

断片的に解析的な境界値問題に対する 高速高精度の数値解法

——多角形領域の Stokes 問題への適用——

A Fast and Accurate Numerical Scheme of Solution of Piecewise Analytic
—Boundary Value Problems, with Application to Stokes Problems in Polygonal Domains—

金子 幸 臣*

Satiomi KANEKO

解の局所的性質は容易に得られる。それを活用することにより、計算機による解法の手数を節約することができる。実用上の制約とならない範囲での問題の限定。その際の解の局所的性質に従い、解を経済的に表現すること、局所的表現の未定定数を、大局的な問題の解として数値的に決定すること、などを具体的な例によって示す。2 次的利益は、得られた結果から解の何階かの導関数やその不定積分などの値が解そのものの値と同程度に容易かつ高精度に直接（数値的積分なし）に得られる。

1. はじめに

偏微分方程式を含む問題の数値解法で、よく用いられている方法に差分法（定差法、有限要素法など）がある。しかし、それらは、あまりにも労力を要するので、最近の計算機を使っても、結果は“信用できない”ので、実験など、全く別の方法で、補強されなければならないか、全く数学的な解の構成のために用いられる（このときは、収束することがわかればよい）かのどちらかが主になっていると考えている人もある。scheme の一部でしかないはずの、偏微分方程式系の差分化のところだけ共通な問題で、初等的に解ける場合について計算して、その scheme の精度について云々しているものもあるが、これらは、差分法にとっても、特に都合のよい場合になっているので、一般の実用のための基礎としては、十分なものではない。ここでは、“信用できる計算”まで、計算機で実行できる方法について考える。

2. 労力と精度

数値計算を労力の点からみると、差分法では、その精度が $O(h^k)$ の形になる。（ここに h は mesh の大きさの代表、これを十分小さくすれば、労力を別として、必要な精度に到達できることになっているとする。）取り扱う mesh 数を N とすると、 m 次元空間における問題では、 $N=O(h^{-m})$ したがって、精度は $O(N^{-k/m})$ ということになる。さらに問題はほぼ N に比例する個数の未知数の連立方程式となるので、計算量 $W=O(N^\alpha)$ 。（ α は一次方程式の消去法なら $\alpha=3$ 、2 次元 Laplace 方程式の定差法に対する SOR なら $\alpha=1.5$ etc.）精度は $O(W^{-k/m\alpha})$ となる。たとえば、2 次元 Laplace 方程式の中心差分化で、SOR によるとすると、 $K=2$ 、 $m=2$ 、 $\alpha=1.5$ で、打切誤差 $=O(W^{-2/3})$ 。つまり、1 桁改

良するには 30 倍の労力を要する。しかもこれは、打切誤差であって、global な真の誤差は、一般的な見透しのよい結果はないので、数値計算では、何が得られたかわからないとか、桁数の多い計算は“非常な”無駄であるとかの“哲学”を生じた。もともと差分法は、“非常に”一般的な問題（ L_2 理論と同じくらい）に対して考えられたもので、そこでは精度と労力の関係は、あまり改善されることは望めないのはやむをえない。実用家の立場からは、（2 次元で）長さのあるかどうかかわからない境界など論外として、いたるところ解析的でない境界条件や外力を含む問題は、かえって珍らしい、というよりは、無理して解かなくてもよい問題であって、境界も、境界値も、外力も、断片的に解析的な問題にかぎっても、問題の本質を失うことのないのが普通である。それを保証するための基礎は数学の問題であり、計算労力に無関係に与えられているということである（ある関数がある点で解析的とは、その点の近くで、0 と異なる収束半径をもつ整べき級数に展開されることをいう）。そのような、ほとんど解析的な問題に対しては、精度と労力の関係が、格段によい方法があり得るのであって、実際、流体力学における Navier-Stokes 方程式¹⁾や、その漸近方程式である Stokes 方程式（double Laplace 方程式）に対する粘着条件（境界上で、流体の速度が与えられた関数に一致するようにする）の問題などについては解析性が知れている。

解法の概略は、ごく古典的なものであるが、まず問題の（応用上必要な程度に）一般的な解析性を調べ、急速に収束する展開法を見出す。その際、その展開が簡単な形に求まるためには、簡単な形の局所的な問題に分割することが重要である。次にそれらの解析接続を数値的に行うことにより、global な解を得る。実際には、解析性についてはいくつかに分類されるもののみを考え、さらに対称性などを利用して、scheme を単純化するの、

* 東京大学生産技術研究所 第1部

差分法よりむしろやさしい。以下考え方の説明のため、簡単な多角形領域内の Stokes 問題をとりあげる。これは、Navier-Stokes 問題とくらべて、その線形性のために、内点における級数解の収束半径が大きくとれ、一般解が特解の線形結合で表わせるのではるかに簡単である。

3. Stokes 問題に対する Patching Method

定差方程式の理論によると、楕円型方程式の性質から、滑らかな境界条件は任意精度の計算に対しても、それに応じた適当に並んだ有限個の境界上の点での値を指定することでおきかえ得ることがわかる。数値計算でも、境界上の値を適当な関数系での展開の係数の列を与えるなどのほかに、境界上のほぼ等間隔に並んだ代表点の上での値を指定することでもよい。この場合、境界値の解析性のよい場合には代表点の選び方が適当であると、点の数の 2 倍の数の展開係数を指定したのと同じ効果さえ出せるというのは、Gauss の数値積分公式の例にもある。さらに外力が解析的(無しならもちろんよい)のとき、解は任意の点で解析的、つまり、十分速く収束する級数に展開される。たとえば、ある点を中心に円板を考え、その内部に特異点(あるとすれば、当然もとの領域の境界上またはもっと外)がないとき、円内で収束する整べき級数で表わされる。したがって、最も近い特異点までの距離より十分小さな半径 ρ の円内では非常に速く収束する。明らかに、項数 N に対する精度は $O(\rho^N)$ の形で与えられ、労力の指数関数的である。同様に、境界が円と円の接ぎ目のときは、比較的簡単な関数系による急速に収束する展開が可能である。特に直線と直線の交点に関しては、非整数べき級数展開でそのようなものが作れる。そこに現われる関数系を仮に Moffatt²⁾ 関数などとよぶことにする。

