

梁理論の精密化に関する二、三の試み (その 4)

Some Attempts on the Refinement of Modern Engineering Theory of Beams (IV)

—梁の剪断変形理論—

—Shear Deformation Theory of Beam—

川井 忠彦*・藤谷 義信*

Tadahiko KAWAI and Yoshinobu FUJITANI

これまで述べてきた梁理論は、剪断ひずみ無視の上に成り立っている。しかしながら、実際の梁構造物の応力解析においては、剪断変形の影響がしばしば問題になる。とくに、薄肉構造物においてその影響は大きく重要である。この小論においては、まず Saint-Venant によって初めて提唱された梁の剪断変形理論から、E. Reissner の剪断遅れ (shear-lag) 理論を経て、剪断変形理論の体系が形成される過程について概観し、従来の理論の限界とその修正理論の定式化について論ずる。あわせて、二、三の簡単な解析例についても述べる。

1. 梁の剪断変形理論の概要

梁の剪断変形理論は、1856 年 Saint-Venant によって初めて提案された。そこで、まずこの理論の紹介から話を始めることにしよう。

よく知られているように、梁の曲げ (ここでは y 軸まわりの曲げ) の問題は次の基礎方程式

$$EI_{xx} \frac{d^4 u(z)}{dz^4} = q(z) \quad (4.1)$$

を与えられた境界条件のもとで解くことに帰着する。

そしてまた、梁の曲げの問題においては、曲げモーメント M_y 、剪断力 V_x と変位 u との間には次の関係がある。(図 4.1 参照)

$$M_y = EI_{xx} \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (4.2)$$

$$V_x = -\frac{dM_y}{dz} = -EI_{xx} \frac{d^3 u}{dz^3} \quad (4.3)$$

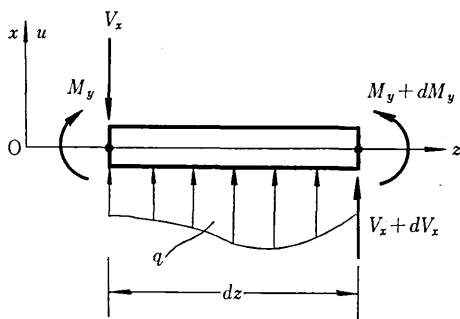


図 4.1 梁の断面力

すなわち、梁の曲げにおいて曲げモーメント M_y の勾配 dM_y/dz に等しい剪断力 V_x が断面上に作用しているわけであり、したがって、それにつらうべき剪断応力 τ_{xz} および τ_{yz} が存在しなければならない。問題を簡単にするために、図 4.2 のような矩形断面梁の曲げを考えてみよう。曲げモーメント M_y にもとづく軸応力 σ_x は梁理論より次式で与えられる。

$$\sigma_x = -\frac{M_y x}{I_{xx}} \quad (4.4)$$

さて、図 4.2 の斜線を施した微小直方体の z 方向のつらあいを考えてみよう。断面の対称性から、 τ_{yz} の存在を無視すると次のようなつらあい方程式が得られるであろう。(図 4.3 参照)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} = 0 \quad (4.5)$$

(4.4) 式を (4.5) 式に代入し、(4.3) 式の関係を用いると、

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = -\frac{V_x x}{I_{xx}} \quad (4.6)$$

の関係が得られる。この式を x で積分し、次の境界条件

$$x = \pm \frac{h}{2} \text{ で } \tau_{xz} = 0 \quad (4.7)$$

を考慮すれば、剪断応力 τ_{xz} の分布は次のようになる。

$$\tau_{xz} = \frac{V_x}{2I_{xx}} \left(\frac{h^2}{4} - x^2 \right) \quad (4.8)$$

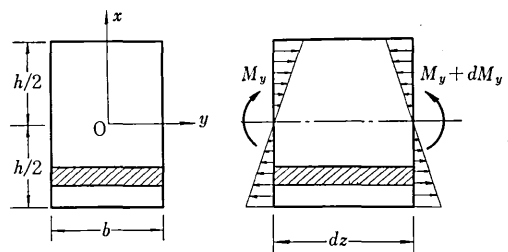


図 4.2 矩形断面梁の曲げ

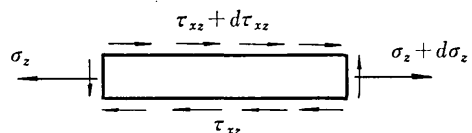


図 4.3 微小要素の軸方向の力のつらあい

* 東京大学生産技術研究所 第 2 部

これは、梁の初等的曲げ理論における剪断応力の決定法である。

さて、剪断変形による断面の付加ゆがみを W_s とすれば、梁の変位関数は次式で与えられることになる。

$$\begin{cases} U(x, y, z) = u(z), & V(x, y, z) = 0 \\ W(x, y, z) = -xu'(z) + W_s(x, y, z) \end{cases} \quad (4.9)$$

したがって、

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = G \frac{\partial W_s}{\partial x} \quad (4.10)$$

となるから、

$$W_s = \frac{V_x}{2GI_{xx}} \left(\frac{h^2}{4} x - \frac{1}{3} x^3 \right) \quad (4.11)$$

が得られる。 W_s は積分定数を含みうるが、矩形断面の場合、中立軸に関し W_s は逆対称となっていると考えられるから、それを零とおくことができる。

次に、(4.8) 式を用いて、梁の単位長さあたりの剪断変形のひずみエネルギー V_s を求めてみよう。

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{1}{2} \iint_G \tau_{xz}^2 dx dy \\ &= \frac{b}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{V_x^2}{4I_{xx}^2} \left(\frac{h^2}{4} - x^2 \right)^2 dx \\ &= \frac{V_x^2 b h^5}{240 G I_{xx}^2} = \frac{6 V_x^2}{5 G A} \end{aligned} \quad (4.12)$$

ここに、矩形断面であるので、断面 2 次モーメント I_{xx} 、断面積 A として次式を用いた。

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12}, \quad A = bh \quad (4.13)$$

そこで、いま

$$V_s = \frac{V_x^2}{2GA}, \quad (4.14)$$

とおくと、 $A_s = (5/6)A$ となる。ここに、 A_s を有効剪断断面積と呼ぶ。(4.14) 式は、剪断変形のひずみエネルギーは有効剪断断面積 A_s に一様剪断応力 $\tau = V_x/A_s$ が分布したと考えたときのひずみエネルギーに等しいことを意味する。また、梁理論では、

$$A_s = kA \quad (4.15)$$

とおき、 k を有効剪断係数と呼ぶこともあり、矩形断面の場合は、 $k=5/6$ である。

さて、このようにして求められた梁の剪断変形による付加たわみをも考慮した梁の平衡方程式を次に考えてみよう。まず、任意断面内において、梁の中心線のたわみ $u_s(z)$ にもとづく剪断ひずみ $u_s'(z)$ とその断面内の平均剪断応力 τ とは次の関係式で結ばれていると考えられる。

$$\tau = \frac{V_x}{kA} = G u_s'(z) \quad (4.16)$$

この式はまた、(4.14) 式の梁の単位長さあたりの剪断ひずみエネルギー V_s を考えて、

$$V_s = \frac{1}{2} V_x u_s' = \frac{V_x^2}{2kGA} \quad (4.17)$$

より求められる式である。さて、梁理論の基礎式より V_x の変化を q とおくことができるから、

$$q = \frac{dV_x}{dz} = kGA u_s''(z) \quad (4.18)$$

が得られる。したがって、梁の全体のたわみ $u(z)$ は、単純曲げによるたわみを $u_b(z)$ として、

$$u(z) = u_b(z) + u_s(z) \quad (4.19)$$

であるから、剪断変形の影響を考慮にいれた梁の曲げの方程式は次のようになる。

$$EI_{xx} u'' = M_y + \frac{EI_{xx} q}{kGA} \quad (4.20)$$

この理論は材料力学レベルでは十分役に立つ理論であるが、 V_x, V_y や M_x, M_y が連成する場合、 k をどのように評価するのが合理的であるかについての考察がなされていない。

