

# 円筒液体貯槽の液面動揺の応答 第 2 報

——正弦波過渡応答解——

Response Analysis on Sloshing of Liquid in a Cylindrical Storage II

——Transient Response to Sinusoidal Input——

曾 我 部 潔\*・柴 田 碧\*

Kiyoshi SOGABE and Heki SHIBATA

## 1. は し が き

第 1 報<sup>1)</sup>では地震波入力に対する液面動揺 (sloshing) の応答を評価するための基礎式を誘導し、正弦波入力に対する定常応答解を求め、これを用いて応答の定性的性質を調べた。定常応答解は系の応答の定性的な振動性状を調べるのには有効である。一方、実際の地震に対して、長周期成分を含んだ地震波形が少いので、正弦波に対する過渡応答解を用いることがある<sup>2)</sup>。実際の地震波は同一振動数が長時間継続することはないので、応答は定常応答の大きさまで成長することなく、多くは 1 ~ 2 波の継続に相当する。ここでは正弦波入力に対する過渡応答を用いる方法の妥当性について具体的に検討する。

すなわち、静止状態の液体貯槽系に入力波として正弦波が突然働き始めた場合の液面動揺の過渡応答解を求め、特に 1 次の液面動揺に着目し、入力波の振動数が系の液面動揺の 1 次の固有振動数に等しい場合について、入力波  $n$  波に対して液面動揺の応答がどれ位まで成長するかを評価する。さらにこの結果を自然地震に対する大型貯槽模型の応答観測結果および強震記録による中型貯槽模型の加振実験結果と比較し、これらの応答とはほぼ同じ大きさの応答を与える正弦波の等価入力波数  $n_e$  を推定する。

この手法を用いれば、地震時における貯槽系の 1 次の液面動揺の応答を評価するのに、地震波形を入力波として用いる代りに系の固有振動数と等しい振動数の  $n_e$  波の正弦波を用いれば良いことになり、非常に簡便に応答を評価することができる。

液体貯槽の液面が動揺を起すような長周期の卓越周期を有する地震波形はほぼ正弦波に類似の波形をしていることが、長周期変位計による地震観測結果より判明している<sup>3)</sup>。この点からも上述の方法は妥当なものと考えることができる。しかしその波形の持続性という点からみると、意外に等価な波数はすくなくないことが判明した。

## 2. 基 礎 式

第 1 報で誘導した重要な基礎式をふたたび挙げる。半径  $R$ 、液体の深さ  $H$  の剛体円筒容器が水平方向に  $d_g(t)$  の変位加振を受けた場合 (第 1 報図 1 参照) の液面変位  $\eta$ 、側面圧力  $p_w$ 、底面圧力  $p_b$  は各々次式で表わされる。

$$\eta = \frac{R}{g} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(r, H) \dot{v}_i - \frac{r}{R} \dot{u}_g \right] \cos \theta \quad (1)$$

$$p_w = \frac{\gamma R}{g} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(R, z) \dot{v}_i - \dot{u}_g \right] \cos \theta \quad (2)$$

$$p_b = \frac{\gamma R}{g} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(r, 0) \dot{v}_i - \frac{r}{R} \dot{u}_g \right] \cos \theta \quad (3)$$

ここで  $\Phi_i(r, z)$ 、 $v_i(t)$  は各々速度ポテンシャルをモード分解した場合の各モードの規準関数および規準速度である。規準関数  $\Phi_i(r, z)$  は次式で与えられる。

$$\Phi_i(r, z) = J_1\left(\varepsilon_i \frac{r}{R}\right) \cosh\left(\varepsilon_i \frac{z}{R}\right) \quad (4)$$

ここに  $J_1(r)$  は 1 次の第 1 種ベッセル関数である。また  $\varepsilon_i$  は  $J_1'(\varepsilon) = 0$  の第  $i$  番目の正根である。特に  $\varepsilon_1 \equiv 1.84$  である。規準速度  $v_i$  は次の 2 階の常微分方程式の解として与えられる。

$$\ddot{v}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{v}_i + \omega_i^2 v_i = \ddot{u}_g + 2\zeta_i \omega_i \dot{u}_g \quad (5)$$

ここに  $\omega_i$  は  $i$  次の液面動揺の円固有振動数であり、次式で与えられる。

$$\omega_i^2 = \frac{g}{R} \varepsilon_i \tanh\left(\varepsilon_i \frac{H}{R}\right) \quad (6)$$