さて、与えられた領域が上のように部分領域、すなわち、その上での任意の解が急速に収束する級数に展開可能なような部分領域によって覆われたものとする。たとえば、多角形領域では、展開の中心が内点または直線境界上にあるときは整べき展開、角上にあるときは Moffatt 展開でよい。そのとき、適当な有限個を選んで固定すればよい。つまり、精度を上げるのは、各部分領域内での展開項数を増加するだけで、分割の仕直しをしない。したがって、いわゆる有限要素法のように、結局無限個の要素に分割するものと本質的に違い、むしろもっと対称性のよい問題における Matching 法に近い。各部分領域では、その境界(部分領域の)上に、精度に応じた個数 N だけほぼ等間隔に代表点をとる。境界条件に現われる関係式に解の展開形の $2N$ 項で打切ったものを代入し、代表点の座標と、そこにおける関数値(いまは流れの関数と渦度)を代入する。これを展開係数に関する連立方程式と考えると、代表点がほぼ等間隔にとってあ

ることによって、この方程式は常に解けて、 $N \rightarrow \infty$ のとき、もとの境界値問題の解になるのは差分方程式の理論の示唆するところである。各部分領域の境界はもとの領域の境界となっているもの以外、すべて相隣する領域のどれかの十分内部にあるようになっているとき、今の場合、最大値の原理よりやや強い性質があり、いわゆる Schwarz の方法が使って、繰り返し法により global な問題の解が得られる(Navier-Stokes 方程式のように非線形の場合は、少しむずかしくなるが、十分よい出発値からはじまれば可能である)。これは一種の逐次代入法で、部分領域に cyclic な番号をつけ、各部分領域の境界値を番号の若い向きに一番近い領域内の点として定め、境界値問題を解く。これを番号順に行う。番号のつけ方は、強く重り合った領域はなるべく近い番号になるようにするのがよい。この逐次代入法の収束の速さは、主に各部分領域における展開関数系の低次の関数の性質によってきまり、また部分領域の重なり、深いほど速い。また分割の細いほど遅い。しかし展開級数そのものの収束は分割の細いほど速い。

具体的には、項数 $N \rightarrow \infty$ のとき、展開係数そのものは項の番号を固定すれば収束するが、関数値の必要な点での項の大きさとしてはじめて意味をもつ。つまり後の番号の領域の境界値として必要な値については期待通り、項数 N の指数関数的に収束する。また部分領域の境界上の点での値の組みから内部の必要な点での値の組みを与える行列は性質のよいものであって、項数 $N \rightarrow \infty$ に対して悪くならない。その行列を作るときも、上の展開係数を介して作ると、特に問題なく作れる。

4. 簡単な多角形とその分割

基本領域 任意の解が、簡単な関数系で、速く収束

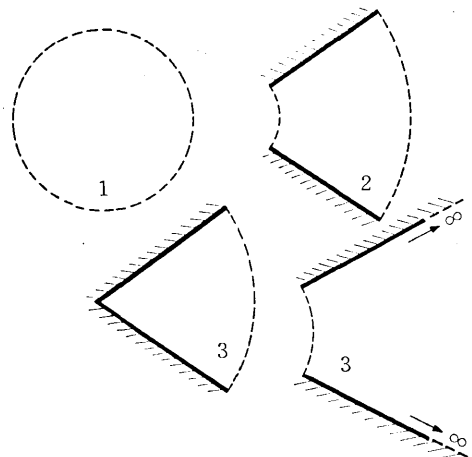


図 1 基 本 領 域

1. 完全な円板
2. 一般の扇形
3. 頂点又は ∞ 遠点を含む扇形

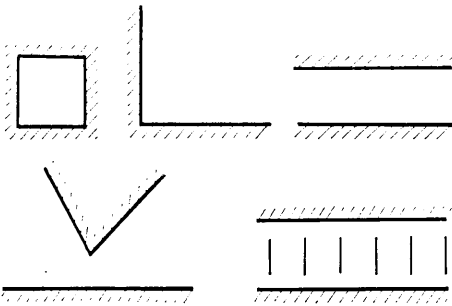


図 2 簡単な多角形領域

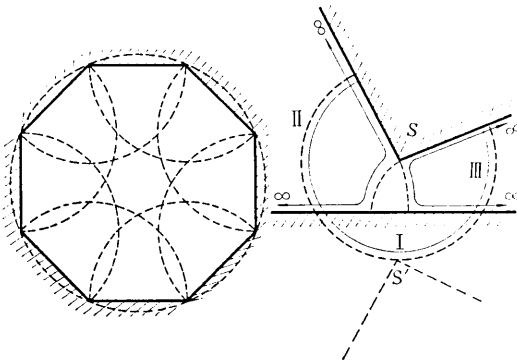


図 3 分割の例

正八角形は完全な円と 8 個の頂点を含む扇形に、右の例では頂点 S を含む扇形 I と 2 つの ∞ 遠点を含む扇形 II, III で覆われている。領域 I は直接かかっている辺による特異点 S の鏡像 S' までしか広げられない。

する級数に展開される領域の形として、次のようなものだけを考える (3 は 2 より収束が速い)。

1. 完全な円板
2. 一般の扇形
3. 頂点または ∞ 遠点を含む扇形

簡単な多角形 問題の基本が扇形なので、簡単な多角形とは次のようなものがある。

1. 本当に辺の数の少ないもの。その内部または外部
2. 正多角形のように対称性のよいもの。
3. 平行な壁の間の無限領域。
4. 3. の中に周期的に多角形、特に線分などがおかれたもの。

分割 与えられた領域を [内部または辺内] に [頂点またはその鏡像] をもたない [扇形または円板] で覆う。

5. 局所的な一般解と合成解

右 3 図では、 S を頂点とし、半径 SS' の“頂点を含む扇形”領域 I, 頂点を含まないが、 ∞ 遠点を含む領域 II, III で覆われている。各領域での解 ψ の展開を

$$\psi^I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^I e^{\lambda_n^I \rho_I} \phi_n^I(\theta^I)$$