以上述べた 2 次元剪断変形理論を、軸方向の応力 σ_x の変化も考慮に入れて一般化したのが、3 次元剪断変形理論であって、次の平衡方程式をその出発点としている。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

これは、3 次元弾性論の基礎方程式において、

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (4.22)$$

とした場合の式である。(4.21) 式の初めの 2 つの式を断面全体にわたって積分すると次のような式が得られる。

$$\frac{dV_x}{dz} + q_x = 0, \quad \frac{dV_y}{dz} + q_y = 0 \quad (4.23)$$

これはいうまでもなく、剪断力 (V_x, V_y) と分布横荷重 (q_x, q_y) との関係を示す梁の曲げ理論の基礎式である。

さて、梁の曲げ振りに関する近代的理論によれば、軸応力は次式で与えられる。(その 1) 4 節参照)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) = E \{ w'(z) - x u''(z) \\ &\quad - y v''(z) + \theta''(z) \omega_n(x, y) \} \\ &= \frac{P}{A} - \frac{M_y x}{I_{xx}} + \frac{M_x y}{I_{yy}} + \frac{M_o \omega_n}{I_o} \end{aligned} \quad (4.24)$$

この式を(4.21)式の第 3 式に代入すれば、梁理論の基礎式(4.3)などを参考にして、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} \\ + \left\{ \left(Z - \frac{p}{A} \right) + \frac{V_x x}{I_{xx}} + \frac{V_y y}{I_{yy}} - \frac{M_x \omega_n}{I_o} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

が得られる。これは、応力成分で表わされた z 軸方向の
つりあい方程式である。これに付随する表面条件は、梁
の側面上で

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0 \tag{4.26}$$

で与えられる。ここに (l, m) は断面 z の境界線に立
た外向き法線 \mathbf{n} の方向余弦を表わす。したがって、問
題は (4.25) 式を、表面条件式 (4.26) と $z=0$ およ
び l における境界条件を満足するように解く問題となる。

1941 年 E. Reissner はこのような形で薄肉箱形梁にお
ける剪断遅れ理論を初めて解析したのである。

E. Reissner の理論は Love の名著“数理弾性学”に
詳述してあるような応力法にもつづく解析法で、薄肉梁
に適用し適当な簡略化を行なって見通しのよい解を求め
たものであるということができよう。その理論の
要点は 3 節で簡単に紹介することにし、ここではさら
に、後の議論のために、変位を用いて表わした平衡方
程式を求めてみることにしよう。

さて、梁の断面が剛であるという仮定の上に立脚して
いけば、剪断変形による付加変位成分 (U_s, V_s, W_s) の
うち断面のゆがみ成分 $W_s(x, y, z)$ のみを考えればよ
い。なぜならば、 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy}$ の条件から、

$$\left. \begin{aligned} U_s(x, y, z) &= f(z) - yg(z) \\ V_s(x, y, z) &= h(z) + xg(z) \end{aligned} \right\} \tag{4.27}$$

という形にならざるを得なくなり、ことさら U_s, V_s を
導入する必要性がなくなるからである。したがって
(4.25) 式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} G \left(\frac{\partial^2 W_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} \right) + \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 W_s}{\partial z^2} \\ + \left\{ \left(Z - \frac{\rho}{A} \right) + \frac{V_x x}{I_{xx}} + \frac{V_y y}{I_{yy}} - \frac{M_z \omega_n}{I_\omega} \right\} = 0 \end{aligned} \tag{4.28 a}$$

表面条件

$$\frac{\partial W_s}{\partial n} = 0 \tag{4.28 b}$$

上式において、外力項としては V_x のみを考慮し、
 $\partial^2 W_s / \partial z^2$ の項を無視すれば、

$$G \left(\frac{\partial^2 W_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} \right) + \frac{V_x x}{I_{xx}} = 0 \tag{4.29}$$

が得られる。この式でさらに $\partial^2 W_s / \partial y^2$ を無視して W_s
を求めれば、すでに述べた矩形断面梁の初等剪断変形解
析の場合に帰着することがわかるであろう。

(4.28) 式に対応する仮想仕事方程式は、明らかに次式
で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta \iiint \left[\frac{G}{2} \left\{ \left(\frac{\partial W_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_s}{\partial y} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. + \frac{(1-\nu)E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial W_s}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ - \iiint \left\{ \left(Z - \frac{\rho}{A} \right) + \frac{V_x x}{I_{xx}} + \frac{V_y y}{I_{yy}} - \frac{M_z \omega_n}{I_\omega} \right\} \end{aligned}$$

$$\times \delta W_s dx dy dz = 0 \tag{4.30}$$

2次元剪断変形問題の場合には、

$$\begin{aligned} \delta \iint \frac{G}{2} \left\{ \left(\frac{\partial W_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_s}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ - \iint \left\{ \left(Z - \frac{\rho}{A} \right) + \frac{V_x x}{I_{xx}} + \frac{V_y y}{I_{yy}} - \frac{M_z \omega_n}{I_\omega} \right\} \\ \times \delta W_s dx dy = 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

が仮想仕事方程式となる。

最後に、Saint-Venant の創始にかかるといわれてい
る弾性論に基礎をおく伝統的な剪断変形理論の概要を紹
介しておこう。この解析法は Love や Sokolnikoff の著
書にも記されているように、断面内応力零 ($\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$) の仮定から出発し、応力のつりあい条件、適合条件ならびに境界条件を満足する解を解析的に求めようとする方法である。固体力学の発展史上、Saint-Venant の名を不朽ならしめたこの剪断変形理論は誠に精緻で壮麗であるが、厳密解の求められたのは Saint-Venant が研究した片持梁の先端に集中荷重が加えられた問題以外ほとんど見当たらない。これは全く意外な感じがするが、一般に 3次元弾性論の問題となるので解析解がほとんど求められていないのである。

まず、梁の工学的理論に用いられる曲げによる直応力成分

$$\sigma_z = -\frac{M_y x}{I_{xx}} + \frac{M_x y}{I_{yy}} \tag{4.32}$$

が梁の内部応力として与えられているとする。この場合
にはもちろん振り変形は起こらないと仮定している。

まず、3次元の応力のつりあい方程式は $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ の仮定から次式のように与えられる。

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{4.33}$$

(4.33) の第 3 式に (4.32) 式を代入すれば

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \left(\frac{V_x x}{I_{xx}} + \frac{V_y y}{I_{yy}} \right) = 0 \tag{4.34}$$

が得られるので、(4.33) 式と (4.34) 式より、任意の関数 $F(x, y)$ を導入して τ_{xz}, τ_{yz} は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{V_x}{I_{xx}} x^2, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{V_y}{I_{yy}} y^2 \end{aligned} \tag{4.35}$$

ここに導入された未知関数 $F(x, y)$ は、Beltrami-Michell の応力適合条件式

$$\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = 0 \tag{4.36}$$

ここに $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_z$

あるいは

$$\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{V_x}{(1+\nu)I_{xx}} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{V_y}{(1+\nu)I_{yy}} = 0 \tag{4.37}$$

を満足しなければならないことから決定される。

さて、(4.35)式を(4.37)式に代入すれば

$$\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 F) = \frac{\nu V_x}{(1+\nu)I_{xx}}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 F) = -\frac{\nu V_y}{(1+\nu)I_{yy}} \quad (4.38)$$

が得られ、容易に次式が求められる。

$$\nabla^2 F = -\frac{\nu V_y}{(1+\nu)I_{xx}}x + \frac{\nu V_x}{(1+\nu)I_{yy}}y + C \quad (4.39)$$

(4.39)式の特解を多項式の形で求めると、

$$F(x, y) = \frac{\nu}{6(1+\nu)} \left(\frac{V_x}{I_{xx}} y^3 - \frac{V_y}{I_{yy}} x^3 \right) + f(x, y) + \frac{C}{4}(x^2 + y^2) \quad (4.40)$$