また  $\beta_i$  は  $i$  次の規準速度  $v_i$  に対する励振係数であり

$$\beta_i = \frac{2}{(\varepsilon_i^2 - 1) J_1(\varepsilon_i) \cosh\left(\varepsilon_i \frac{H}{R}\right)} \quad (7)$$

さらに  $u_g$  は地表面の速度であり

$$u_g(t) = \dot{d}_g \quad (8)$$

定数  $g, \gamma$  は各々重力加速度および液体の比重量を表わす。

## 3. 正弦波立上り入力に対する過渡応答解

静止状態の液体貯槽系に入力波として正弦波が突然働

\* 東京大学生産技術研究所 第 2 部

らき始めた場合の過渡応答を求める。

地表面が

$$d_g = D_g \sin \omega_g t \quad (t \geq 0) \quad (9)$$

したがって

$$u_g = D_g \omega_g \cos \omega_g t \quad (t \geq 0) \quad (10)$$

で振動し始めたとし、これに対する式(5)の  $v_i$  の過渡解を求める。

簡単のために  $\zeta_i = 0$  とする。(実際に減衰定数を中型貯槽模型を用いて計測した結果  $\zeta_i \approx 0.002$  であるので、 $\zeta_i = 0$  として解析しても差支えないものと考えられる。)

初期条件がすべて 0 であると、式(10)を入力波として式(5)に入れて積分すると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau \\ &= -D_g \omega_g \frac{\lambda_i^2}{1-\lambda_i^2} (\cos \omega_g t - \cos \omega_i t) \end{aligned} \quad (11)$$

ここに

$$\lambda_i = \frac{\omega_g}{\omega_i} = \frac{T_i}{T_g} \quad (12)$$

したがって式(11)より  $\dot{v}_i$  はつぎのようになる。

$$\dot{v}_i = D_g \omega_g^2 e_i(t) \quad (13)$$

ここに

$$e_i(t) = \frac{\lambda_i^2}{1-\lambda_i^2} \left( \sin \omega_g t - \frac{1}{\lambda_i} \sin \omega_i t \right) \quad (14)$$

式(13)を式(1), (2), (3)に代入すると  $\eta, p_w, p_b$  は各々次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \eta &= R \frac{D_g \omega_g^2}{g} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(r, H) e_i(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{R} \sin \omega_g t \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} p_w &= \gamma R \frac{D_g \omega_g^2}{g} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(R, z) e_i(t) \right. \\ &\quad \left. + \sin \omega_g t \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} p_b &= \gamma R \frac{D_g \omega_g^2}{g} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(r, 0) e_i(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{R} \sin \omega_g t \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (17)$$

#### 4. 1 次共振点における過渡応答解

液体貯槽の液面動揺現象で工学的にもっとも重要な意味を有するのは 1 次の液面動揺である。これは液体の表面がほぼ平面的な形状で大きく振動するモードを示し、貯槽側壁から液体が流出したり、側壁や天井の板に大きな動圧を与え破壊する直接の原因となっているものである。以下これに着目して議論をすすめる。

入力波の振動数が 1 次の液面動揺の固有振動数に一致

している場合 ( $\lambda_1 \rightarrow 1$  の場合) について考察する。この場合には 1 次のモードのみが卓越して表われるから、式(15), (16), (17)の第 1 項のみをとり、さらに式(6)の關係を用いると各応答は各々次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \eta_1 &= D_g \varepsilon_1 \tanh \left( \varepsilon_1 \frac{H}{R} \right) \left[ \frac{2}{\varepsilon_1^2 - 1} \cdot \frac{J_1 \left( \varepsilon_1 \frac{r}{R} \right)}{J_1(\varepsilon_1)} \right. \\ &\quad \left. \times f_1(t) + \frac{r}{R} \sin \omega_1 t \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} p_{w1} &= D_g \gamma \varepsilon_1 \tanh \left( \varepsilon_1 \frac{H}{R} \right) \left[ \frac{2}{\varepsilon_1^2 - 1} \cdot \frac{\cosh \left( \varepsilon_1 \frac{z}{R} \right)}{\cosh \left( \varepsilon_1 \frac{H}{R} \right)} \right. \\ &\quad \left. \times f_1(t) + \sin \omega_1 t \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} p_{b1} &= D_g \gamma \varepsilon_1 \tanh \left( \varepsilon_1 \frac{H}{R} \right) \left[ \frac{2}{\varepsilon_1^2 - 1} \cdot \frac{J_1 \left( \varepsilon_1 \frac{r}{R} \right)}{J_1(\varepsilon_1)} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{\cosh \left( \varepsilon_1 \frac{H}{R} \right)} f_1(t) + \frac{r}{R} \sin \omega_1 t \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (20)$$

