI_{20}L \\ EI_{11}L \\ EI_{11}L \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ GI_{00}L^3/3 + EI_{02}L \end{matrix} \\ \times \{A^{e-1}\} \quad (5.95b)$$

ここに、 L は梁要素長さである。また

$$I_{mn} = \iint x^m y^n dx dy$$

であり、三角要素の xy 面三角形領域内の積分値を表わす。

(b) 矩形柱要素 (図 5.11 参照)

次の諸式が計算の基礎となる。

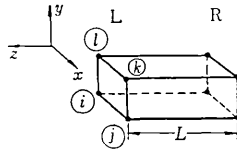


図 5.11 矩形柱要素

$$\{H^e(x, y, z)\} = \{1, x, y, xy, z, zx, zy, zxy\}$$

$$\{A^e\} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_i & y_i & x_i y_i & L & L x_i & L y_i & L x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j & L & L x_j & L y_j & L x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k & L & L x_k & L y_k & L x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l & L & L x_l & L y_l & L x_l y_l \end{pmatrix}$$

$$\{w_e\}^T = \{w_{Li}, w_{Lj}, w_{Lk}, w_{Ll}, w_{Ri}, w_{Rj}, w_{Rk}, w_{Rl}\} \quad (5.96)$$

これらの式を用いると、(5.93)式に対応する各剛性マトリックスは次のようになる。

$$\{k_{ic}\} = \{k_{ci}\}^T = \sum_m (-E) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{10} & -I_{20} & -I_{11} & -I_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{10} & I_{20} & I_{11} & I_{21} \end{pmatrix} \{A^{e-1}\} \quad (5.97a)$$

$$\{k_{cc}\} = \sum_m \{A^{e-1}\}^T$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ GI_{00}L \\ 0 \\ 0 \\ GI_{00}L^2/2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ GI_{00}L \\ 0 \\ 0 \\ GI_{00}L^2/2 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ EI_{00}L \\ 0 \\ 0 \\ EI_{01}L \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ GI_{00}L^3/3 + EI_{20}L \\ GI_{10}L^3/3 + EI_{20}L \\ EI_{11}L \\ EI_{11}L \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ GI_{00}L^3/3 + EI_{02}L \\ GI_{10}L^3/3 + EI_{12}L \\ G(I_{20} + I_{02})L^3/3 + EI_{22}L \end{matrix} \quad \{A^{e-1}\} \quad (5.97b)$$

ここに、 $I_{mn} = \iint x^m y^n dx dy$ であり、矩形柱要素の xy 面矩形領域内の積分値を表わす。

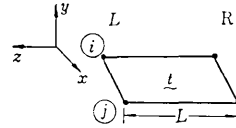


図 5.12 薄板要素

(c) 薄板要素 (図 5.12 参照)

次の諸式が計算の基礎となる。

$$\{H^e(s, z)\} = \{1, s, z, sz\}$$

$$\{A^e\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l & 0 & 0 \\ 1 & 0 & L & 0 \\ 1 & l & L & Ll \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

$$\{w^e\}^T = \{w_{Li}, w_{Lj}, w_{Ri}, w_{Rj}\}$$

これらの式を用いると、(5.93)式に対応する各剛性マトリックスは次のようになる。

$$\{k_{ic}\} = \{k_{ci}\}^T = \sum_m \left(-\frac{Et}{6L} \right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_i + x_j & x_i + 2x_j & -(2x_i + x_j) & -(x_i + 2x_j) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(2x_i + x_j) & -(x_i + 2x_j) & 2x_i + x_j & x_i + 2x_j \end{pmatrix} \quad (5.99a)$$

$$\{k_{cc}\} = \sum_m \left(\frac{GtL}{6l} \begin{pmatrix} 2 & \text{SYM.} \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{Et}{6L} \begin{pmatrix} 2 & \text{SYM.} \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \quad (5.99b)$$