ここに、 $\nabla^2 f = 0$ である。

ここに導入された積分定数 C は、物理的には Saint-Venant の振りに対応する項であるので、ここではこれを零とおくことにする。

したがって、新たに導入された調和関数 $f(x, y)$ の共役関数 $g(x, y)$ を、Cauchy-Riemann の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x} \quad (4.41)$$

を用いて定義すると、(4.35)式と(4.40)式より容易に次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= -\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{V_x}{2(1+\nu)I_{xx}} \{(1+\nu)x^2 - \nu y^2\} \\ \tau_{yy} &= -\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{V_y}{2(1+\nu)I_{yy}} \{\nu x^2 - (1+\nu)y^2\} \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

ここに、もちろん

$$\nabla^2 g = 0 \quad (4.43)$$

である。

境界表面で外力が作用していない条件は

$$\tau_{xx} \cos(x, n) + \tau_{yy} \cos(y, n) = 0 \quad (4.44)$$

で与えられるから、これに(4.42)式を代入すると次のような $g(x, y)$ に関する境界条件式が得られる。

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{V_x}{2(1+\nu)I_{xx}} \{(1+\nu)x^2 - \nu y^2\} \cos(x, n) + \frac{V_y}{2(1+\nu)I_{yy}} \{\nu x^2 - (1+\nu)y^2\} \cos(y, n) \quad (4.45)$$

したがって、問題は(4.45)式の境界条件を満足する2次元調和関数 $g(x, y)$ を決定する問題に帰着したことになる。

$g(x, y)$ が求められれば、(4.42)式より断面内の剪断応力分布が求められるから、その結果を次の応力-ひずみの関係式の右辺に代入し、積分を実行すれば梁の変位が求められることになる。

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

若干の計算の後に次のような変位に関する一般式が得られる。(詳しくは文献 2) 参照)

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{V_x}{EI_{xx}} \left\{ \frac{\nu}{2}(l-z)(x^2 - y^2) - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{2}lz^2 \right\} \\ &\quad + \frac{V_y \nu}{EI_{yy}} (l-z)xy - cy + bx + d \\ V(x, y, z) &= \frac{V_y}{EI_{yy}} \left\{ \frac{\nu}{2}(l-z)(y^2 - x^2) - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{2}lz^2 \right\} \\ &\quad + \frac{V_x}{EI_{xx}} (l-z)xy + cx - az + e \\ W(x, y, z) &= \frac{V_x}{EI_{xx}} \left\{ \varphi_1(x, y) - \left(lz - \frac{1}{2}z^2 \right) x \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6}(2+\nu)x^3 + \frac{\nu}{2}xy^2 \right\} \\ &\quad + \frac{V_y}{EI_{yy}} \left\{ \varphi_2(x, y) - \left(lz - \frac{1}{2}z^2 \right) y \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6}(2+\nu)y^3 + \frac{\nu}{2}x^2y \right\} \\ &\quad - bx + ay + f \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

ここに $\varphi_1(x, y)$ および $\varphi_2(x, y)$ はそれぞれ次の境界条件を満足する調和関数である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \{(1+\nu)x^2 - \nu y^2\} \cos(n, x) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= -\{\nu x^2 - (1+\nu)y^2\} \cos(n, y) \end{aligned} \right\} \text{on } C \quad (4.48)$$

今簡単のために荷重 V_x のみによる片持梁の曲げの問題を考え、座標軸が慣性主軸にとられたとすれば、

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{V_x}{EI_{xx}} \left\{ \frac{\nu}{2}(l-z)(x^2 - y^2) - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{2}lz^2 \right\} \\ &\quad - cy + bx + d \\ V(x, y, z) &= \frac{V_x \nu}{EI_{xx}} (l-z)xy + cx - az + e \\ W(x, y, z) &= -\frac{V_x}{EI_{xx}} \left\{ \Phi(x, y) + xy^2 + \left(lz - \frac{1}{2}z^2 \right) x \right\} \\ &\quad - bx + ay + f \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

ここに、 $\Phi(x, y)$ は次式で定義される調和関数である。

$$\Phi(x, y) = -\varphi_1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2\nu} \right) (x^3 - 3xy^2) \quad (4.50)$$

(4.44)式を用いて固定端の条件を調べてみると、

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, 0) &= \frac{\nu V_x l}{2EI_{xx}}(x^2 - y^2) - cy + d \\ V(x, y, 0) &= \frac{\nu V_x l}{EI_{xx}}xy + cx + e \\ W(x, y, 0) &= -\frac{V_x}{EI_{xx}}\{\Phi(x, y) + xy^2\} - bx + ay + f \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

となる。したがって未定係数 a, b, c, d, e, f をどんなに決めても、固定端の条件

$$U(x, y, 0) = V(x, y, 0) = W(x, y, 0) = 0$$

は満たされることはあり得ない。たとえば、いま原点ですべての変位が零となるようにすれば $d=e=f=0$, $\Phi(0, 0) = 0$ の拘束条件が加えられることになるが、 $z=0$ の断面上で原点を除き、その断面内の変位 (U, V) は x, y の二次関数であり、ゆがみ W は $\Phi(x, y)$ に従って複雑に変化することになる。

換言すれば Saint-Venant の与えたこの梁の曲げ問題の解も、肝心かなめの固定端の条件がほとんど満たされていないという不運な結果になってしまっているのである。

このことからして、固体力学における3次元弾性問題の解を厳密に求めることが、いかにむずかしいということがわかれると思う。ところが、この解の不完全さは幸運にも Saint-Venant の原理によって、固定端より離れるに従って急速に消滅し、その近傍を除けば上述の Saint-Venant の解は極めて精度の高い解を与えるようであることも付言せねばなるまい。この問題について興味のある読者は Love や Sokolnikoff の著書を参考にされたい。

最後にこの問題の有限要素解析法を展開するために (4.43)式、(4.45)式と等価な $g(x, y)$ に関する次の汎関数表示式を与えておく。

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \iint \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ &+ \int \frac{V_x}{2(1+\nu)I_{xx}} \{(1+\nu)x^2 - \nu y^2\} g dy \\ &+ \int \frac{V_y}{2(1+\nu)I_{yy}} \{\nu x^2 - (1+\nu)y^2\} g dx \end{aligned} \quad (4.52)$$

以上、梁の剪断変形理論の概要について述べたが、次に、この剪断変形解析の副産物として得られる剪断中心について説明し、また、本解説 (その1)~(その3)で誘導した剪断中心との関係についても若干考察してみよう。剪断中心は、梁理論の基礎仮定を断面剛 (断面がひずまない) とする場合と、断面内無応力とする場合とで、その位置が少し異なるが、ここでは前者の立場をとり話を進めていくことにする。

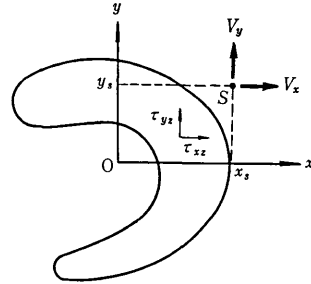


図 4.4 剪断中心 S

さて、梁理論においては、剪断力 V_x, V_y と断面内応力 τ_{xx}, τ_{yx} との間には次の関係が成り立つ。

$$V_x = \iint \tau_{xx} dx dy, \quad V_y = \iint \tau_{yx} dx dy \quad (4.53)$$

一般に、剪断力 V_x, V_y の大きさやその作用点の位置により、梁は曲げ変形のみならず捩り変形が生ずる。ところが、いま断面を含む平面上の特定の点を通る剪断力は、その大きさに無関係に、梁に曲げ (一般に2軸曲げ) 変形だけを起こさせることができ、その点を断面の剪断中心と呼んで $S(x_s, y_s)$ で表わす。すなわち、剪断中心を通る剪断力に対しては、断面内応力は捩りモーメントを形成しないから、次式が成り立っている。(図 4.4 参照)

$$\iint \{\tau_{xx}(y - y_s) - \tau_{yx}(x - x_s)\} dx dy = 0 \quad (4.54)$$

(4.54)式に(4.53)式を代入すると次式を得る。

$$V_x y_s - V_y x_s = \iint (\tau_{xx} y - \tau_{yx} x) dx dy \quad (4.55)$$

したがって、この式の両辺を $-V_y, V_x$ で偏微分することによって、剪断中心の位置 (x_s, y_s) を計算することができる。

$$\left. \begin{aligned} x_s &= -\frac{\partial}{\partial V_y} \iint (\tau_{xx} y - \tau_{yx} x) dx dy \\ y_s &= \frac{\partial}{\partial V_x} \iint (\tau_{xx} y - \tau_{yx} x) dy dx \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