ここに

$$f_1(t) \equiv \lim_{\lambda_1 \rightarrow 1} e_1(t) = \frac{1}{2} \omega_1 t \sin \left( \omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (21)$$

液面変位  $\eta_1$  の側壁における振幅の最大値を  $h$  とすると

$$h(t) = \eta_1 \Big|_{r=R} = D_g \varepsilon_1 \tanh \left( \varepsilon_1 \frac{H}{R} \right) a(t) \quad (22)$$

ここに  $a(t)$  は  $h(t)$  の時間に依存する項であり

$$\begin{aligned} a(t) &\equiv \frac{2}{\varepsilon_1^2 - 1} f_1(t) + \sin \omega_1 t \\ &= 2.62 \frac{t}{T_1} \sin \left( 2\pi \frac{t}{T_1} - \frac{\pi}{2} \right) + \sin 2\pi \frac{t}{T_1} \end{aligned} \quad (23)$$

この場合には液体の表面はほぼ平面的な動きをするから、表面が平面であると仮定して上の  $h$  を用いて液体の重心の水平移動  $x_g$  を求めると次式のようにになる。

$$x_g(t) = \frac{1}{4 \left( \frac{H}{R} \right)} h(t) = D_g \frac{\varepsilon_1 \tanh \left( \varepsilon_1 \frac{H}{R} \right)}{4 \left( \frac{H}{R} \right)} a(t) \quad (24)$$

ここで貯槽が  $n$  波の入力波を受けた場合の液体の重心の水平移動  $x_g(t)$  の地動変位  $d_g(t)$  に対する応答倍率  $A_d(n)$  を次式で定義する。

$$A_d(n) \equiv \frac{\max_{0 \leq t \leq nT_1} \{x_g(t)\}}{\max_{0 \leq t \leq nT_1} \{d_g(t)\}} \quad (25)$$

上式は式(9), (24)を用いると次のようになる

研 究 速 報

$$A_d(n) = \frac{\varepsilon_1 \tanh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right)}{4\left(\frac{H}{R}\right)} \max_{0 \leq t \leq nT_1} \{a(t)\} \quad (26)$$

$$A_d(n) = \frac{1.21 \tanh\left(1.84 \frac{H}{R}\right)}{\left(\frac{H}{R}\right)} \times n \quad (31)$$

$\max_{0 \leq t \leq nT_1} \{a(t)\}$  の値を具体的に評価するために

$$a(t) = a_1(t) + a_2(t) \quad (27)$$

$$a_1(t) \equiv 2.62 \frac{t}{T_1} \sin\left(2\pi \frac{t}{T_1} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (28)$$

$$a_2(t) \equiv \sin 2\pi \frac{t}{T_1} \quad (29)$$

とおいて、これらを時間を横軸にとって書くと図1のような振幅が時間と共に増大してゆく正弦波となる。

図1より  $n \geq 1$  に対してはつぎのことが言える。

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq nT_1} \{a(t)\} &\equiv a(nT_1) = a_1(nT_1) \\ &= 2.62 n \end{aligned} \quad (30)$$

