

工作機械構造の振動特性の推定について

Estimation on Vibration Characteristics on Machine Tool Structures

佐藤 壽 芳*

Hisayoshi SATO

工作機械の振動に関する諸問題のうち、特に構造の固有振動数を求める問題について、これまでこの研究を概観した後、筆者らがおこなった有限要素法による解析についてとりまとめた。また減衰定数の推定法に関しても、衝撃応答のパワースペクトルを用いる筆者らの試みについてふれた。

1. はじめに

工作機械の性能向上を考えるにあたって、切削性能向上、高加工精度等の点から、振動の問題が重要であることを指摘してきた¹⁾²⁾。切削にともなって自励振動の生じることが知られ、その特性が明らかにされるにしたがい、いかにして剛性の高い機械を作るかが1つの課題となっている。この事は、機械構造全体としても振動が少なく、粗さ、寸法精度、形状精度が高い機械を期待する面でも同様である。工作機械が古くから作られている機械であり、多くの先人の経験的努力が積み重ねられて、すでに充分剛性の高い機械が作られているという面もある。しかし、近來マシニング・センターなどの高性能、高価な機械の開発、溶接構造の機械の開発、汎用機械にあっても多様化、高性能化がはかれること等の進展がみられる一方、計算機を用いた解析手法の研究がすすみ、固有振動数、振動モードを推定することも不可能ではなくなってきた結果、設計段階でこれらの特性を明らかにし、合理的に機械の高性能化をはかろうとすることが必要となってきている。

機械構造の振動特性を考えるにあたって、もう一つの重要なパラメータ、減衰定数は、これを計算によって推定することは難しく、測定に頼らざるをえないが、伝達関数測定装置の開発や、計算機を利用したデータ処理法の研究によって、高次の固有振動数についてもその値を求めることが可能となってきた。

工作機械の振動の問題には、機械構造の振動特性のみならず、切削機構の振動特性が密接に関連していることはよく知られているが、本稿では、工作機械構造の振動特性に注目し、これを解析的に求める問題について著者らの研究成果を中心にとりまとめてみる。

2. 固有振動数と振動モードの計算について

1. 概 論

工作機械においてその振動特性が問題になるのは、工具・被削材間の変形の観点からであることは、その加工様式を考えれば容易に理解されよう。またこの間の特性が機械構造全体の振動特性とも密接に関連していることも明らかであろう。工作機械製作の観点からすれば設計の段階で機械構造の振動特性を知ることが望まれる。

自励振動については、工具・被削材間に切削力を想定した時に加わる力と変形の関係の振動数特性……自己コンプライアンス……が構造の振動特性として重要な役割りを果たすことが知られている。したがって工作機械構造の振動特性を求める1つの目的が、このコンプライアンスを知ることとなる。また工作機械の加工精度、形状精度をきめる1つの要因に主軸・被削材系のような運動部分、歯車やベルトのような駆動系、電動などの補機系が振動源となって生じる強制振動にたいしては、先の自己コンプライアンス特性に加えて、機械内の点の加振力と工具・被削材間変位との間の相互コンプライアンス特性も合わせて考える必要が生じる。

これらの特性を測定することについては、伝達関数測定装置の利用が盛んになって各種の機械についてデータが蓄積されてきている一方、これらを計算で求めることについては、まだまだ問題が少くない。計算をすすめるにあたっては、もとの構造を適度にモデル化することが必要になるが、最初にとられた方法は、適当な梁構造あるいは集中質量ばね系で近似したのち、これらの系についての固有振動数、振動モードを求めるものであった。これらの方法によれば、構造が簡単化されるため、記憶容量の大きくない計算機によって振動特性の特徴がわかる反面、一般に複雑な形をしている工作機械構造について、(1) 合理的に近似しうる形のものはいよとして、近似の一般的な方法の提言が充分でない。(2) リブの役割り、箱型の構造、側壁にあいている穴の影響など板構造としての特徴を考慮し難い等の点で難が生じる。有限要素法の発展は板構造としての取扱いを可能とし、これらの難点を解決することについて光明を与えた。有限