この式は、また次のように表わすこともできる。すなわち、($V_x=1, V_y=0$), ($V_x=0, V_y=1$) が作用するときの剪断応力をそれぞれ $(\tau_{xx}^{y_1}, \tau_{yx}^{y_1}), (\tau_{xx}^{x_1}, \tau_{yx}^{x_1})$ とし、次式のように書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned} x_s &= -\iint (\tau_{xx}^{y_1} y - \tau_{yx}^{y_1} x) dx dy \\ y_s &= \iint (\tau_{xx}^{x_1} y - \tau_{yx}^{x_1} x) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

そして、2次元剪断変形解析より、剪断変形による断面の付加ゆがみ $W_s(x, y)$ を求めておけば、剪断応力は ((4.10)式参照)、

$$\tau_{xx} = G \frac{\partial W_s}{\partial x}, \quad \tau_{yx} = G \frac{\partial W_s}{\partial y} \quad (4.58)$$

で与えられるから、(4.56)式より剪断中心の位置を決定することができる。

さて、本解説(その2)で述べたように、Saint-Venantの振り解析の副産物としても剪断中心が求まり、この場合は、(4.56)式と異なった形で、次式のように与えられる((その2)(1.52a)式)。

$$x_s = -\frac{I_{oy}}{I_{yy}}, \quad y_s = \frac{I_{ox}}{I_{xx}} \quad (4.59)$$

それでは、(4.56)式で表わされる剪断中心と(4.59)式で表わされる剪断中心は同一であることを次に証明してみよう。

まず、(4.59)式で表わされる剪断中心は、梁の曲げと振りの連成がとける断面上の点として導かれたものであり、したがって、この場合、全剪断応力より計算されるひずみエネルギーは、曲げ(b)と振り(st)個々の剪断応力より計算されるひずみエネルギーの和として表わされるはずである。すなわち、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2G} \iint (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dx dy \\ &= \frac{1}{2G} \iint (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)^{(b)} dx dy \\ & \quad + \frac{1}{2G} \iint (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)^{(st)} dx dy \quad (4.60) \end{aligned}$$

この式に曲げの剪断応力として(4.58)式を、振りの剪断応力として本解説(その2)の(2.2)式を代入して、整理すれば次式が得られる。

$$G \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial x} - y \right) \frac{\partial W_s}{\partial x} + \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial y} + x \right) \frac{\partial W_s}{\partial y} \right\} dx dy = 0 \quad (4.61)$$

移項し、部分積分を行ない、(4.28b)、(4.29)式などの関係を用いると、次のように変形される。

$$\begin{aligned} & G \iint \left(y \frac{\partial W_s}{\partial x} - x \frac{\partial W_s}{\partial y} \right) dx dy \\ &= G \int \frac{\partial W_s}{\partial n} \omega_n dS \\ & \quad - G \iint \left(\frac{\partial^2 W_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} \right) \omega_n dx dy \\ &= \iint \left(\frac{V_x x}{I_{xx}} + \frac{V_y y}{I_{yy}} \right) \omega_n dx dy \\ \therefore & \iint (\tau_{xz} y - \tau_{yz} x)^{(b)} dx dy \\ &= \frac{V_x I_{ox}}{I_{xx}} + \frac{V_y I_{oy}}{I_{yy}} \quad (4.62) \end{aligned}$$

よって、これより、次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_{oy}}{I_{yy}} &= \frac{\partial}{\partial V_y} \iint (\tau_{xz} y - \tau_{yz} x)^{(b)} dx dy \\ \frac{I_{ox}}{I_{xx}} &= \frac{\partial}{\partial V_x} \iint (\tau_{xz} y - \tau_{yz} x)^{(b)} dx dy \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

したがって、(4.56)式と(4.59)式で与えられる剪断中心

は、表現は異なっても同一の点であることがわかる。

2. 薄肉断面梁の剪断変形解析

前節においては任意断面形状の梁についての剪断変形理論を紹介した。そしてその解析が2次元問題の場合でも面倒な境界値問題となつて、解析的に解くことが不可能な場合もあることを述べたが、薄肉断面梁の場合にはかなり問題が簡単化される。これは前号で述べた薄肉開断面梁の曲げ振り問題の場合と同じである。

このような薄肉断面材の剪断変形解析について以下述べることにしよう。

従来から用いられている薄肉断面材の剪断流理論は次の微小要素内の応力のつりあい式を基礎としている。(図4.5参照)

すなわち、剪断応力と軸応力 σ_x との間には次の関係式が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial s}(\tau t) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_x t) = 0 \quad (4.64)$$

したがって、

$$\tau t = - \int \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_x t) ds + \text{const.} \quad (4.65)$$

これに梁の軸応力 σ_x と断面力に関係づける次式

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E(\omega' - xu'' - yv'' + \theta'' \omega_n) \\ &= \frac{P}{A} - \frac{M_y x}{I_{xx}} + \frac{M_x y}{I_{yy}} + \frac{M_z \omega_n}{I_{\omega}^{(s)}} \quad (4.66) \end{aligned}$$

を代入すれば

$$\begin{aligned} \tau t &= - \int \left(- \frac{P}{A} + \frac{V_x x}{I_{xx}} + \frac{V_y y}{I_{yy}} - \frac{M_z \omega_n}{I_{\omega}^{(s)}} \right) t ds \\ & \quad + \text{const.} \quad (4.67) \end{aligned}$$

となる。そこでこの式を剪断流(shear flow)の考えを用いて次式のように表わす。

$$\tau t = q = q_0 + q_1 \quad (4.68)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \frac{P}{A} S(s) - \frac{V_x S_x(s)}{I_{xx}} - \frac{V_y S_y(s)}{I_{yy}} + \frac{M_z S_{\omega}(s)}{I_{\omega}^{(s)}} \\ q_1 &= \tau_1 t \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

で q_0 は静定剪断流、 q_1 は不静定剪断流を示している。

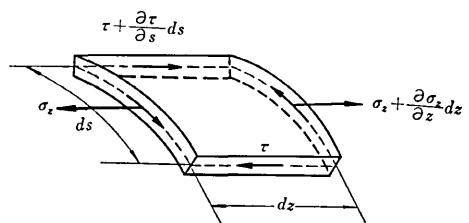


図 4.5 薄肉梁の軸応力 σ_x と剪断応力 τ の関係

ただし,

$$\left. \begin{aligned} S(s) &= \int_0^s t(s) ds, & S_x(s) &= \int_0^s x(s)t(s) ds \\ S_y(s) &= \int_0^s y(s)t(s) ds, & S_\omega(s) &= \int_0^s \omega(s)t(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

(4.69)式を(4.68)式に代入すると

$$q(s) = \frac{p}{A} S(s) - \frac{V_x S_x(s)}{I_{xx}} - \frac{V_y S_y(s)}{I_{yy}} + \frac{M_x^\omega S_\omega(s)}{I_{\omega(\omega)}} + q_1 \quad (4.71)$$