したがって式(26)より  $A_d(n)$  はつぎのようになる。

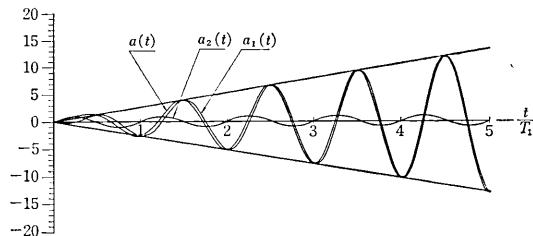


図1 過渡応答の成長の様子

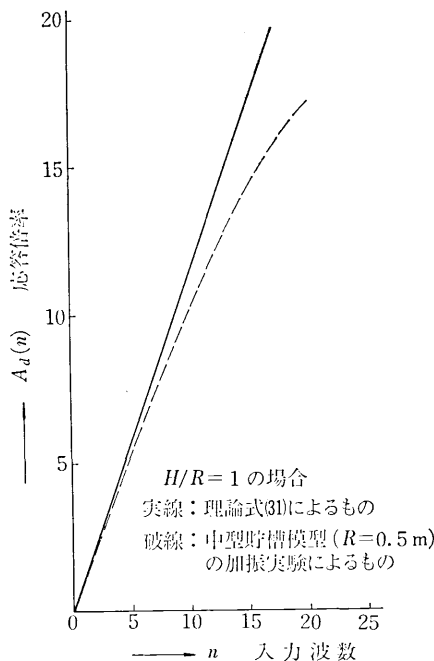


図2 正弦波の入力波数に対する応答倍率の成長

図2は  $H/R=1$  とした場合の  $A_d(n)$  の値をグラフに表わしたものである。図中実線は上の式(31)による計算値であり、破線は中型貯槽模型 ( $R=0.5 \text{ m}$ ) の加振実験の結果得られた応答値である。実験誤差、減衰の存在等を考え合わせると良く一致していると思われる。

式(31)からわかるように、入力波数  $n$  の値が同じでも  $A_d(n)$  の値は貯槽の形状  $H/R$  により異なること、また貯槽の形状が相似な場合 ( $H/R=$ 一定の場合) には、 $A_d(n)$  の値は入力波数  $n$  のみに依存し系の固有振動数に依存しないことは注目すべきことである。

### 5. 等価入力波数 $n_e$ の推定

式(31)に於て  $n$  の値を適当に選べば、応答倍率  $A_d(n)$  の値が地震波を入力とした場合の貯槽の液面動揺による液体の重心の移動の地動変位に対する応答倍率  $A_d$  に相当するにすることができる。このときの  $n$  の値を正弦波の等価入力波数と呼び  $n_e$  で表わすことにする。以下  $n_e$  の推定について示す。

図3は上記理論式による応答倍率  $A_d(n)$  の値と貯槽模型による実験・観測により求めた応答倍率  $A_d$  の値とを重ね合わせたものである。図中の実線は式(31)の関係を表わしており、 $n$  をパラメータとしたときの  $H/R$  の値に対する  $A_d(n)$  の値を示している。また◎印は自然地震に対する大型貯槽模型 ( $R=2 \text{ m}$ ) の応答観測結果<sup>4)</sup>

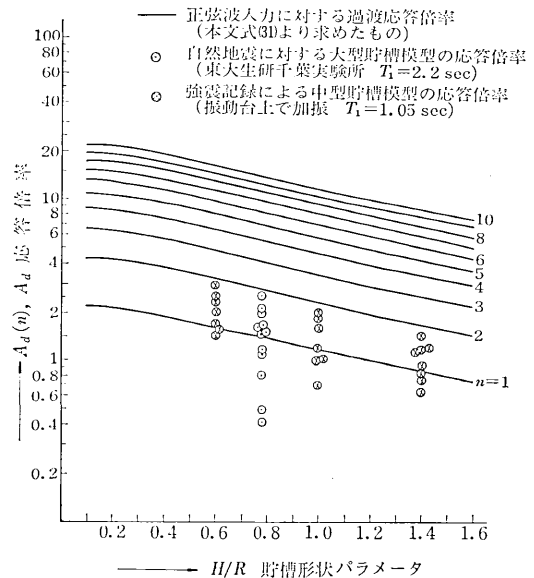


図3  $A_d(n)$ ,  $A_d$  応答倍率の対応

(p. 21 へつづく)