* 東京大学生産技術研究所 第2部

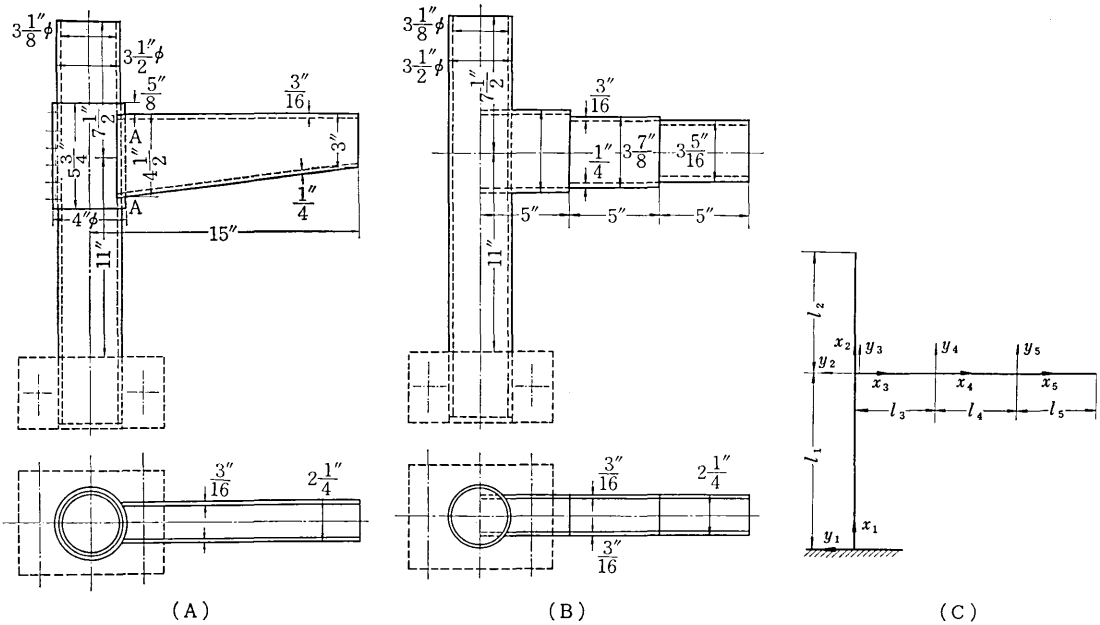


図 1 ボール盤模型とその計算模型^{*)}

要素法についても、充分な要素分割を試みようとするれば超大型計算機の使用が必要となる点をどうするかなど、実際に計算をすすめてみると、工夫すべき点も少ない。

本稿では、まず梁構造としての解析結果などこれまでの研究について概観した後有限要素法を用いて著者らが試みた解析の結果についてのべる。

2. 梁構造等としての解析

工作機械構造の固有振動数、振動モードを計算によって求めようとする試みは、主軸・被削材系の振動特性を求めることを別にすれば、Maltbaek³⁾、Taylor⁴⁾ らによるものが始めであろうと思われる。まずこれらについて簡単にふれる。

Maltbaek は、図 1 (a) に示すボール盤を対象に、図 1 (b) に示すように腕の部分を実質化した後、コラムを腕とのつながりを考えて 2 本の梁、腕を 3 本の梁とみなして計算をしている。実際に計算をすすめるにあたっての座標のとり方は図 1 (c) のようにしている。

単純梁の横振動に関する運動方程式は、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \tag{1}$$

とかける。ここで t は時間、梁に関する座標のとり方は図 1 (c) にしたがっている。また、

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 A \gamma}{EI g} = \frac{\omega^2}{a^2} \tag{2}$$

ここで、 E : 縦弾性係数、 I : 断面 2 次モーメント、 g : 重力加速度、 ω : 円振動数、 A : 断面積、 γ : 材料の比重量密度等である。(1) の解は、境界条件によってき

められる定数 C を係数として

$$y_r = C_{1r} \sin a_r x_r + C_{2r} \cos a_r x_r + C_{3r} \sin ha_r x_r + C_{4r} \cos ha_r x_r \tag{3}$$