が得られる。この式は本解説(その2)の(2.84)式を一般化したものに他ならない。薄肉閉断面材の場合には不静定剪断流 q_1 は零とおけるが、閉断面材となると断面が閉じているという条件から q_1 を定めなければならない。今簡単のために単一連結の薄肉閉断面材の場合に限ると、 $q(s)$ は原点においてスリットの入った静定剪断流 $q_0(s)$ とスリット端面に存在する不静定剪断流 q_1 の和で与えられることになる。この q_1 を決定する条件式は、

$$\oint \gamma ds = \oint \frac{\tau}{G} ds = \oint \frac{q}{Gt} ds = 0 \quad (4.72)$$

で与えられる。この式に(4.71)式を代入すれば、

$$q_1 = -\frac{1}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \left\{ \frac{p}{A} \oint \frac{S(s)}{t(s)} ds - \frac{V_x}{I_{xx}} \oint \frac{S_x(s)}{t(s)} ds - \frac{V_y}{I_{yy}} \oint \frac{S_y(s)}{t(s)} ds + \frac{M_x^\omega}{I_{\omega(\omega)}} \oint \frac{S_\omega(s)}{t(s)} ds \right\} \quad (4.73)$$

この式を(4.68)式に代入して結局次のような公式が得られる。

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \frac{p}{t(s)A} \left\{ S(s) - \frac{\oint \frac{S(s)}{t(s)} ds}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \right\} \\ &\quad - \frac{V_x}{t(s)I_{xx}} \left\{ S_x(s) - \frac{\oint \frac{S_x(s)}{t(s)} ds}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \right\} \\ &\quad - \frac{V_y}{t(s)I_{yy}} \left\{ S_y(s) - \frac{\oint \frac{S_y(s)}{t(s)} ds}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \right\} \\ &\quad + \frac{M_x^\omega}{t(s)I_{\omega(\omega)}} \left\{ S_\omega(s) - \frac{\oint \frac{S_\omega(s)}{t(s)} ds}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \right\} \end{aligned} \quad (4.74)$$

すなわち開断面材の場合は(4.68)式で $q_1=0$ とおいた式を、単一閉断面材の場合には(4.74)式を用いて剪断応力 τ の分布を決定することができる。いずれの場合も、剪断応力 τ は分布軸力 p 、剪断力 V_x, V_y および付加ゆ

がみモーメント M_x^ω にもとづく4つの成分の和として与えられるのである。

多隔壁閉断面材の場合も同じようにして(4.74)式に相当する式が導けるが複雑となる。この場合はマトリックス代数を使って組織化する解法が外隔壁閉断面材の Saint-Venant 振り解析と同様確立されている。この問題については次号で改めて解説することにする。

3. E. Reissner の Shear-lag 理論の概要

E. Reissner は 1941 年に、薄肉箱形梁の Shear-lag に関する論文を発表している。この論文は、従来の梁理論では得られない Shear-lag 効果を考慮した実情に近い直応力(膜応力、図 4.6 参照)を計算する一つの方法を提案したものであり、材料力学的な梁理論をさらに一歩進めた画期的な論文である。前節の終りに述べた梁の剪断変形問題は、軸方向の付加変位 $W_x(x, y, z)$ を求めることがその理論の出発点となっており、E. Reissner が最初に取り扱ったといわれているこの Shear-lag 問題と等価であることがわかるであろう。

ここでは、E. Reissner の Shear-lag 解析における仮定および計算手順を簡単に紹介しよう。

まず、図 4.7 に示すような断面寸法をもつ薄肉箱形梁を考える。そして、いま、上板(下板も同じ)の直応力分布を x 方向には2次曲線と仮定し、 $z=z$ 断面のその直応力分布の大きさは1つのパラメータ $s(z)$ で決定されるものと仮定する。一方、側板の直応力分布については、直線的に変化するものとする。そうすると、上板の直応力分布は次式のように表わされる。

$$\sigma_x(z, x) = \frac{M}{I} \frac{h}{2} \left\{ \frac{1}{3} m - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right\} s(z) \quad (4.75)$$

ここに、

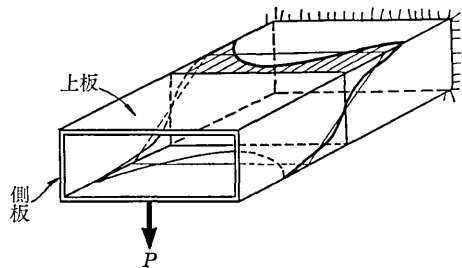


図 4.6 Shear-lag

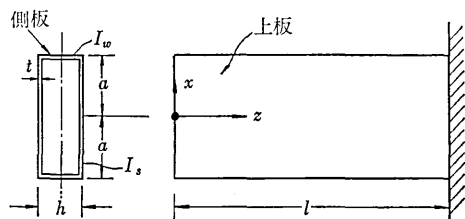


図 4.7 断面寸法および座標系

$$m = (I_s + 3I_w)/I, \quad I = I_w + I_s \quad (4.76)$$

である。

また、側板の直応力分布は次式で表わされる。

$$\sigma_z(z, y) = \left\{ \frac{M}{I} - \frac{1}{3} m s(z) \right\} \left(\frac{y}{h/2} \right) \quad (4.77)$$

(4.75)式と(4.77)式で表わされる薄肉箱形梁の直応力分布は、梁の内部モーメントと断面力とのつりあい式である次式を満足していることを容易に確かめることができる。

$$\iint \sigma_z y \, dx \, dy = M \quad (4.78)$$

さて、次に上板の剪断応力分布を求めてみよう。そのためには、次の薄肉断面梁の応力のつりあい方程式を考える。

$$\frac{\partial \tau t}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z t}{\partial z} = 0 \quad (4.79)$$

このつりあい方程式は、応力関数 $H(x, z)$ を用いて、次式のように表わすことができる。

$$\tau t = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad \sigma_z t = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.80)$$

(4.75)式と(4.80)式より $H(x, z)$ は次式で与えられる。

$$H = x t \left[\frac{M}{I} \frac{h}{2} - \frac{1}{3} \left\{ m - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right\} s(z) \right] \quad (4.81)$$

よって上下板の剪断応力分布は次のように決定できる。

$$\begin{aligned} \tau = -x \frac{P}{I} \frac{h}{2} s(z) \\ + x \left[\frac{M}{I} \frac{h}{2} - \frac{1}{3} \left\{ m - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right\} \right] s'(z) \end{aligned} \quad (4.82)$$

さて、以上のように、上板の応力分布 (σ_z, τ) および、側板の応力分布 ($\sigma_z, (\tau=0)$) が、未知パラメータ $s(z)$ を用いて表わされた。この $s(z)$ を決定するには、梁の有するひずみエネルギーが最小となるようにすればよい。ひずみエネルギー W は次式で与えられる。

$$W = W_s + W_w \quad (4.83)$$

ここに、 W_s は上(下)板の有するひずみエネルギーで次式で与えられる。

$$W_s = \int_0^l \int_{-a}^a \left(\frac{\sigma_z^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) dx \, dz \quad (4.84)$$

また、 W_w は側板の有するひずみエネルギーで次式で与えられる。

$$W_w = \int_0^l \frac{4I_w}{Eh^2} \{ \sigma_z(z, a) \}^2 dz \quad (4.85)$$

さて、このひずみエネルギー W を最小にすることにより、すなわち、 $\delta W = 0$ (s で変分をとる) より、 $s(z)$ に関する次のようなつりあい方程式と境界条件が得られる。

$$\frac{d^2 s(z)}{dz^2} - \kappa^2 \frac{s(z)}{l^2} = 3\lambda^2 \frac{d^2 \sigma_b}{dz^2} \quad (4.86)$$

境界条件:

$$s(0) = 0, \quad \left(\frac{ds}{dz} - 3\lambda^2 \frac{d\sigma_b}{dz} \right)_{z=l} = 0 \quad (4.87)$$