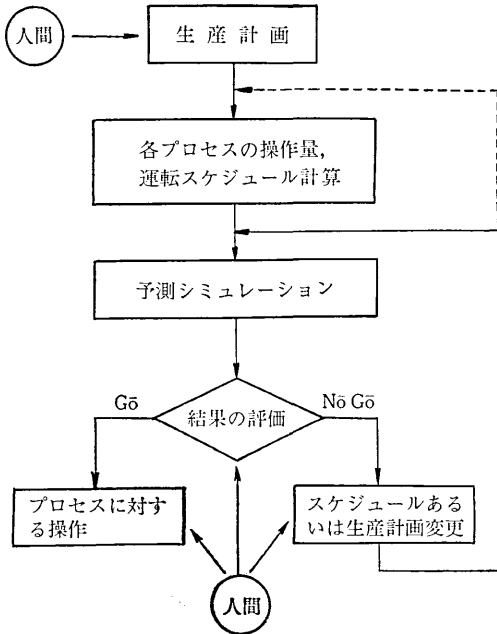


図 10 オペレータ・ガイド・システム概念図

を含み、製品、品質ともに多種の上に、同じ回分工程に違品種のものを割込ませるなど複雑な運転を行う場合が多い。我々は以前このような工程を自動制御するとき各種の処理に計算機を導入し、アルゴリズムを工夫することにより運転を自動化する方式の研究を行った<sup>1),2)</sup>。しかし計算機を用いても完全自動化の不適當な場合がしばしばある。人間のもつ高度の認識力、判断力と計算機のもつ計算能力、正確さ、スピードなど各々の長所をうまく

く組み合わせることが有効な場合が多い。そこでマン・マシン・インターフェースを含んだオペレータ・ガイドのための計算制御システムを考えた。図 10 にその概念図を示す。人間が生産計画を与えると各プロセスの操作量、運転スケジュールの計算を行い、次に予測シミュレーションを実行して将来のタンク・レベルなどを表示する。人間はこの結果を評価してスケジュールの変更あるいは生産計画の変更などを行い、より有効なプロセスの運転方法を決めることができる。

5. おわりに

以上、回分工程のスケジュールを優先して予測制御を行った場合について述べた。得られたシミュレーション結果は、プラント設計時に設備容量を決めるときなどに役立っている。また、このシミュレーションは極めて単純化したモデルを用いているので、制限条件、パラメータなどの変更あるいは追加により、広く具体的なプロセスに適用できると考えている。

現在先に述べたオペレータ・ガイド方式の計算制御に適用する手法を開発中であり、これについては次の機会に報告したい。

(1973 年 1 月 23 日受理)

参考文献

- 1) 沢井, 森, 山口:「精製糖工程の総合制御システム」, 計測と制御, 6, 2, 1967.2
- 2) 同上:「同上」, 生研報告, 19, 5, 1969.10
- 3) 山口, 嶋田:「流量の予測制御シミュレーション」, 昭47 電気学会大会, 1083, 1972.4
- 4) 同上:「同上」, 第 12 回 SICE 学術講演会, 2602, 1973.8

(p. 24 よりつづく)

から得られた  $A_d$  の値であり、⊗印は El Centro 波, Taft 波等の強震記録を入力波として中型貯槽模型 ( $R = 0.5 \text{ m}$ ) を振動台上で加振したときの応答計測結果から得られた  $A_d$  の値である。

図 3 より等価入力波数  $n_e$  は 1~2 程度であることがわかるが、貯槽の設計に際しての推定値としては、地震の規模、長周期成分の周期範囲および地震継続時間等を考慮に入れて次の値を採用するのが妥当であると思われる。

$$n_e = 2 \sim 3$$

6. ま と め

地震波を入力波とした場合の液体貯槽の液面動揺の応答を求めるための方法として、正弦波の立上り入力に対する液面動揺の過渡応答を用いる手法について具体的に検討し、地震波を入力波とした場合と応答倍率の大きさ

が同程度になるような正弦波の等価入力波数  $n_e$  を推定した。

この手法を用いると、地震波入力に対する液体貯槽の液面動揺の応答が  $n_e$  波の正弦波入力に対する液面動揺の応答で推定できるので、液体貯槽の液面動揺の応答解析が非常に簡便に行なえる。(1973 年 1 月 25 日受理)

参考文献

- 1) 曾我部ほか, 円筒液体貯槽の液面動揺の応答 第 1 報, 生産研究, Vol. 26, No. 3, (1974.3), p. 31
- 2) Shibata, H., Observation of Damages of Industrial Firms in Nigata Earthquake, Proc. of 4 World Conference of Earthq. Eng'g., Vol. III, J-2, (1969.1)
- 3) 重田ほか, プラント応答観測実験速報(I), 生産研究, Vol. 24, No. 3, (昭47.3), p. 52
- 4) 曾我部ほか, 円筒型液体貯槽模型の自然地震応答観測実験概報, 機学会講演論文集, No. 730-14 (昭48.10), p. 157