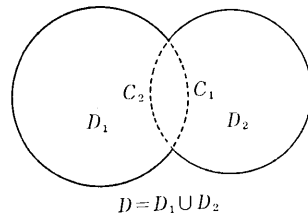


図 4 $C_1 = \partial D_1 - \partial D$ は D_2 の十分内部にある。

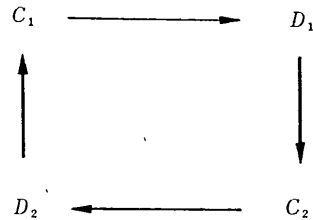


図 5 $C_1 \rightarrow D_1$ は境界値問題を解く
 $D_1 \rightarrow C_2$ は D_1 の内点からなる C_2 上の値を計算する

$$\psi^{\text{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\text{II}} e^{-\lambda_n^{\text{II}} \rho_{\text{II}}} \phi_n^{\text{II}}(\theta^{\text{II}})$$

$$\psi^{\text{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\text{III}} e^{-\lambda_n^{\text{III}} \rho_{\text{III}}} \phi_n^{\text{III}}(\theta^{\text{III}})$$

領域 I において、 ρ^I は頂点 S からの距離の対数、 θ^I は S からの方向の角度 (適当な方向を基準にとる) etc. と表わしたとき、三つの関数 $\psi^I, \psi^{\text{II}}, \psi^{\text{III}}$ が互いの解析延長になっているように、係数 $\{a_n^I\}, \{a_n^{\text{II}}\}, \{a_n^{\text{III}}\}$ をきめれば、問題は解けたことになる。ただし、 $\phi_0^I, \phi_0^{\text{II}}, \phi_0^{\text{III}}$ は、もとの領域の境界における境界条件を満すもの、 $\phi_1^I, \phi_2^I, \dots, \phi_1^{\text{II}}, \phi_2^{\text{II}}, \dots, \phi_1^{\text{III}}, \dots$ はいわゆる Moffatt 関数である。

Schwarz の方法

図 4 のような領域 D における境界値問題を考える。 D が 2 つの部分領域 D_1, D_2 で覆われているとする。その新しい境界 C_1, C_2 はそれぞれ他方の部分領域の十分内部にあるとする。また、 D の境界上で与えられた条件は満し、かつ C_1 上では任意の条件を満す D_1 での、任意の精度の近似解がいつでも作れるとし、 D_2 でも同様とする。このとき、方程式が楕円型線形であるので、 D_1 に関しては、 C_1 での値の変更の大きさ (適当な norm を考えて) とそれによる内部の曲線 C_2 上での値の変化の大きさの比は、 D_1 と C_2 の幾何学的な関係により定まる 1 より小さなある値より小さくなるのがわかる。 $D_2 \rightarrow C_1$ についても同じであるから、 C_1 上で勝手に値を与えて、 D_1 について解き、その解の C_2 での値を使って D_2 について解いたときの解の C_1 での値は、はじめの値より必ず真の値に近い。このとき、誤差の減少するようすは反復回数に指数関数的になる。これが Schwarz の方法である。図 3 右について見れば、部分領域とその新しい境界を図 6 の $D_1, D_2, D_3; C_1, C_2, C_3$

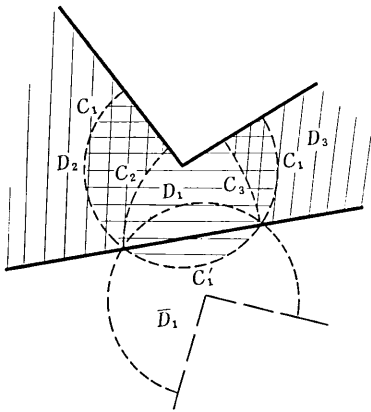


図 6 Schwarz の方法を適用するための領域の分割. 各要素の大きさは, そこでの級数の収束領域より十分小さくなければならない. なお, C_1' 上の値を得るには D_1 の解析延長から直ちにわかる仮想の領域 \bar{D}_1 の内点として定める.

のようにとればよい.

6. 局 所 解

前節の分解において基本となる要素として, 特異点のない完全な円板(の内部または外部または同心2円の間)の場合と扇形の場合とについて, 必要な一般解を与える.

それらを変数分離法の定石通りに解くのであるが, 数値計算の手順の記述のための記号の説明を兼ねて, 簡単に解法を述べる.

2次元空間における Stokes 近似における粘性流体の方程式は次のようになる. 空間の直交座標を (x, y) とし, 流れの速度 \mathbf{v} のそれに対する成分を (u, v) とするとき, 非圧縮性: $\text{div } \mathbf{v} = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$ から $\partial \Psi / \partial x = -v, \partial \Psi / \partial y = u$ によって定義される流れの関数 Ψ が存在する. Ψ に対する運動方程式は

$$\Delta \Delta \Psi = 0, \quad \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

となる. Ψ の解析性を調べる便利のために, 複素座標 $z = x + iy$ を使うと, $\Psi = \Psi(z, \bar{z})$ ($\bar{z} = x - iy$) は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

であるから

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \Psi = 0$$

となる. したがって, 任意の正則関数 $f(z), g(z)$ を使って一般解として*

$$\Psi = I_m F, \quad F = f(z) + \bar{z}g(z)$$

を得る. $I_m F$ が与えられると, $R_c F$ も実数+実数 $\times |z|^2$ を除いて一意に定まり, 以下に見るように, 物理量を表わすのに便利な関数であるので, 以後, 問題を F を求める問題と考えてもよい.

境界条件などに現われる物理量と F や f, g との関係は

$$\begin{aligned} \text{複素速度 } W &\equiv u - iv = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (F - \bar{F}) = f'(z) + \bar{z}g'(z) - \bar{g}(\bar{z}) \end{aligned}$$

$$\text{複素渦度 } \Omega \equiv \rho - i\omega = 4 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = 4g'(z)$$

$$\rho: \text{圧力/粘性率}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}: \text{渦度}$$

円板の場合, 中心を原点として (u, v) は一価関数)

$$\text{内部: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$$\text{外部: } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} + a_0 \log z, \text{ etc.}$$

(Laurent 展開)

とすると要素内で数値計算に耐えうる速さで収束する.