ここに

$$\lambda^2 = \frac{35m - 21}{35m^2 - 42m + 15}, \quad \kappa^2 = \frac{6G}{E} \lambda^2 \left(\frac{l}{a} \right)^2,$$

$$\sigma_b = \frac{Ph}{2I} z$$

この微分方程式と境界条件は、一様断面をもつ薄肉箱形梁の剪断変形における付加応力係数 $s(z)$ を求めるときに適用されるものであり、E. Reissner は、次の2つの荷重条件の場合の解を求めている。

(1) 自由端に集中横力を受ける場合

$$s(z) = \alpha \frac{\sinh \kappa \xi}{\cosh \kappa}, \quad \xi = \frac{z}{l}, \quad \alpha = \frac{3\lambda^2 Phl}{\kappa 2I} \quad (4.88)$$

(2) 梁の中央に集中横力を受ける場合

$$s(z) = \begin{cases} -\alpha \frac{\cosh \frac{\kappa}{2} - 1}{\sinh \kappa \xi} & \xi < \frac{1}{2} \\ \alpha \sinh \kappa \left(\xi - \frac{1}{2} \right) - \sinh \kappa \xi \frac{\cosh \frac{\kappa}{2} - 1}{\cosh \kappa} & \xi \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.89)$$

このようにして決定された $s(z)$ を(4.75)式に代入して得られる直応力分布 σ_z と、従来の梁理論より得られる σ_B との比を、図4.8、図4.9に示す。この図では、上板

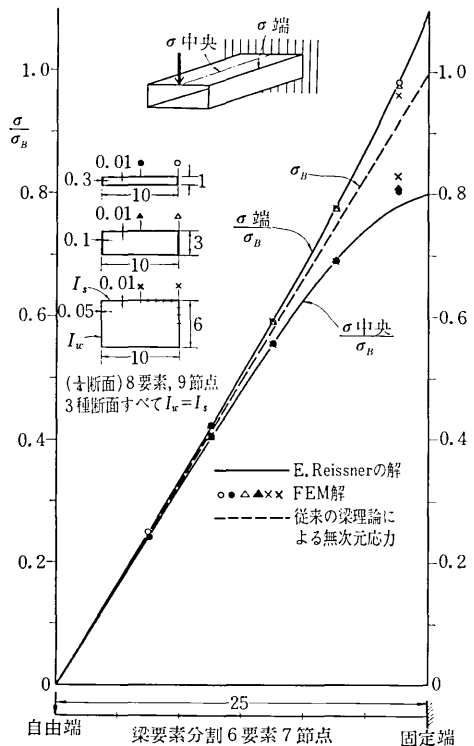


図4.8 薄肉箱形断面梁の Shear-lag (片持梁、梁先端集中荷重)

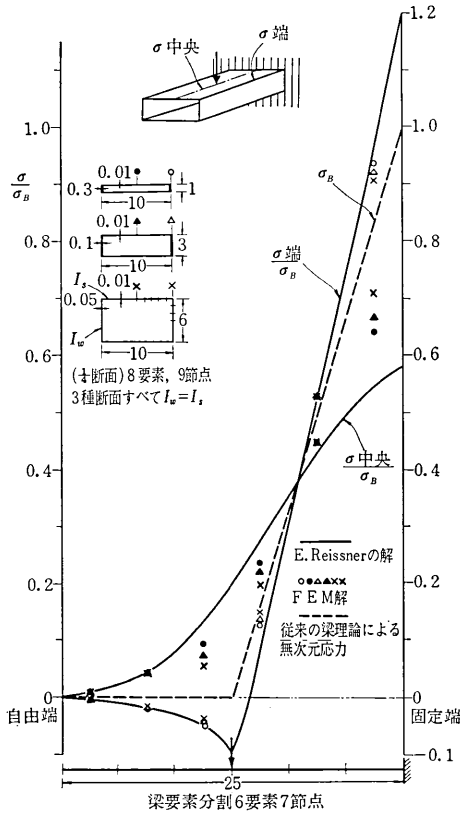


図 4.9 薄肉箱断面梁の Shear-lag (片持梁, 梁中央集中荷重)

の中央部と端部における値のみを、梁の長さの方向に沿って示してある。また、図中の FEM 解は、われわれの提案した次節の剪断変形解析にもとづき有限要素法で解析した結果である。有限要素法による剪断変形解析については次号で詳しく説明することにする。

4. 梁の剪断変形理論の精密化と構造物の理想化の原理

Saint-Venant の半逆法 (semi-inverse method) を数学的に解釈すると断面不変の仮定に立脚する梁理論の修正項 (correction term) を求める方法であるということができよう。すなわち、梁の変位関数として次式を考える。

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= u(z) - y\theta(z) + U_c(x, y, z) \\ V(x, y, z) &= v(z) + x\theta(z) + V_c(x, y, z) \\ W(x, y, z) &= w(z) - xu'(z) - yv'(z) \\ &\quad + \theta'(z)\omega_n(x, y) + W_c(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (4.90)$$

ここに、 (U_c, V_c, W_c) は断面不変の梁理論の解の、3次元弾性論の精密解からのずれの量を表わしている。したがって、 (U_c, V_c, W_c) は次式で与える3次元の平衡方程式を満足するものでなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^{(c)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(c)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(c)}}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}^{(i)}}{\partial z} + X \right) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}^{(c)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(c)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(c)}}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{yz}^{(i)}}{\partial z} + Y \right) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}^{(c)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^{(c)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(c)}}{\partial z} \\ + \left(\frac{\partial \tau_{zx}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(i)}}{\partial z} + Z \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.91)$$

ここに、 $\sigma_{ij}^{(i)}$ は梁構造に理想化された場合の応力分布で、 $\sigma_{ij}^{(c)}$ は付加変位 $(U^{(c)}, V^{(c)}, W^{(c)})$ にもとづく修正応力分布を意味する。この式は、付加応力系 $\sigma_{ij}^{(c)}$ は外力 (物体力, 表面力) および梁応力 $\sigma_{ij}^{(i)}$ と3次元的に平衡状態になければならないことを示している。

このようにして、付加変位 $(U^{(c)}, V^{(c)}, W^{(c)})$ が求まると、それによる修正応力 $\sigma_{ij}^{(c)}$ は、梁に理想化した場合の応力系 $\sigma_{ij}^{(i)}$ に逆に影響をおよぼすことになるが、この場合やはり $\sigma_{ij}^{(i)}$ は外力と付加応力 $\sigma_{ij}^{(c)}$ と明らかに結びついていなければならないことになる。

以上の議論から、次のような2つの仮想仕事方程式が成立しなければならないことになる。

- (i) 修正応力系 $\sigma_{ij}^{(c)}$ と外力および初期応力 $\sigma_{ij}^{(i)}$ との平衡条件を決定する仮想仕事方程式

$$\begin{aligned} \delta \Pi_c &= \iiint \sigma_{ij}^{(c)} \delta \varepsilon_{ij}^{(c)} dV - \iiint \bar{F}_i \delta u_i^{(c)} dV \\ &\quad - \iint \bar{T}_i \delta u_i^{(c)} dS + \iiint \sigma_{ij}^{(i)} \delta \varepsilon_{ij}^{(c)} dV \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.92)$$

- (ii) 梁応力 $\sigma_{ij}^{(i)}$ と外力および初期応力 $\sigma_{ij}^{(c)}$ との平衡条件を決定する仮想仕事方程式

$$\begin{aligned} \delta \Pi_i &= \iiint \sigma_{ij}^{(i)} \delta \varepsilon_{ij}^{(i)} dV - \iiint \bar{F}_i \delta u_i^{(i)} dV \\ &\quad - \iint \bar{T}_i \delta u_i^{(i)} dS + \iiint \sigma_{ij}^{(c)} \delta \varepsilon_{ij}^{(i)} dV \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.93)$$

さて、いま実際の構造物の変位、応力およびひずみ成分を $u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u_i^{(i)} + u_i^{(c)} \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(i)} + \sigma_{ij}^{(c)} \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(i)} + \varepsilon_{ij}^{(c)} \end{aligned} \right\} \quad (4.94)$$