ここに、 $l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ であり、 t は要素板厚である。

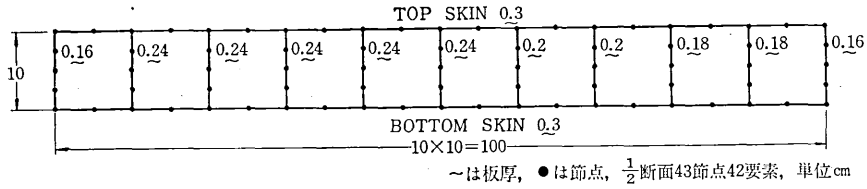


図 5.13(a) 10 室薄肉箱形断面

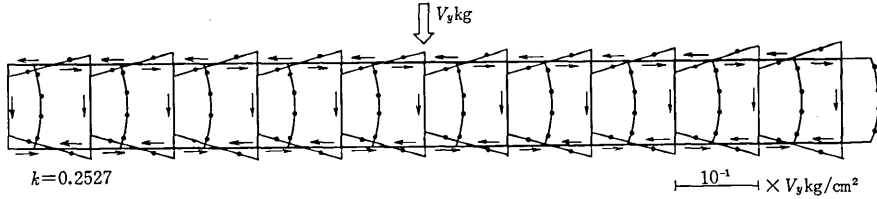


図 5.13(b) V_y による剪断応力分布

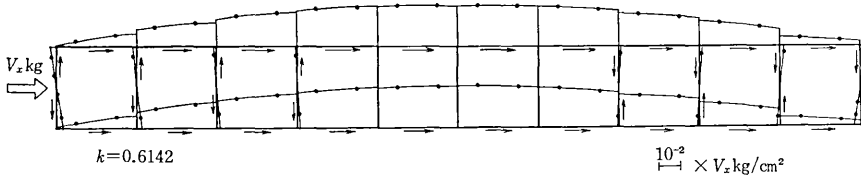


図 5.13(c) V_z による剪断応力分布

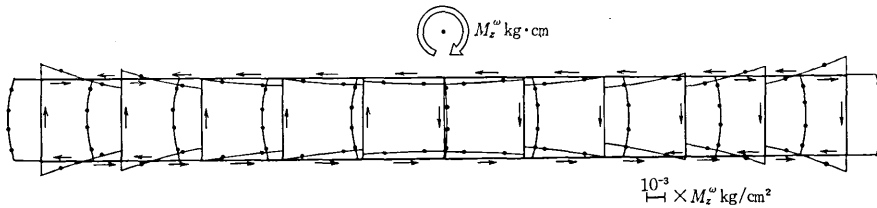


図 5.13(d) M_z による剪断応力分布

4. 計 算 例

まず 2次元剪断応力解析例として、図 5.13 の 10 室薄肉箱形断面をとりあげ、(5.44)式、(5.45)式を適用して V_z 、 V_y 、 M_z による剪断応力分布を求めた。この断面は(その 3)の Saint-Venant 振り問題においてもとりあげており参照されたい¹⁾。次に、梁の 3次元剪断変形解析法を用いて、図 5.14 に示したように片持平板の面内変形解析を行なった⁹⁾。修正要素としては薄板要素を用いた。図 5.14(b)の変位図よりわかるように、2次元面内変形解析結果と比較して、従来の梁理論をそのまま適用した場合かなり誤差があるが、本法を適用することによって、よい近似を与えている。また図 5.14(c)の応力図においては、固定端近くの剪断応力分布を除いてよい解が得られている。次に薄肉箱形断面を有する片持梁の解析結果を図 5.15 に示す⁹⁾。ここでも薄肉修正要素を用いた。図 5.15(b)に示したように、剪断変形のたわみに及ぼす影響は、従来の梁理論より得られた解に比して約 30% 増大しており、薄肉構造物においては剪断変形の影響は無視できないことを示唆しています。また、図 5.15(d)の応力図では、固定端の近くで Shear-lag

現象が顕著に見られる。また材料力学でいういわゆる梁断面の有効剪断係数 k の値も、各計算例につき、(5.48)式を用いて求めた結果を、図 5.4(d)、図 5.13(b)、(c)、図 5.15(c)の各図中に記しておいた。

5. 結 論

本解説の前半においては従来から行なわれている薄肉断面梁の 2次元剪断流解析法とそれを実用化した逐次近似解法を紹介し、次いで任意の断面形状の梁の 2次元、3次元剪断変形解析が統一的に行ないうる有限要素解析法について述べた。読者の中には、ここで述べた 3次元剪断変形の有限要素解析と普通の 3次元(薄板)解析との差はどこにあるのかという疑問をもたれる方もあるであろう。せっかく複雑な構造をうまく梁構造にモデル化して簡単な計算で局部応力や変形の問題を度外視して全体としての変形を大づかみにとらえようとしていながら、3次元解析をやるのでは一体どこにこの方法の利点があるかという批判をうけるのは避けられまい。この批判に対して十分納得のいく説明を与えることができない。しかし梁理論の精密化という観点に立ってこの理論は組み立てられており、したがって比較するのに必要な