扇形の場合 変数分離法によって解を作る. まず

$$\Psi^B = \left\{ \begin{array}{l} \text{2つの辺の部分での境界条件} \\ \text{内部では微分方程式} \end{array} \right\} \text{数}$$

を任意に1つ固定する. 残余 $\psi = \Psi - \Psi^B$ は

$$\psi = \left\{ \begin{array}{l} \text{辺の部分では斉次の境界条件} \\ \text{弧の部分では } \Psi - \Psi^B \text{ の境界条件} \\ \text{内部では微分方程式} \end{array} \right\} \text{関数}$$

である. Ψ^B の構成の難しさは問題の作り方に依存する. いまはそれはやさしいようになっていと仮定されている. たとえばすぐ後の例1にある意味での簡単な解析性をもつとする.

ψ の弧の部分についての条件は未知であるから, 可能なあらゆる場合について解けなければならない. しかしもとの問題の領域での内部であるから最終的には2つの正則関数で表わされることはたしかである. 以下辺の部分の条件として, 速度が与えられているとする. このとき, 残余 $\psi = \Psi - \Psi^B$ に対応する複素ポテンシャルを F_0 と書くと, F_0 は扇の要(かなめ)を原点とする極座標 (e^{ρ}, θ) に関して非常によい解析性をもつ. 要を原点 $z = e^{\rho+i\theta} = 0$ として, 扇形内 $D: \{\rho_1 < \rho < \rho_2, -\alpha < \theta < \alpha\}$ で正則関数 f, g により次のように与えられる.

$$\text{速度 } W_0(z) = f'(z) + \bar{z}g'(z) - \bar{g}(\bar{z})$$

いまは $\psi = \text{残余}$ であるから, 一辺 $B_1: \theta = -\alpha, z = e^{\rho-i\alpha}$ で

$$W_0(z) = f'(e^{\rho-i\alpha}) + \underbrace{e^{\rho-i\alpha} g'(e^{\rho-i\alpha}) - \bar{g}(\overline{e^{\rho-i\alpha}})}_{z e^{+2i\alpha}} = 0$$

つまり

$$\left. \begin{array}{l} R_c(f'(z) + z e^{2i\alpha} g'(z) - g(z)) = 0 \\ I_m(f'(z) + z e^{2i\alpha} g'(z) + g(z)) = 0 \end{array} \right\} \text{on } z = e^{\rho-i\alpha},$$

$$\rho_1 < \rho < \rho_2$$

よって, 正則関数 $F_1(z) = i(f'(z) + z e^{2i\alpha} g'(z) - g(z))$

$$F_2(z) = f'(z) + z e^{2i\alpha} g'(z) + g(z)$$

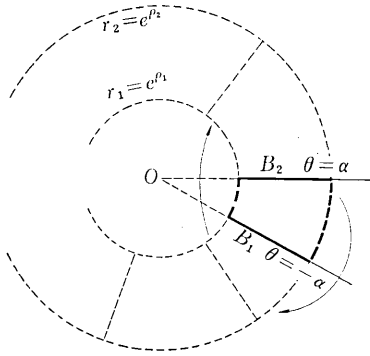


図 7 扇形領域における ψ は扇の要 O を中心とするラセン状 Riemann 面に解析延長される。

はそれぞれ B_1 に関して鏡像の領域まで正則に延長できる。したがって $F_2 + iF_1 = 2g(z)$ も新しい領域で正則、これから $f'(z) = F_2 - (ze^{2i\alpha}g(z) + g(z))$ も正則、したがって $f(z)$ も正則。結局 f, g とも、もとの扇形領域を B_1 に関して折り返した領域まで正則に延長できることがわかった。

同じ議論を他の辺 B_2 についても適用すると、 B_2 の外側に、もとの扇形の 2 つ分延長されることがわかる。

再び B_1 について鏡像をとると、さらに 2 つ分延長され、以下 B_2, B_1, B_2, \dots と交互に鏡像をとると、毎回もとの扇形の 2 つ分づつ延長されて、結局、扇の要を中心とするラセン状の Riemann 面上に正則に延長されることがわかった。つまり残余 ψ は極座標に関して非常によい解析性をもつことがわかる。そこで極座標に移る。

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \quad \zeta = \rho + i\theta, \quad z = e^\zeta, \\ \rho &= \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \\ \theta &= \arg z, \quad -\alpha \leq \theta \leq \alpha \end{aligned}$$

一般解は $F = f(\zeta) - e^\zeta g(\zeta)$ となる。

典型的な Ψ^B として、2 辺 ($\theta = \pm\alpha$) 上で独立に条件を与えやすいものとして

1. 任意の複素数 μ : $F = (He^\zeta + Ge^{\bar{\zeta}})e^{\mu\zeta} \in C^{(1+\mu)\rho}$

(H, G 複素数, H_1, G_1 は実数, ただし, $\mu = \lambda_n$: $\sin 2\lambda_n\alpha = \pm\lambda_n \sin 2\alpha$ の根のときは 2 辺上の値が独立でない)

2. $\mu = 1$: $F = (He^\zeta + (G + G_1\zeta)e^{\bar{\zeta}})e^\zeta$

3. $\mu = -1$: $F = ((H + H_1\zeta)e^\zeta + Ge^{\bar{\zeta}})e^{-\zeta}$

4. $\mu = 0$: $F = (H + H_1\zeta)e^\zeta + (G + G_1\zeta)e^{\bar{\zeta}}$

例 1 $-\infty \ll \rho_1 < \rho_2 \ll \infty$ (要の近くと ∞ 遠点を含まない扇形) で、辺上で両端を含めて解析的な境界条件のときは、境界値を前後に必要なだけ延長して C^∞ の周期関数にして Fourier 式展開で表わすとき、展開係数は番号のどんな代数的 order よりも速く収束させることができる。

例 2 4. の特別のものには、辺上で速度一定、壁に平行、弧を通しての流量 = 0 のもの (Taylor) がある。

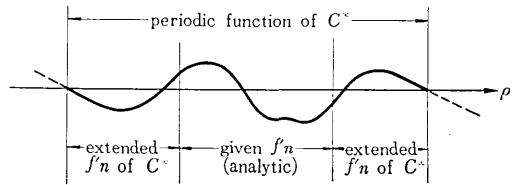


図 8 与えられた関数を滑らかな周期関数に延長してから Fourier 展開する。

対称 $\Psi_S = (\alpha \sin \alpha \cos \theta - \theta \sin \theta \cos \alpha)e^\rho$