の形にかける。ここで r は、第 r 番の梁を意味しており、今の場合 $r=1, \dots, 5$ ととれる。

境界条件を $r=1$ について考えてみれば、 $x_1=0$ における変位と傾きについて

$$y_1=0, y_1'=0 \tag{4}$$

であるから、

$$C_{21} + C_{41} = 0 \tag{5}$$

$$a_1 C_{11} + a_3 C_{31} = 0 \tag{6}$$

がえられる。その他、コラムの先端 $x_2=l_2$ においては、曲げモーメントと剪断力について

$$y_2''=0, y_2'''=0 \tag{7}$$

腕がわかれる $x_1=l_1, x_2=0, x_3=0$ において完全に剛な接合がなされているとすれば、変位と傾きについて

$$y_1=y_2, y_3=0 \tag{8}$$

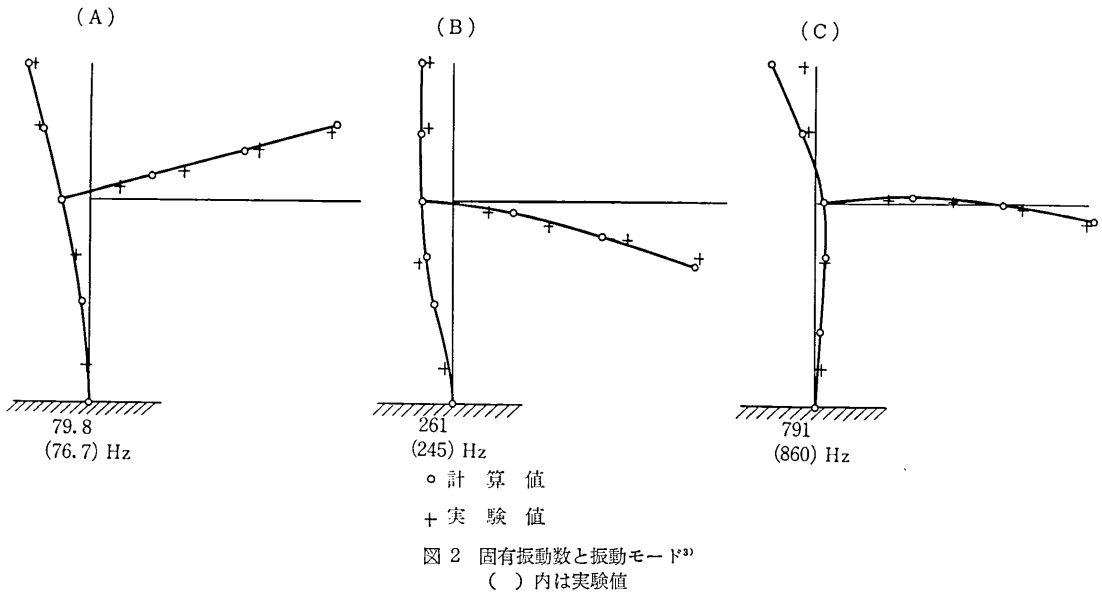
$$y_1'=y_2', y_2'=y_3' \tag{9}$$

曲げモーメントと剪断力について

$$EI_1 y_1'' - EI_2 y_2'' = EI_3 y_3'' \tag{10}$$

$$EI_1 y_1''' - EI_2 y_2''' = -M_1 y_2 \omega^2 \tag{11}$$

などの関係が満足される必要あることから、結局 (C_{11}, \dots, C_{45}) の係数を含んだ 20 個の式が成立つことが必要となる。これらの係数全てが零ではないために満たされるべき条件の行列式より固有振動数が求められる。また求められた係数にたいして、たとえば $C_{11}=1$ として係数間の比を計算することによって、振動モードも知ることができる。図 1 に示した大きさの合成樹脂材料を用いた



模型についての計算結果は、

$$f_1 = 79.8 \text{ Hz}, f_2 = 261 \text{ Hz}, f_3 = 791 \text{ Hz}$$

とえられている。一方模型の加振実験の結果は、

$$f_1 = 76.7 \text{ Hz}, f_2 = 245 \text{ Hz}, f_3 = 860 \text{ Hz}$$

と求められ、これらの振動数にたいして、振動モードが図2のようになり、何れもかなりよく一致することが示されている。

合成樹脂材料では、縦弾性係数が振動数に依存して変化する性質があることを考慮する必要があるが、これについては、文献 5), 6), 7) に詳しい。

Taylor らは、ボール盤、旋盤の模型を対象に、集中質量ばね系によって振動特性を求めることを試みている。図3は旋盤を例に計算モデルにおける質量集中の仕方を示している。もとの構造と関連してこれがどのような手順で集中化されたか、集中質量間を結ぶばねの曲げ、ねじり、剪断、軸方向変形の等価的な剛性がどのよ