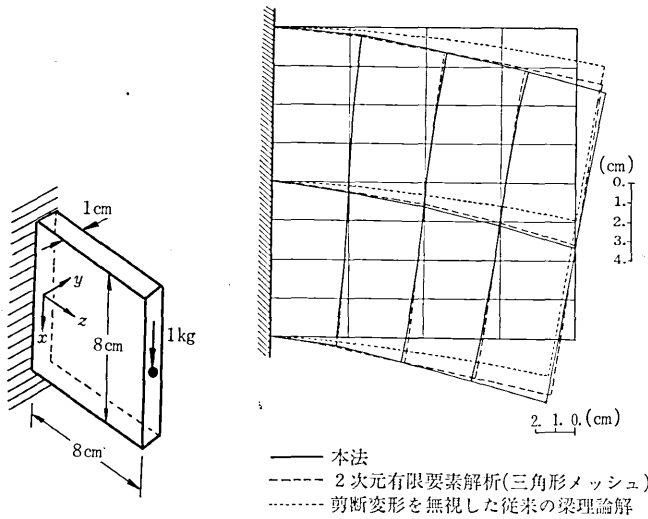


図 5.14(a) 片持平板の解析

図 5.14(b) 変位図

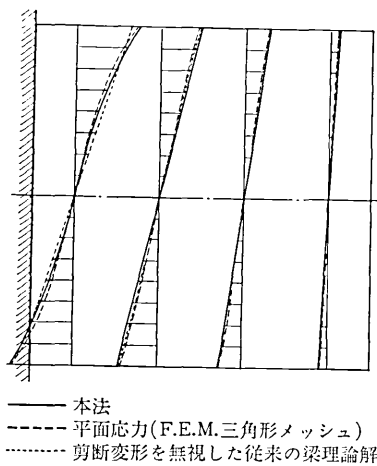


図 5.14(d) 直応力図

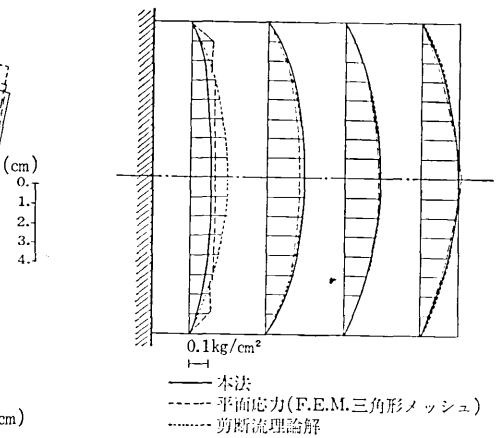


図 5.14(c) 剪断応力図

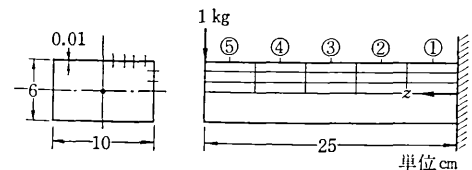


図 5.15(a) 薄肉箱形断面梁

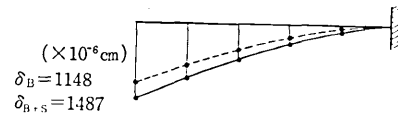


図 5.15(b) 変位図

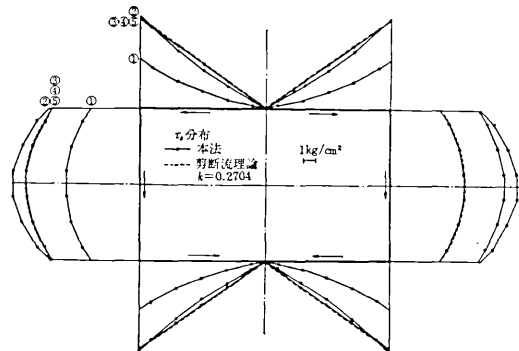


図 5.15(c) 剪断応力図

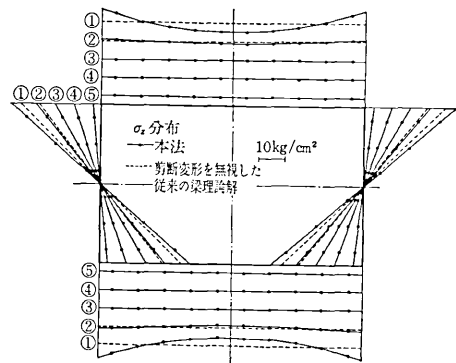


図 5.15(d) 直応力図

精密解は当然のことながら3次元弾性論に基づく解析結果でなければならず、何らかの意味で3次元弾性論に足を踏みこざるを得ないのである。このようにしてわれわれは修正変位 d_c を求めるのにかなり大きなマトリックスを扱わざるを得なくなるが、梁要素としての分割が相当細かくしてあれば、各梁要素の3次元モデル化は図 5.9 のように、梁要素の長さを高さとする三角柱、矩形柱あるいは薄板要素で行なっても梁理論の立場での議論は十分であろうと考える。以上の解析法により梁の3次元剪断変形解析は多くの場合十分な精度できると確信しているが、すでに述べたように一たん w_c を u_i で表わす過程でかなり大きなサブマトリックス K_{cc} の逆行列をとらねばならない。これをどうしても避けたいというならば、各梁要素の剛性マトリックスを作る段階においてその有効剛性マトリックス k_{eff} を計算し、 k_{eff} のか

わりにこれを用いて全体の解析をしたらどうであろうか。この場合の k_{eff} は各梁要素の有効剛性マトリックスともいうべきものであり、これを用いた梁の解析は、従来の有効剪断係数 k を用いる材料力学的レベルの剪断変形解析よりもかなり合理的な梁のたわみ解析ができるように思われる。現在この方法は検討中で確信をもって断言できる段階でないが、簡単な計算に適用した結果は非常に有望である。ついでに剪断応力分布だけでも簡便な方法で求めたいという場合には、まず剪断変形の影響を無視した梁の変形解析を行なって各断面の剪断力 V_x , V_y や曲げ振りモーメント M_x^0 の分布を決定し、次にそれと静的に等価な 2 次元剪断応力分布を求めれば工学的には大体満足できる結果が得られるであろう。この結論はいくつかの簡単な梁の 2 次元および 3 次元剪断変形解析の結果を比較して得られたものであることを付言しておこう。さて、何度も述べたように梁の剪断変形問題は厳密に取り扱おうと思うと断面の変形をも許容しなければならなくなり、問題は非常に複雑化する。しかしこの問題も有限要素法を用いれば明解な理論の定式化が行な