反対称 $\Psi_A = (\alpha \cos \alpha \sin \theta - \theta \cos \theta \sin \alpha)e^\rho$

例 3 3. の特別のものには、辺上で速度 = 0, 弧を通しての流量 $\neq 0$ (Hamel) のものがある。

$$\Psi = \sin 2\theta - 2\theta \cos 2\alpha$$

ただし、唯一の角 $0 \leq \alpha^* \leq \pi$, $\tan 2\alpha^* = 2\alpha^*$ のとき流量 = 0 となる。

次に残余 $\psi = \Psi - \Psi^B$ については

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \psi &= e^{-4\rho} \left[\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} + 1 \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right)^2 \right] \\ &\quad \times \left[\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} - 1 \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right)^2 \right] \psi \end{aligned}$$

であるから、 $\varphi \equiv \left[\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} - 1 \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right)^2 \right] \psi$ とおくと、

$$\left(T - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right)^2 \right) \Psi = 0, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix},$$

$$D(T) = \{ \Psi; \psi = \psi' = 0 (\theta = \pm\alpha), \psi, \varphi \in C^2(D) \}$$

$$T = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} - 1 \right)^2 & -1 \\ 0 & \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} + 1 \right)^2 \end{bmatrix}$$

のように書いて、変数分離法が使える。実際、 $\Psi = e^{(\lambda+1)\rho}$

$\phi(\theta)$, $\phi(\theta) = \begin{bmatrix} \psi(\theta) \\ \varphi(\theta) \end{bmatrix}$, $\phi(\theta) = \phi'(\theta) = 0$, ($\theta = \pm\alpha$) とおくと

$$\left\{ T - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right)^2 \right\} \phi = e^{(\lambda+1)\rho} (T - \lambda^2 I) \phi(\theta)$$

α が特別な角 (固有値の縮退をおこす) 以外では、 $(T - \lambda^2 I) \phi(\theta) = 0$ の固有関数系 $\{\phi_n\}$ によって、任意の滑らかな関数 $\phi(\theta)$ は (固有値 λ_n は $n \rightarrow \infty$ で $R_e \lambda_n \rightarrow \infty$)

$$\phi(\theta) = \sum_{N=1}^{\infty} C_N \phi_N(\theta)$$

と表わせる (この完備性の初等的証明は文献 3)。

したがって、問題にならているような $\phi(\rho, \theta)$ は

$$\phi(\rho, \theta) = e^\rho \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{\lambda_n \rho} + b_n e^{-\lambda_n \rho}) \phi_n(\theta) \quad (\star)$$

と展開される。なぜなら、完備性から

$$\rho = \rho_1 \text{ で } \phi(\theta, \rho_1) = e^{\rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(\theta)$$

$$\rho = \rho_2 \text{ で } \phi(\theta, \rho_2) = e^{\rho_2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \phi_n(\theta)$$

と展開されるが、 $|e^{2\lambda_n \rho_1}|/|e^{2\lambda_n \rho_2}| = e^{2R_\epsilon(\lambda_n)(\rho_1 - \rho_2)} \approx 1$ から

$$a_n = (c_n e^{\lambda_n \rho_1} - d_n e^{\lambda_n \rho_2}) / (e^{2\lambda_n \rho_1} - e^{2\lambda_n \rho_2})$$

$$b_n = (c_n e^{-\lambda_n \rho_1} - d_n e^{-\lambda_n \rho_2}) / (e^{-2\lambda_n \rho_1} - e^{-2\lambda_n \rho_2})$$

と解くことができるからである。

特に原点を含むとき、 $\rho_1 \rightarrow -\infty$ で速度有界 $\Rightarrow b_n = 0$,

∞ 遠点を含むとき、 $\rho_2 \rightarrow +\infty$ で速度有界 $\Rightarrow a_n = 0$.

この展開 (☆) の内点での収束の速さについて考よう。

$$e^{-\delta} = \max\left(\frac{r}{r_2}, \frac{r_1}{r}\right), \text{つまり } \rho_1 + \delta \leq \rho \leq \rho_2 - \delta$$

また、 $\rho = \rho_1$ or ρ_2 における特異性が代数 order のとき、定数 R, k があって、 $|c_n|, |d_n| < Rn^k$ となる。

$\phi(\theta)$ の係数 $|a_n e^{\lambda_n \rho} + b_n e^{-\lambda_n \rho}| \leq Rn^k e^{R_\epsilon \lambda_n \delta}$ である。

$\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1}$ (複素共役)。 $\sin 2\alpha \lambda_{2n} / (2\alpha \lambda_{2n}) = (-1)^2 \sin 2\alpha / (2\alpha) \Rightarrow R_\epsilon(2\alpha \lambda_{2n}) \approx (n/2 + 1/2)\pi (n \rightarrow \infty) \Rightarrow R_\epsilon \lambda_n \sim (n+1)\pi / (4\alpha)$ だから、 $\phi_n(\theta)$ の係数 $\sim Rn^k e^{-(n\pi/4\alpha)\delta} \equiv Rn^k \epsilon^n$

$$\text{収束の速さ: } \epsilon = \left\{ \max\left(\frac{r}{r_2}, \frac{r_1}{r}\right) \right\}^{\pi/4\alpha}$$

で与えられる。

7. 数値実験

例1. よく使われる例題として、正方形 (一辺の長さ 1) の容器の 3 辺は固定、一辺が一定の速さで動いているときの内部の粘性流体の運動を (壁で粘着条件の下に) 考える。動く辺の両端では Ψ^B として、§6 の例 2 (Taylor) を使えばよい。領域の分解は、4 隅から半径: $R_n = [2 \sin\{\pi n / (4n+2)\}]^{-1}$ 以内の領域をとって、それぞれ要素 I, II, I', II' とする。実際には各要素の残余関数 ψ を $4n$ 個の Moffatt 関数の一次結合で代用するので、要素の縁 (弧の部分) 上に等間隔に $2n$ 個の代表点をとる。 R_n を上のようにとると、中央の 4 点は 2 重点になる。各要素での代表点を左右の 2 つの組に分け、組の番号を $j=1, \sim 4, 1' \sim 4'$, その上での関数値: 流れの関数 ϕ_{ij} , 滑度 ω_{ij} などをまとめて $y_j = (\phi_{ij},$

