

円筒液体貯槽の液面動揺の応答 第1報

—基礎式と正弦波解—

Response Analysis on Sloshing of Liquid in a Cylindrical Storage-I
—Basic Equation and Response to Sinusoidal Input—

曾我部 潔*・柴田 譲*
Kiyoshi SOGABE and Heki SHIBATA

1. はしがき

本研究の目的は地震時における液体貯槽内の液面動揺(スロッシング)の応答を評価することである。

液体貯槽は内容物のほとんどが石油やLPGなど可燃性液体、液化ガスの危険物であり、一度事故が起ると大きな災害を引起す可能性がある。最近これら液体貯槽に対し、内部の液体の動揺(スロッシング)が耐震工学的立場から問題になってきた。昭和39年の新潟地震の際スロッシングが第1原因で石油貯槽の火災が発生したのは良く知られている通りである¹⁾。

地震波は加速度波の領域で卓越している成分と、変位波の領域で卓越している成分とがある。後者に対して貯槽の液体の自由表面が共振して大振幅となるのがいわゆるスロッシング(sloshing)現象である。この変位波の卓越している領域とは周期1~10sec程度の領域を意味し、通常の寸法の貯槽のスロッシングの1次の固有周期はほとんどこの領域内に入る。

このように、液体貯槽系は、その固有周期が非常に長く、今まで耐震設計の対象としていた構造物系(概して短周期)とは振動性状が大きく異なるので、既存の耐震設計法の適用範囲外にある。従って液体貯槽系の応答を評価するためには、新しい応答解析法の提案が必要であると考えられる。

本報告では、液体の動揺の応答に対する既存の理論を上の目的に合うように耐震工学的立場から再検討した結果について、著者らの新たな知見を加え逐次述べて行く。

2. 基礎式の誘導

半径Rの剛体円筒容器の中に高さHまで液体の入ったもので液体貯槽系をモデル化する。この系に対し、図1に示すように座標軸を設定する。

この系がx軸方向に $d_s(t)$ の変位加振を受ける場合について従来から知られている手法²⁾³⁾を出発点として考えてゆく。液体は非圧縮性完全流体であり、渦なし流

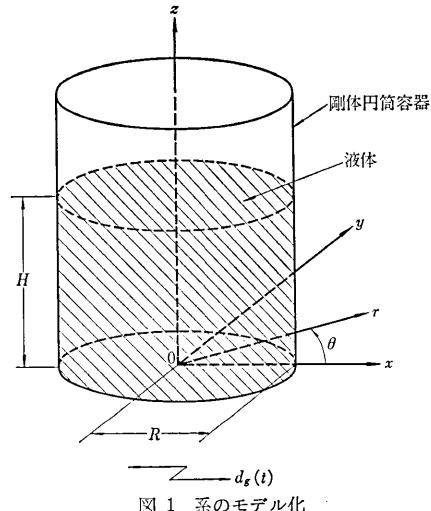


図1 系のモデル化

であると仮定すると、速度ポテンシャル ϕ の存在が仮定できるので、系の運動は次の四つの式により支配される。

1) 液体は容器の内部で連続の式を満足する:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \phi(r, \theta, z, t) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

2) 側壁における液体のr方向の速度は容器の速度に等しい:

$$-\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} = u_r(t) \cos \theta \quad , \quad u_r = \dot{d}_s \quad (2)$$

3) 底面における液体のz方向の速度は0である:

$$-\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (3)$$

4) 液体の自由表面における境界条件:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{ここで } z=H \quad (4)$$

ここに μ は自由表面の振動の減衰定数、 g は重力加速度を表わす。

* 東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報

式(2)の関係より速度ポテンシャル ϕ は次の形で θ を分離することができることがわかる。

$$\phi(r, \theta, z, t) = \varphi(r, z, t) \cos \theta \quad (5)$$

式(5)を式(1)～(4)に代入して整理すると

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

$$\left. -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = u_\theta \quad (7)$$

$$\left. -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

ここで $z = H$ (9)

ここで変数変換

$$\varphi = RU - r u_\theta = R \left(U - \frac{r}{R} u_\theta \right) \quad (10)$$

を行うと式(6)～(9)は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (11)$$

$$\left. -\frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (12)$$

$$\left. -\frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{r}{R} (\ddot{u}_\theta + \mu \dot{u}_\theta)$$

ここで $z = H$ (14)

ここでよく知られたモーダルアナリシスの手法を流体速度に対して適用する。液体の応答の速度 U は規準速度 $u_i(t)$ と規準関数 $\Phi_i(r, z)$ を用いて次のように表わすことができる。

$$U(r, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(r, z) u_i(t) \quad (15)$$