えることがわかった。この種の問題についても一、二の解析例を示したかったが、本解説の脱稿までにまにあわなかったののでいずれ結果が得られ次第稿を改めて報告したいと思っている。

参 考 文 献

- 1) 川井, 藤谷: “梁の精密化に関する二, 三の試み(その 3) —Saint-Venant の振り問題(続)—”, 生産研究, Vol. 25, No. 9 (1973. 9)
- 2) 川井, 藤谷: “梁の精密化に関する二, 三の試み(その 4) —梁の剪断変形解析—”, 生産研究, Vol. 25, No. 11 (1973. 11)
- 3) E. F. Bruhn: “Analysis and Design of Aircraft Structure”, Vol. 1, Tri-State Offset Company, Cincinnati, Ohio (1958)
- 4) 川井, 藤谷: “構造物理理想化の原理と梁理論への応用”, 日本鋼構造協会解析小委員会資料(昭和 47 年 9 月)
- 5) 藤谷, 川端: “剪断変形を考慮したはり解析に関する一, 二の試み”, 西日本マトリックス構造解析研究会資料(昭和 49 年 2 月)
- 6) E. Reissner: “Analysis of Shear Lag in Box Beams by the Principle of Minimum Potential Energy”, Quarterly Applied Mechanics, p. 268~p. 278, Oct., 1946

次 号 予 告 (7 月 号)

研 究 解 説

ERTS データを用いた首都圏人口密度の推定	村 恒	井 俊	治 浩
計装プロジェクトにおけるマネジメント手法およびその摘要	山 口	楠 雄	伸
	茶	川	

調 査 報 告

海外産業施設地震被害調査報告 球形タンクおよび円筒タンク	柴 田	碧
------------------------------------	-----	---

研 究 速 報

発振源移動による地盤内の波動伝播状況に関する実験的研究	森 地	重 暉
	田 村	重 四郎
軸対称液体貯槽の液面動揺の固有周期計算法に対する提案	曾我部	深
スチレン系ポラスポリマーに関する基礎的研究とそれを用いたクロマトグラフィー	高 井	信 治
	山 辺	武 郎
CONCENTRATION DECAY IN A BATCH ADSORPTION TANK	鈴 木	基 之
	河 添	邦 太郎

研 究 室 紹 介

大野研究室	大 野	進 一
-------------	-----	-----