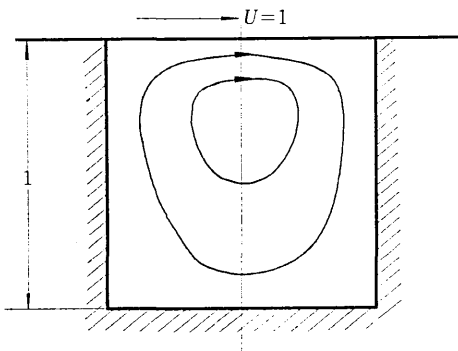


図 9 例題 1, 2

正方形 (一辺の長さ 1) の容器の一辺は速度 1 で動き、その他の壁は静止している時の流れ。流れの様子は左右対称である。

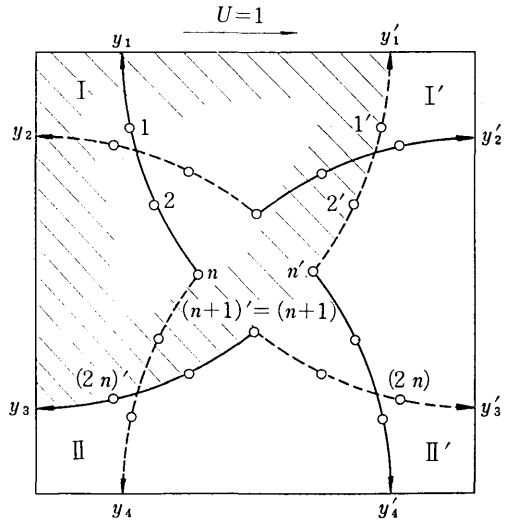


図 10 4 隅から半径 $R_n = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi n}{4n+2}}$ の領域を要素 I, I', II, II' とする。要素 I の境界点での値は y_1' と y_3 とからなる。etc.

$\phi_{2j}, \dots, \omega_{1j}, \dots, \omega_{nj}$, $j=1 \sim 4, 1' \sim 4'$ とする。

このとき、各要素での基本操作は

要素 I (y_1, y_3) から (y_1, y_2) を決める。

要素 II $(y_2, y_4) \rightarrow (y_3, y_4)$

要素 I' $(y_1, y_3) \rightarrow (y_1', y_2')$

要素 II' $(y_2', y_4) \rightarrow (y_3', y_4')$

であるが、問題の対称性を考えると、必要な手順は

出発値: $(y_1, y_3, y_4) = 0$ とおく

→ 対称性により y_1 を y_1' とみなす

要素 I $(y_1', y_3) \rightarrow (y_1, y_2)$

対称性により $y_4 \rightarrow y_4'$

→ 要素 II $(y_2, y_4) \rightarrow (y_3, y_4)$

これを繰返すと加速なしの Schwarz の反復法になる。要素 I と II は形が同じであるから、操作は同じである。ただその対象が異なるだけである。各要素での展開の収束の速さは同じで

$$\epsilon = \left(\frac{r}{r_2}\right)^{\pi/4\alpha} = R_n \pi / (2 \cdot \pi/2) = R_n = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi/4}{1+1/2n}\right)}$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2}}$$

反復法の収束の回数 ∞n , 基本操作としてはベクトル変換は n^2 , したがって手数 ∞n^3 (加速なし)。

基本操作のための行列は、代表点のとり方の対称性から、例えば、関数値の組 (y_1, y_3) を対称部、反対称部に簡単に分れるので、行列はほぼ半分に分解して使える。

例 2. 同じ問題を要素のとり方を少し変えて、正方形にとって、図のようにする。これは定差法の分割のとり方に沿ったものである。代表点は、タテ、ヨコ $2n+1$

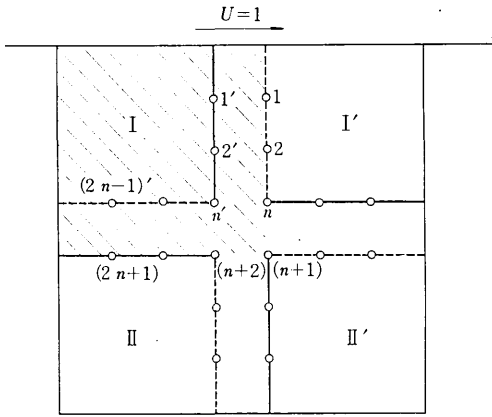


図 11 例えば要素 I での操作は点 1~点 (2n+1) の値から点 1'~点 (2n-1)' の値を決めることである。

等分の格子点上にのっている。各要素の操作は、例えば要素 I では点 1~点 (2n+1) 上の関数 → 点 1'~点 (2n-1)' 上の関数値をきめることである。級数の収束の速さは $\varepsilon \sim 1/\sqrt{2}$ は例 1 と同じで、打切項番号 N は

$$N = (2n+1) \text{ 代表点の数} \times 2\phi \text{ と } \omega \approx 4n$$

$$\text{打切誤差 } \varepsilon^N \sim 4^{-n}$$

手順

対称性から I' を II, II' を II に帰着、等々は例 1 と同じ。

例 3. (無限領域) ピストンの運動に伴う流れに相当する。扇形領域の 1 つは ∞ 領域で、開き角: $\alpha=0$ したがって $|\rho_1 - \rho| / (2\alpha) \cong 1/2$ これから級数の収束の速さは

$$\varepsilon = e^{-(1-\rho_1-\rho_2)/4\alpha} \approx e^{-\pi/4} < \frac{1}{2}$$

つまり、この部分については、直角部分の 2 倍以上速く収束するので、全体としての収束は直角部分のそれによってきまる。また要素 I の Ψ^B も § 6 例 2, $\alpha \rightarrow 0$ (Poisuille)。