$\Phi_i(r, z)$ は式(11), (12), (13)を満たすから次のようになる。

$$\Phi_i(r, z) = J_1 \left(\varepsilon_i \frac{r}{R} \right) \cosh \left(\varepsilon_i \frac{z}{R} \right) \quad (16)$$

ここに $J_1(r)$ は1次の第1種ベッセル関数である。また ε_i は $J_1'(\varepsilon) = 0$ の第*i*番目の正根である。

式(15), (16)を用いると境界条件式(14)は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{\infty} \cosh \left(\varepsilon_i \frac{H}{R} \right) [\ddot{u}_i + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{u}_i + \omega_i^2 u_i]$$

$$\times J_1 \left(\varepsilon_i \frac{r}{R} \right) = \frac{r}{R} (\ddot{u}_\theta + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{u}_\theta) \quad (17)$$

ここに ω_i , ε_i は各々第*i*次の液面動揺の円周固有振動数および減衰定数であり次式により求められる。

$$\omega_i^2 = \frac{g}{R} \varepsilon_i \tanh \left(\varepsilon_i \frac{H}{R} \right) \quad (18)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\mu}{2\omega_i} \quad (19)$$

ここで r をFourier-Bessel展開すると

$$r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2R}{(\varepsilon_i^2 - 1)} J_1(\varepsilon_i) J_1 \left(\varepsilon_i \frac{r}{R} \right) \quad (20)$$

上式を式(17)に代入すると

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \cosh \left(\varepsilon_i \frac{H}{R} \right) [\ddot{u}_i + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{u}_i + \omega_i^2 u_i] \\ & \quad \times J_1 \left(\varepsilon_i \frac{r}{R} \right) \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{(\varepsilon_i^2 - 1)} J_1(\varepsilon_i) (\ddot{u}_\theta + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{u}_\theta) \\ & \quad \times J_1 \left(\varepsilon_i \frac{r}{R} \right) \end{aligned}$$

両辺で $J_1 \left(\varepsilon_i \frac{r}{R} \right)$ の係数を等置して整理すると

$$\ddot{u}_\theta + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{u}_\theta + \omega_i^2 u_\theta = \beta_i (\ddot{u}_\theta + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{u}_\theta) \quad (21)$$

ここで β_i は*i*次の規準速度に対する励振係数であり

$$\beta_i = \frac{2}{(\varepsilon_i^2 - 1) J_1(\varepsilon_i) \cosh \left(\varepsilon_i \frac{H}{R} \right)} \quad (22)$$

で与えられる。

さらに

$$v_i = \frac{u_i}{\beta_i}$$

なる変換を行うと式(21)は次のように液体の応答速度についての2階の常微分方程式となる。

$$\ddot{v}_i + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{v}_i + \omega_i^2 v_i = \ddot{u}_\theta + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{u}_\theta \quad (23)$$

上方程式的解 v_i を得れば、速度ポテンシャル ϕ は式(5), (10), (15)を用いて次のように求めることができる。

$$\phi = R \left[\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(r, z) v_i - \frac{r}{R} u_\theta \right] \cos \theta \quad (24)$$

この速度ポテンシャル ϕ を用いると、液面変位 η 、側面圧力 p_w 、底面圧力 p_b は各々次のようにになる。

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=H}$$

$$= \frac{R}{g} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(r, H) \dot{v}_i - \frac{r}{R} \dot{u}_\theta \right] \cos \theta \quad (25)$$

$$p_w = \frac{r}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{r=R}$$

$$= \frac{\gamma R}{g} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(R, z) \dot{v}_i - \dot{u}_\theta \right] \cos \theta \quad (26)$$

$$p_b = \frac{\gamma}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

$$= \frac{\gamma R}{g} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(r, 0) \dot{v}_i - \frac{r}{R} \dot{u}_\theta \right] \cos \theta \quad (27)$$

ここに γ は液体の比重を表わす。

3. 正弦波強制振動に対する定常応答解

地表面が

$$d_i = D_g \sin \omega_g t$$

$$\text{すなわち } u_i = D_g \omega_g \cos \omega_g t$$

で振動する場合の液面動揺の定常解を求める。

$$v_i = -e_i D_g \omega_g \cos(\omega_g t - \varphi_i)$$

$$\text{すなわち } \dot{v}_i = e_i D_g \omega_g^2 \sin(\omega_g t - \varphi_i)$$

として式(23)に代入し、 e_i , φ_i を求めると

$$e_i = \frac{\lambda_i^2 \sqrt{1 + \left(2 \frac{\zeta_i}{\omega_i}\right)^2}}{\sqrt{(1 - \lambda_i^2)^2 + (2 \zeta_i \lambda_i)^2}} \quad (28)$$

$$\varphi_i = \tan^{-1} \frac{2 \zeta_i}{\lambda_i \left[1 - \lambda_i^2 \left\{ 1 + \left(2 \frac{\zeta_i}{\omega_i}\right)^2 \right\} \right]} \quad (29)$$