うに評価されたかは、文献からは明らかでない。

この系の動きは、各質点について直角座標3成分の相対変化をもとに、全質点についての変位 q_1, q_2, \dots, q_n によって記述しうる。いまこのうちの2成分を q_i, q_j とし、影響係数 α_{ij} を、 q_j に関する質点の q_i 方向に単位の力が作用した時の q_i の大きさとして定義する。また系が振動している時、 q_j に関与する質量 M_j に加わる慣性力は、 $M_j \ddot{q}_j/g$ であらわされる。 $\ddot{q}_j = -\omega^2 q_j$ なる関係があり、質点に働く慣性力とこれによって構造物に加わる力との関係を考慮すれば、 $\omega^2 M_j q_j/g$ なる力が加わる。この結果 q_i においては $\alpha_{ij} \omega^2 M_j q_j/g$ だけの変位が生じるから、全ての q による影響を考慮すれば、

$$q_i = \{\alpha_{i1} M_1 q_1 + \alpha_{i2} M_2 q_2 + \dots + \alpha_{in} M_n q_n\} \omega^2 / g \quad (11)$$

とかける。同様の関係が全ての q について求められるから、それらをまとめてマトリックス表示すれば、

$$\{q\} g / \omega^2 = [\alpha] [M] \{q\} \quad (12)$$

とかける。ここで

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}, \quad [\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & & \\ \dots & & & \\ \alpha_{n1} & \dots & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$[M] = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_n \end{pmatrix}$$

等である。いま、 $[W] = [\alpha][M]$ 、 $\lambda = g/\omega^2$ とおけば、(12)は

$$\lambda \{q\} = [W] \{q\} \quad (14)$$

となり、固有振動数を求めることは $[W]$ の固有値を求める問題に帰着する。

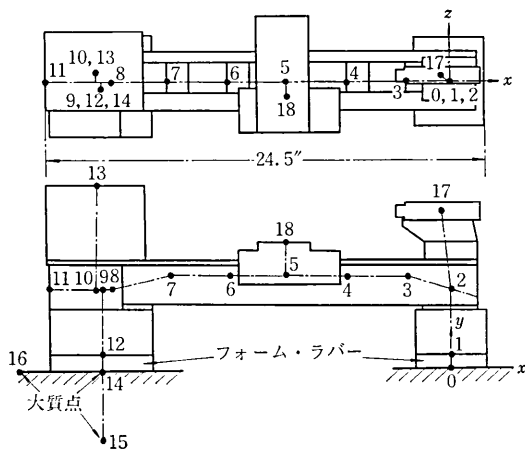


図3 旋盤模型

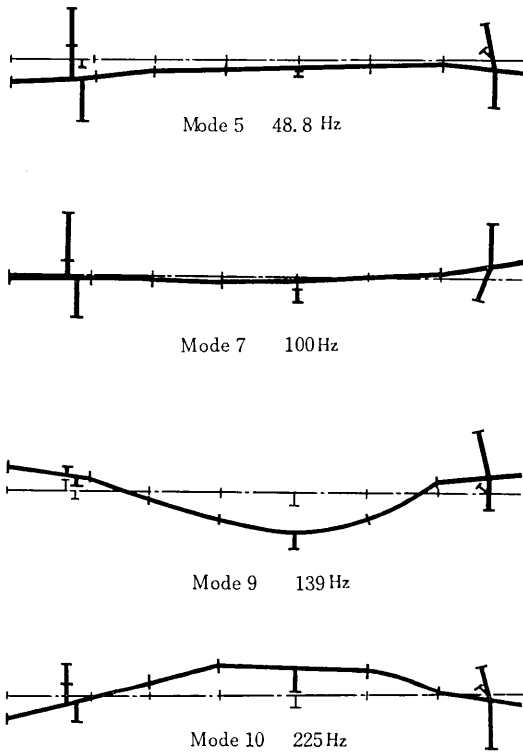


図 4 固有振動数と振動モード (水平方向)⁴⁾

表 1 固有振動数の計算値と実験値の比較⁴⁾

モード	計算値 (Hz)	実験値 (Hz)	誤差 (%)
1	10.1	11.3	-11
2	17.6	16.8	+5
3	20.4	21.5	-5
4	38.7	38	+2
5	48.8	52	-6
6	53.1	51	+4
7	100	105	-5
8	108	118	-8
9	139	130	+7
10	225	220	+2

表 1 は、以上にしたがって求められた計算結果と模型実験の結果をくらべ、±10% 以内程度には一致するとの結論をえている。図 4 は、水平方向の卓越する振動モードを示したものである。