とおくことができる。したがって、仮想仕事方程式を作ると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \iiint \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \iiint \bar{F}_i \delta u_i dV \\ &\quad - \iint \bar{T}_i \delta u_i dS = 0 \end{aligned} \quad (4.95)$$

この式を変形すると、

$$\delta \Pi = \left[\iiint (\sigma_{ij}^{(i)} + \sigma_{ij}^{(c)}) \delta \varepsilon_{ij}^{(c)} dV \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\iiint_V \bar{F}_i \delta u_i^{(e)} dV - \iint_S \bar{T}_i \delta u_i^{(e)} dS \\
 & + \left[\iiint_V (\sigma_{ij}^{(i)} + \sigma_{ij}^{(e)}) \delta \epsilon_{ij}^{(i)} dV \right. \\
 & \left. - \iiint_V \bar{F}_i \delta u_i^{(i)} dV - \iint_S \bar{T}_i \delta u_i^{(i)} dS \right] \\
 & = \delta \Pi_e + \delta \Pi_i = 0 \quad (4.96)
 \end{aligned}$$

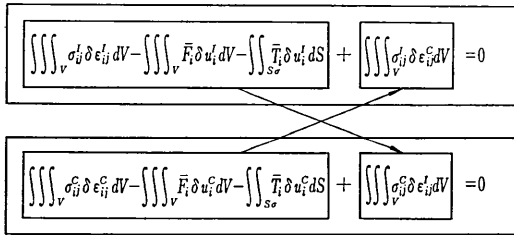
したがって、

$$\left. \begin{aligned} \delta \Pi_e &= 0 \\ \delta \Pi_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.97)$$

を同時に満足する変位 $u_i^{(i)}, u_i^{(e)}$ が決定できれば、正解 $u_i = u_i^{(i)} + u_i^{(e)}$ が求められたことになる。

すなわち、理想化された構造物の応力解析結果は、次のブロックダイアグラム (表 1) にしたがって計算され

表 1 構造物理想化の原理



ばよいことになる。この考え方は別に目新しい方法ではなく、有限要素解析法の分野では、標準化されている部分構造法 (substructure method) の思想と全く同じである。すなわち、大次元の剛性方程式を一度に解くことが不可能な場合に、限られた数の節点変位のみに残し、他の節点変位を内部節点変位として消去して解いていくことと同じである。それにもかかわらず、あえて“構造物理想化の原理”と呼ぶことにした理由は、与えられた構造物をどのように理想化しても、実際の構造物の剛性とそれの剛性のずれを評価してもとの解を修正することによって、少ない自由度でも実際の挙動に近い解を与えることが可能となるという構造物のモデル化の上での非常に貴重な考え方があることを明記したかったのである。もちろん、この場合の理想化がうまくいっておれば、修正量は少なくなり、したがって解の精度も高くなるのは当然であるが、モデル化の良不良にかかわらず修正計算を行なうことによって、かなり現実的な解が得られるであろうということを強調しておきたい。

いま、この原理を梁の曲げにおける剪断変形問題に適用してみよう。

断面不変の梁理論の枠内で、梁の $y-z$ 平面内の曲げ問題を考えると変位関数を次のようにおくことができる。

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= 0 \\ V(x, y, z) &= v(x) \\ W(x, y, z) &= -yv'(x) + W_s(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (4.98)$$

そうすると、 $v(x), W_s(x, y, z)$ に関する仮想仕事方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \delta \Pi_e &= 0 \\
 & \delta \iiint_V \left[\frac{G}{2} \left\{ \left(\frac{\partial W_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_s}{\partial y} \right)^2 \right\} \right. \\
 & \left. + \frac{(1-\nu)E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial W_s}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\
 & - \iiint_V \frac{(1-\nu)E y v''(x)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta \left(\frac{\partial W_s}{\partial z} \right) dx dy dz = 0 \quad (4.99)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad \delta \Pi_i &= 0 \\
 & \delta \int_0^l \frac{(1-\nu)E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} I_{yy} (v''(z))^2 dz \\
 & - \int_0^l q_v(z) \delta v dz \\
 & + \iiint_V \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial W_s}{\partial z} \right) \delta (-y v'') dx dy dz \\
 & = 0 \quad (4.100)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$E' = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

さて、(4.99) 式、(4.100) 式に部分積分を行ない変形すると、すでに (4.19 a) 式で与えたような次の式が得られる。

$$G \left(\frac{\partial^2 W_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} \right) + E' \frac{\partial^2 W_s}{\partial z^2} = E' y v''(x) \quad (4.101)$$

$$E' I_{yy} v''''(x) - \iint_V E' y \frac{\partial^3 W_s}{\partial z^3} dx dy = q_v(x) \quad (4.102)$$

いま、 $\Phi(x, y, z, \xi)$ を、次の微分方程式を満足し、かつ W_s と同じ境界条件 (表面および端面条件) を満足する解とする。

$$G \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + E' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = E' y \delta(z-\xi) \quad (4.103)$$

ここに、 $\delta(z-\xi)$ は 1 位の Dirac のデルタ関数を表わす。これはすなわち、梁断面のゆがみの影響関数を表わすことになるから、これを用いて (4.102) 式を表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & E' I_{yy} v''''(x) \\
 & - \iint_V E' y \left\{ \int_0^l \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}(x, y, z, \xi) v'''(\xi) d\xi \right\} dx dy \\
 & = q_v(x) \quad (4.104)
 \end{aligned}$$

この式は、複雑な微積分方程式であるが、これをなんらかの方法で解くことができれば、その解 $v(x)$ は剪断変形の影響を考慮に入れた梁のたわみを与えることになる。いいかえれば、上述の 2 段階にわたる計算課程は一見すると反復計算の形をとるが $\Phi(x, y, z, \xi)$ を介して $v(x)$ が一意的に定まることを示している。このことは

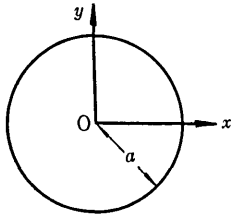
次号で紹介する有限要素解析法を理解する上で大いに役に立つであろう。

また、梁の剪断変形理論を断面剛の範囲内で組みたてようとするとき、 $U_s = V_s = 0$ となることをすでに述べたが、このような立場に立つたとき 3 次元の平衡状態は完全には満足されないことも述べておこう。このことは (4.91) 式をみれば明らかであろう。いいかえれば、梁の剪断変形を正しく取り扱おうとすれば、 U_s, V_s も考慮しなければならないことになり、したがって断面不変の仮定を

すてなければならず、梁理論の土台をゆすぶる大問題となる。しかしこの問題も有限要素法では次号に述べるように非常に巧妙に処理され、剪断変形だけでなく断面変形の影響をも梁理論の枠内で考えることができるのである。

5. 二、三の簡単な解析例

以上に述べた手法を用いて解析した二、三の簡単な梁の剪断変形問題を中実断面、薄肉開断面、薄肉閉断面の



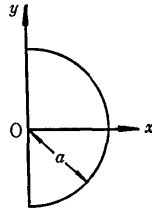
$$W_s = \frac{V_y}{8GI_{yy}} (3a^2 - x^2 - y^2)y$$

ここに $I_{yy} = \frac{\pi a^4}{4}$

$$\begin{cases} \tau_{xx} = -\frac{V_y}{4I_{yy}} xy \\ \tau_{yz} = \frac{V_y}{8I_{yy}} (3a^2 - x^2 - 3y^2) \end{cases}$$

$x_s = y_s = 0$
 $k = \frac{6}{7} = 0.857$

図 4.10 中実円断面



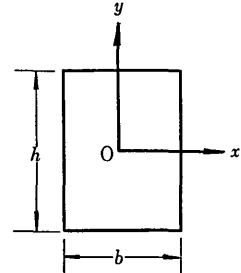
$W_s, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ は中実円断面と同じ。