ここに

$$\lambda_i = \frac{\omega_g}{\omega_i} = \frac{T_i}{T_g} \quad (30)$$

いま減衰が小さい場合について考えることにする

$$\frac{\zeta_i}{\omega_i} \ll 1$$

が成立するから、 e_i , φ_i は各々次のようになる

$$e_i = \frac{\lambda_i^2}{\sqrt{(1 - \lambda_i^2)^2 + (2 \zeta_i \lambda_i)^2}} \quad (32)$$

$$\varphi_i = \tan^{-1} \frac{2 \zeta_i}{\lambda_i (1 - \lambda_i^2)} \quad (33)$$

従って液面変位 η , 側面圧力 p_w , 底面圧力 p_b は各々次のようにになる。

$$\begin{aligned} \eta &= R \frac{D_g \omega_g^2}{g} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(r, H) e_i \sin(\omega_g t - \varphi_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{R} \sin \omega_g t \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} p_w &= \gamma R \frac{D_g \omega_g^2}{g} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(R, z) e_i \sin(\omega_g t - \varphi_i) \right. \\ &\quad \left. + \sin \omega_g t \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (35)$$

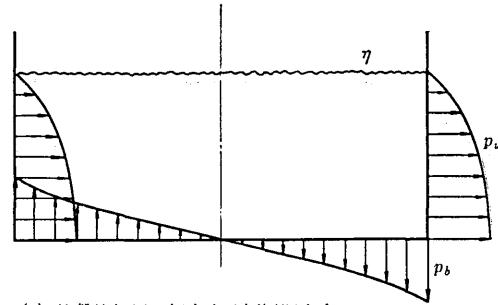
$$\begin{aligned} p_b &= \gamma R \frac{D_g \omega_g^2}{g} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \Phi_i(r, 0) e_i \sin(\omega_g t - \varphi_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{R} \sin \omega_g t \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (36)$$

これらの各応答は λ_i の大きさにより次の三つの場合に大別することができる。

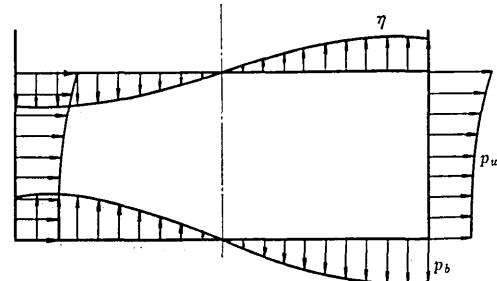
(i) $\lambda_i = T_i / T_g \gg 1$ (短周期加振)

$$e_i \rightarrow 1, \varphi_i \rightarrow \pi$$

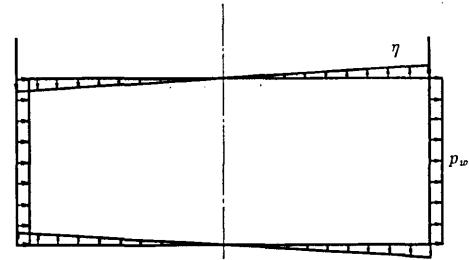
(ii) $\lambda_i = T_i / T_g \rightarrow 1$ (i 次共振)



(i) 衝撃的加振に相当する短周期入力に対する応答
($\lambda_i \rightarrow \infty, \varphi_i \rightarrow \pi$)



(ii) 1次共振入力に対する応答
($\lambda_i \rightarrow 1, \varphi_i \rightarrow \pi/2$)



(iii) 長周期入力に対する応答
($\lambda_i \rightarrow 0, \varphi_i \rightarrow 0$)

図 2 3種類の応答パターン

$$e_i \rightarrow 1/2\zeta_i, \varphi_i \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

(ii) $\lambda_i = T_i / T_g \ll 1$ (長周期加振)

$$e_i \rightarrow 0, \varphi_i \rightarrow 0$$

これらの応答の様子を図示すると図2のようになる。(ii)の場合にはスロッシング現象が起るので工学的に重要な意味を有する。今回は1次の液面動揺に着目して考察した結果について報告する。(i)の場合には液面動揺はほとんど現れないが、側面および底面が衝撃的な圧力を受けるので工学的意味は大きい。この場合には各応答の値は各次のモードの総和として意味をもつものであるモードのみに着目して議論すべきものではない。これについては後にあらためて報告する。(iii)の場合は各応答の値は非常に小さいので余り工学的意味はない。