手順 はじめ×印の点での出発値を 0 とおく。

→ 反対称の下半分に延長すると△印が定まる。

⋯→ 要素 I (∞ 領域) で解いて○印での値を決める。

— 要素 II について解いて×印での新しい値

問題の対称性からすぐ → のように繰返せばよい。さらに、要素 I (代表点のとり方を含めて) の対称性から、ベクトル変換行列は対称部分、反対称部分にわけると半々に分解するが、問題の対称性から、反対称部分しか現われないので、行列も反対称部分だけを使う。するとあらためてベクトルを反対称に延長して、△印を定める操作は不要であり、→ は ⋯→ のようになる。

結果 例 2 における結果、例 2, 例 3 の代表点の数に対する誤差の減少していく様子とを図 13~15 に掲げる。

計算時間 使用した計算機は、東大生産技術研究所の FACOM 270-30 で、2 重精度で掛算 85 μsec 、加算 11 μsec (平均) (総合的に速度は HITAC 5020E の 10

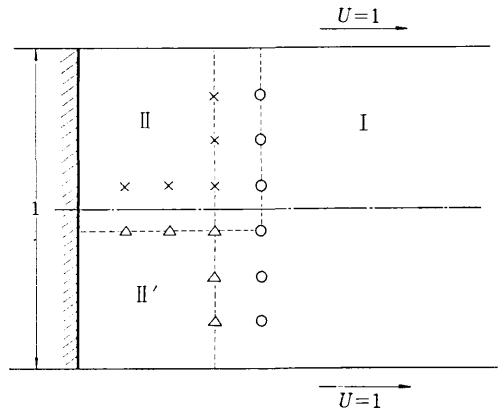


図 12 ピストンの運動に伴う流れ。 Ψ, ω とも上下に反対称である。要素 I での Ψ^B は 6 例 2 で $\rho=2\alpha x, \theta=2\alpha y$, とすると

$$\frac{3}{4} \alpha^{-1} \Psi_A \rightarrow \Psi^B = y^3 - \frac{y}{2} \quad (\alpha \rightarrow 0)$$

分の 1 くらい) のものである。

収束判定は、代表点での値を 10^{-13} に収束するまでの時間とし、例 2, 例 3 とほとんど同じで、

$$n=8 \text{ で約 } 100 \text{ sec (真の誤差 } \leq 10^{-10})$$

$$n=10 \text{ で約 } 200 \text{ sec (真の誤差 } \leq 10^{-12})$$

展開係数の誤差のグラフにおいて、単純な予測の 2 倍近くもよいのは Gauss の数値積分のときのような級数の繰り込みが部分的に行われているためと考えられる。また、 $n \geq 12$ で乱れの目立つのは、反復終りの条件 (収束判定) が甘かったことと、計算機の数表現の桁数の不足に依っているものと思われる。また系列 C のものは、都合で、原点を $x=1/2$ のところにとってしまったので、他に比して非常によいように見えるが、実際に関数値が計算されるのが $x \leq 1/2$ であるから、これはむしろ関数値への寄与に対する実際の誤差を示しているわけである。

Moffatt の固有値の縮退する角 α , この角のときは、一般の角に対する ROUTINE は使えないが、

i) $\alpha = \pi/2, \pi$ のときは、固有関数系がなお完備であるので、専用の ROUTINE を用意すればよい。

ii) $\alpha = \alpha_n, n=1, 2, \dots, \infty$ のとき、

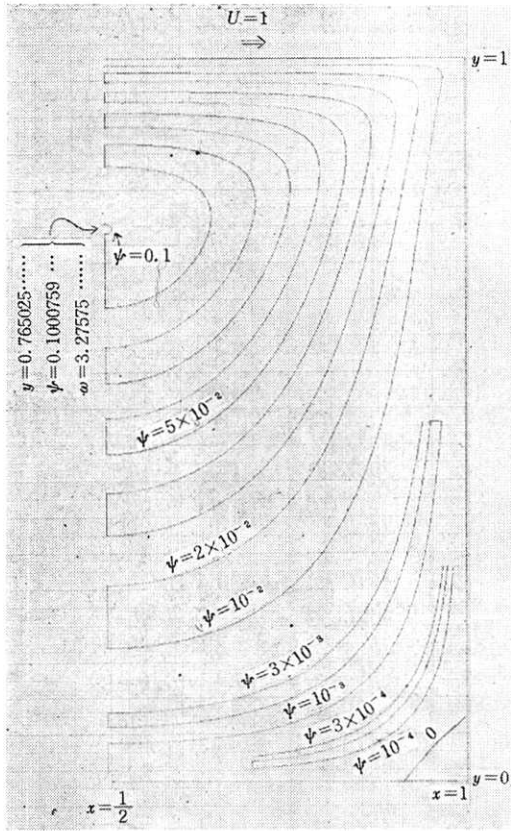
ここに α_n は

$$\frac{\sin 2\alpha_n}{2\alpha_n} = \pm \frac{\sin 2\alpha_n^*}{2\alpha_n^*}$$

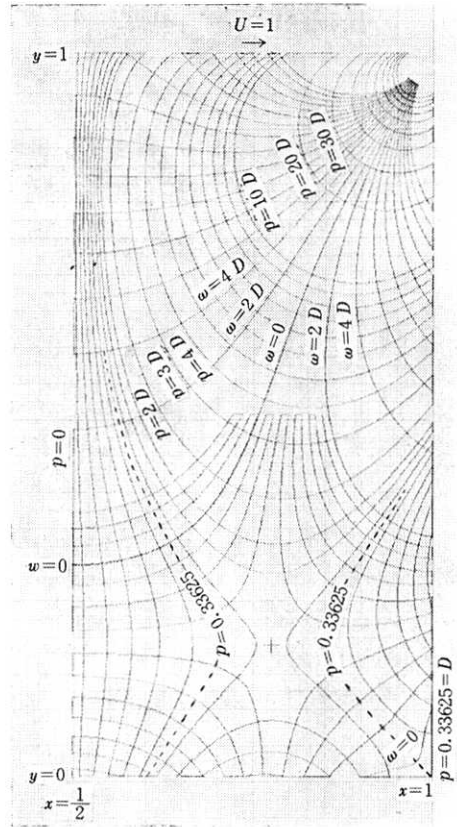
$$\tan 2\alpha_n^* = 2\alpha_n^* \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