ただし、 $I_{yy} = \frac{\pi a^4}{8}$

$$\begin{cases} x_s = \frac{8}{5\pi} a = 0.509 a \\ y_s = 0 \end{cases}$$

$k = \frac{6}{7} = 0.857$

図 4.11 中実半円断面



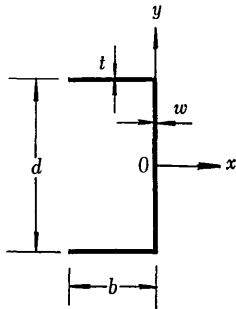
$$W_s = \frac{V_y}{2GI_{yy}} \left(\frac{h^2}{4} y - \frac{1}{3} y^3 \right)$$

ここに $I_{yy} = \frac{bh^3}{12}$

$$\begin{cases} \tau_{xx} = 0 \\ \tau_{yz} = \frac{V_y}{2I_{yy}} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{cases}$$

$x_s = y_s = 0$
 $k = \frac{5}{6} = 0.833$

図 4.12 中実矩形断面



W_s ウェブ

$$-\frac{V_y}{6GI_{yy}} \left\{ y^3 - 3 \left(\frac{1}{4} d^2 + bd \frac{t}{w} \right) y \right\}$$

フランジ (複合は上下フランジの順)

$$\mp \frac{V_y}{4GI_{yy}} \left(dx^2 + 2bdx - \frac{1}{6} d^3 - bd^2 \frac{t}{w} \right)$$

τ ウェブ

$$\tau_{xx} = 0, \tau_{yz} = -\frac{V_y}{2I_{yy}} \left(y^2 - \frac{1}{4} d^2 - bd \frac{t}{w} \right)$$

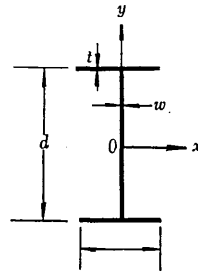
フランジ

$$\tau_{xz} = \mp \frac{V_x}{2I_{yy}} d(x+b), \tau_{yz} = 0$$

$$x_s = \frac{1}{4I_{yy}} b^2 d^2 t = \frac{3bt^2}{6bt + dw}, y_s = 0$$

ただし、 $I_{yy} = \frac{1}{2} bd^2 t + \frac{1}{12} d^3 w$

図 4.13 薄肉溝形断面



W_s ウェブは溝形断面と同じ
 フランジ (複合は最初が上下フランジ、2番目が左右フランジの順)

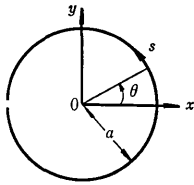
$$\mp \frac{V_y}{4GI_{yy}} \left(dx^2 \pm bdx - \frac{1}{6} d^3 - bd^2 \frac{t}{w} \right)$$

τ ウェブは溝形断面と同じ
 フランジ

$$\tau_{xz} = \mp \frac{V_y}{2I_{yy}} d(x \pm b)$$

$x_s = y_s = 0$
 ただし I_{yy} は溝形断面と同じ

図 4.14 薄肉 I 形断面

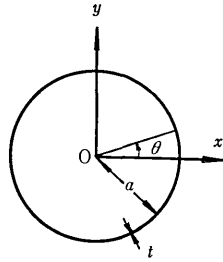


$$W_s = -\frac{V_y}{GI_{yy}} a^3 (\sin\theta + \theta)$$

$$\tau_s = \frac{V_y}{I_{yy}} a^2 (\cos\theta + 1)$$

ただし, $I_{yy} = \pi a^2 t$
 $x_s = 2a, y_s = 0$
 $k = \frac{1}{6}$

図 4.15 スリット入り薄肉円形断面

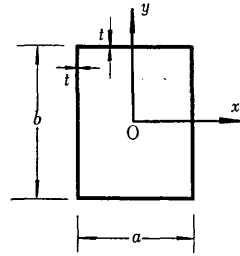


$$W_s = \frac{V_y}{GI_{yy}} a^3 \sin\theta$$

$$\tau_s = \frac{V_y}{I_{yy}} a^2 \cos\theta$$

ただし, $I_{yy} = \pi a^3 t$
 $x_s = y_s = 0$
 $k = \frac{1}{2}$

図 4.16 薄肉円形断面



W_s ウェブ
 $-\frac{V_y}{6GI_{yy}} \left\{ y^3 - 3 \left(\frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{2} ab \right) y \right\}$
 フランジ
 (複合は上下フランジの順)
 $\mp \frac{V_y}{4GI_{yy}} \left(bx^2 - \frac{1}{6} a^3 - \frac{3}{4} ab^2 \right)$

τ ウェブ
 $\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = -\frac{V_y}{2I_{yy}} \left(y^2 - \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{2} ab \right)$
 フランジ
 $\tau_{xz} = \mp \frac{V_y}{2I_{yy}} bx, \tau_{yz} = 0$
 ただし, $I_{yy} = \frac{1}{6} b^2 (3a + b)t$
 $x_s = y_s = 0$

図 4.17 薄肉箱形断面

順に紹介する。

(i) 中実断面 円形断面, 半円断面をとりあげ, (4.31)式と(4.28b)式より, 剪断による付加ゆがみ W_s を求め, さらに, (4.58)式より剪断応力 τ_{xz}, τ_{yz} を求めた。半円断面については, (4.56)式を利用して剪断中心を求めた。また, すでに1節で解析した矩形断面についても, あわせて記しておく。(図4.10, 図4.11, 図4.12参照)

(ii) 薄肉開断面 溝形断面, I型断面およびスリット入り円形断面をとりあげ, その解析結果を図4.13, 図4.14, 図4.15に示す。

(iii) 薄肉閉断面 円形断面, 箱形断面をとり上げ, その解析結果を図4.16, 図4.17に示す。

ただし, (i)(ii)(iii)とも, 剪断力が y 軸の正の方向に作用している場合である。また, これらの解析結果と Saint-Venant 捩りの解析結果(本解説(その2)図2.15~図2.19)との関連性についても注目されたい。

結 論

梁理論の精密化の上での一つの問題点である剪断変形問題についてその解析法の概要を説明し, 二, 三の簡単な断面についてその計算例を示した。次号では, 2次元のみならず3次元剪断変形問題, また複雑な形状を有する断面にも適用できる実用計算法について有限要素法を中心に概説する。
 (1973年8月23日受理)

参 考 文 献

- 1) A. E. H. Love: "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Cambridge University Press, 4th ed. (1927)
- 2) I. S. Sokolnikoff: "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill Book Co., New York, 2nd ed. (1956)
- 3) S. P. Timoshenko and N. Goodier: "Theory of Elasticity", McGraw-Hill Book Co., New York, 2nd ed. (1951)
- 4) E. Reissner: "Least Work Solution of Shear Lag Problem", Jour. of the Aeronautical Science, Vol. 18, No. 7 (1941)
- 5) K. Washizu: "Variational Methods in Elasticity and Plasticity." Pergamon Press, Oxford (1966)
- 6) 倉西正嗣: "弾性学", 日本機械学会(昭和24年4月)
- 7) 川井, 藤谷: "有限要素法によるはりのせん断変形解析(正)(続)", 日本鋼構造協会解析小委員会資料(昭和46年3月), (昭和46年9月)
- 8) 川井, 藤谷: "有限要素法による薄肉梁の Shear-lag 解析", 日本鋼構造協会解析小委員会資料(昭和47年3月)
- 9) 川井, 藤谷: "構造物理理想化の原理と梁理論への応用", 日本鋼構造協会解析小委員会資料(昭和47年9月)
- 10) 川井, 藤谷: "せん断中心に関する二, 三の考察", 第14回構造強度に関する講演会講演集, 日本航空宇宙学会, 日本機械学会, 日本鋼構造協会(昭和47年7月)
- 11) 川井: "梁の工学的理論に関する二三の考察" 第14回構造強度に関する講演会講演集, 日本航空宇宙学会, 日本機械学会, 日本鋼構造協会(昭和47年7月)