4. 1次共振点における定常応答解

1次共振点($\lambda_1 \rightarrow 1$)における応答について考察する。

この場合には1次のモードのみが卓越して現れるから、式(34)～(36)の総和の第1項のみをとり、さらに式(18)の関係

$$\frac{R}{g} = \frac{\varepsilon_1 \tanh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right)}{\omega_1^2}$$

を用いると、各応答は次のようになる。

$$\begin{aligned} \eta_1 &= D_g \varepsilon_1 \tanh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right) \left[\frac{1}{\varepsilon_1^2 - 1} \frac{J_1\left(\varepsilon_1 \frac{r}{R}\right)}{J_1(\varepsilon_1)} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{\zeta_1} \sin\left(\omega_g t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{r}{R} \sin \omega_g t \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} p_{w1} &= D_g \gamma \varepsilon_1 \tanh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right) \left[\frac{1}{\varepsilon_1^2 - 1} \frac{\cosh\left(\varepsilon_1 \frac{z}{R}\right)}{\cosh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right)} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{\zeta_1} \sin\left(\omega_g t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \omega_g t \right] \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} p_{b1} &= D_g \gamma \varepsilon_1 \tanh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right) \left[\frac{1}{\varepsilon_1^2 - 1} \frac{J_1\left(\varepsilon_1 \frac{r}{R}\right)}{J_1(\varepsilon_1)} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{\cosh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right)} \frac{1}{\zeta_1} \sin\left(\omega_g t - \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{R} \sin \omega_g t \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (39)$$

液面変位 η_1 の側壁における振幅の最大値を h とすると

$$\begin{aligned} h &= \eta_1 \Big|_{\substack{r=R \\ \theta=0}} \\ &= D_g \varepsilon_1 \tanh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right) \left[\frac{1}{\varepsilon_1^2 - 1} \frac{1}{\zeta_1} \right. \\ &\quad \times \left. \sin\left(\omega_g t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \omega_g t \right] \end{aligned} \quad (40)$$

この場合には液面はほぼ平面的な動きをするから、上の h を用いて液体の重心の水平移動 x_g を求める

$$\begin{aligned} x_g &\cong \frac{1}{4} \left(\frac{H}{R} \right) h \\ &= D_g \frac{\varepsilon_1 \tanh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right)}{4 \left(\frac{H}{R} \right)} \left[\frac{1}{\varepsilon_1^2 - 1} \frac{1}{\zeta_1} \right. \\ &\quad \times \left. \sin\left(\omega_g t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \omega_g t \right] \end{aligned} \quad (41)$$

液体の重心の移動 x_g の地表面変位 d_g に対する応答倍率を A_d とすると

$$\begin{aligned} A_d &\equiv \frac{|x_g|_{\max}}{|d_g|_{\max}} \\ &\cong \frac{1}{\varepsilon_1^2 - 1} \frac{\varepsilon_1 \tanh\left(\varepsilon_1 \frac{H}{R}\right)}{4 \left(\frac{H}{R} \right)} \frac{1}{\zeta_1} \end{aligned} \quad (42)$$

上式より、貯槽の形状が相似な場合 ($H/R = \text{一定}$ の場合) には、1次共振点における液体の重心の移動の地表面変位に対する変位応答倍率は減衰定数のみに依存し、液体動揺の固有周期には依存しないことがわかる。

5. まとめ

円筒型液体貯槽が水平方向の入力を受けた場合の液面変位、側面圧力および底面圧力を評価する基礎式を誘導し、この系が正弦波変位入力を受けた場合の定常応答を求める式を得た。さらに、入力波の周期が1次の液面動揺の固有周期と一致した場合の各応答を評価する式を誘導し、これを用いて、液体の重心の移動の入力変位に対する変位応答倍率を評価する式を得た。

(1973年12月25日受理)

参考文献

- 1) 土木学会新潟震災委員会、昭和39年新潟地震震害調査報告書
- 2) Senda K. and Nakagawa, K., Technical Report of the Osaka University, 5-170, (1956), 317
- 3) U.S.A.E.C., Nuclear Reactors and Earthquakes, TID-7024, (1963.8)
- 4) Lamb, H., Hydrodynamics, 6th Ed. IX, (1932)
- 5) Gray, A.M. and MacRobert, T.M., A Treatise on Bessel Functions and Their Application to Physics, 2nd Ed., VIII and XI, (1922)