このときは、1 つだけ固有関数でない関数をつけ加えないと、固有関数系だけでは完備系を成さない。したがって変数分離法はそのままでは使えない。

$$2\alpha_1 \approx 146^\circ, 2\alpha_2 \approx 156^\circ, \dots$$



(a) 例題 2 における Ψ (流れ関数)



(b) ω (渦度) と p (圧力)

図 13

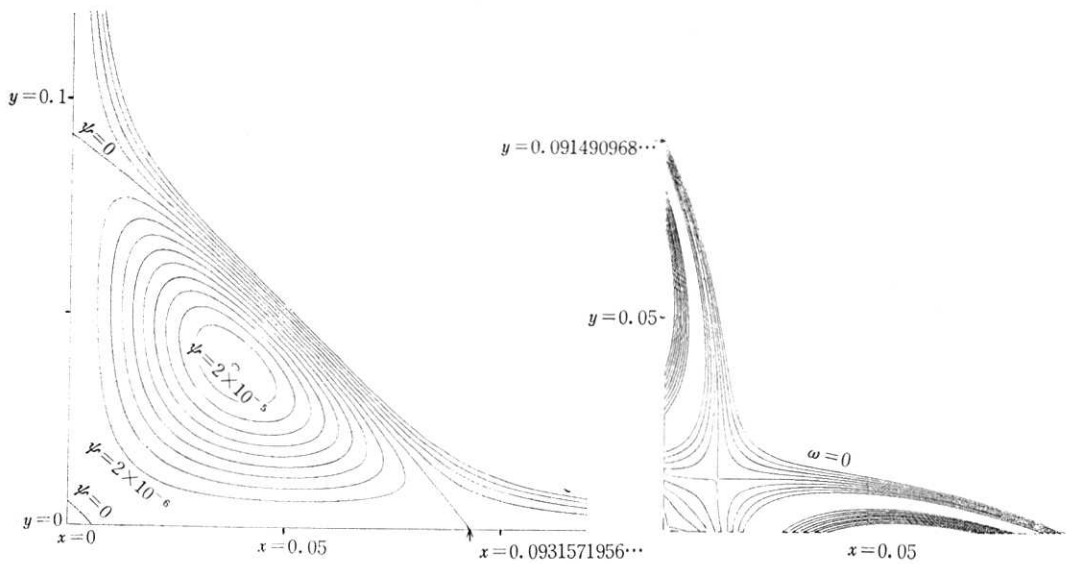


図 14 $(x, y) = (0, 0)$ 付近の Ψ と ω

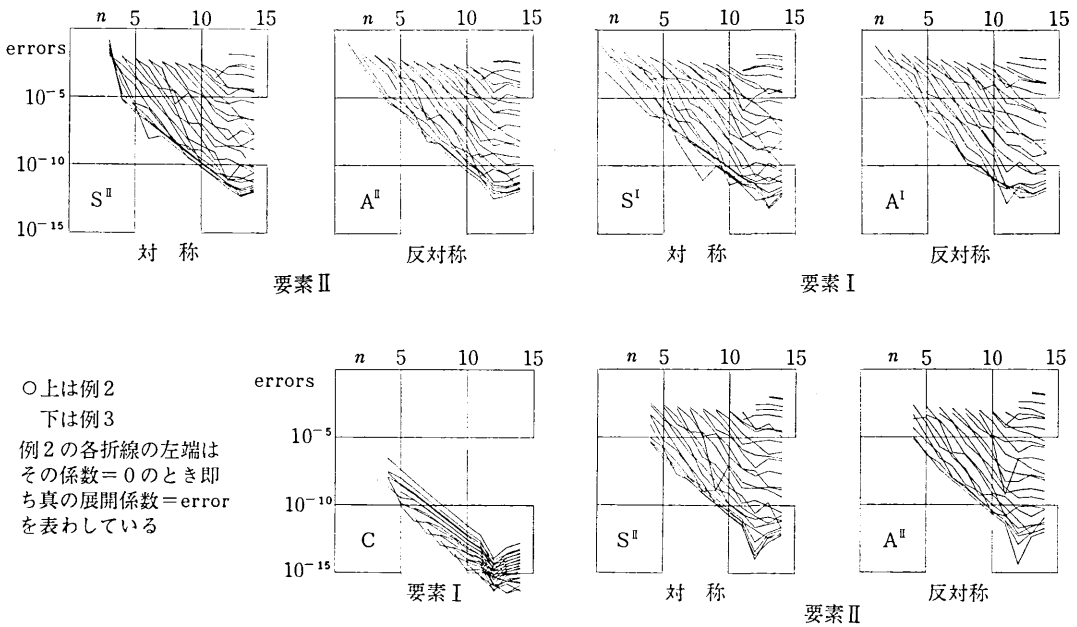


図 15 各要素での代表点の個数 $2n+1$ (n : 横軸) と展開係数の誤差 (縦軸) 実は $n=16$ のときの値との差. これらの勾配は本文中の荒い予測よりむしろはるかに良い.

8. ま と め

問題の近似解をなるべく少ない個数のパラメータによって表現することにより、解法の手数を節約するという当然の考え方であるが、問題そのものの、本当に知りたい事は何か、またそれを簡潔に表現する方法は何かについて反省を加えれば、多くの問題がもっと容易になると思う。計算機のある現在は、そのパラメータの個数は、2~3個でなくてもよく、 $10^2 \sim 10^6$ でもよくなった。しかし、そのくらいの個数はなんとか扱えるとはいえ、やはり理解できる情報量がそれほど多くなったのではない。

なお、§6の*印以下の、複素関数表現とその解析延長は、ほとんど東大理物今井功教授の数理研におけるご講演 (1971.7) を勝手に引用させていただいた。

(1973年11月16日受理)

参 考 文 献

- 1) Masuda, K., Proc. Japan Academy 43 (1967) p. 827 ~832.
- 2) Moffat, H.K.: J. Fluid Mech. 18/1 (1964) p. 1~18.
- 3) 金子: 京大数理解析研究所講究録, 187 (1973)