板構造を骨組構造として扱うために計算モデルを作る方法については、旋盤ベッドを例とした高橋らの試みがある⁸⁾。梁構造としての剛性を評価する際に、もとの構造の断面形状にもとづいて断面 2 次モーメント、極断面 2 次モーメントを知ることが必要となる。断面が図 5 のような一般的形状を有する板構造にたいして、等価な梁の断面係数は x 軸まわりの断面 2 次モーメントを例に考えば、

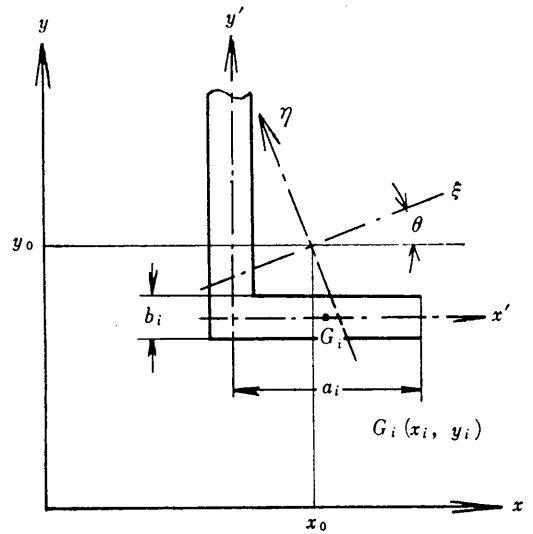


図 5 板部材の断面形状⁸⁾

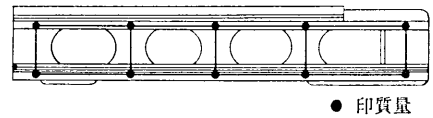
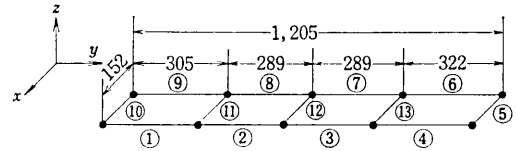


図 6 旋盤ベッドの計算モデル⁸⁾

$$I_x' = \sum_i \left(\frac{1}{12} a_i b_i^3 + y_i^2 a_i b_i \right) \quad (14)$$

$$y_0 = (\sum_i a_i b_i y_i) / A_0 \quad (15)$$

$$A_0 = \sum_i a_i b_i \quad (16)$$

$$I_x = I_x' + y_0^2 A_0 \quad (17)$$

などによって与えるとしている。

図 6 は、旋盤ベッド平面図に計算モデルの梁を重ねて示したもので、その概略寸法が上図に示されている。実際の計算は黒点部分に質量を集中化しとすすめられている⁹⁾¹⁰⁾。計算結果は図 7 のように求められ、括弧内に示された実機のと非常に一致していることがわかる。振動モードも比較している固有振動数について同じ特徴を有していることが明らかである。

吉村¹¹⁾は、梁構造について(13)に示される影響係数のマトリックスを求め、加振点における振動数を掃引して所用の点における変位を計算、共振曲線を求めたのち、共振点にたいする振動数として固有振動数、固有振動数にたいする構造上各点の変位を求めて振動モードを求めるプログラムを開発した。上記影響係数はすでにみたよ

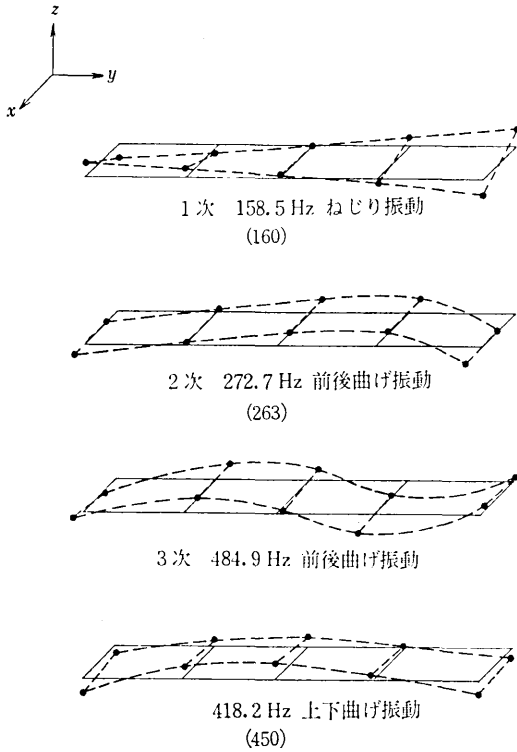


図 7 固有振動数および振動モードの計算値⁹⁾
() 内実機の実験値

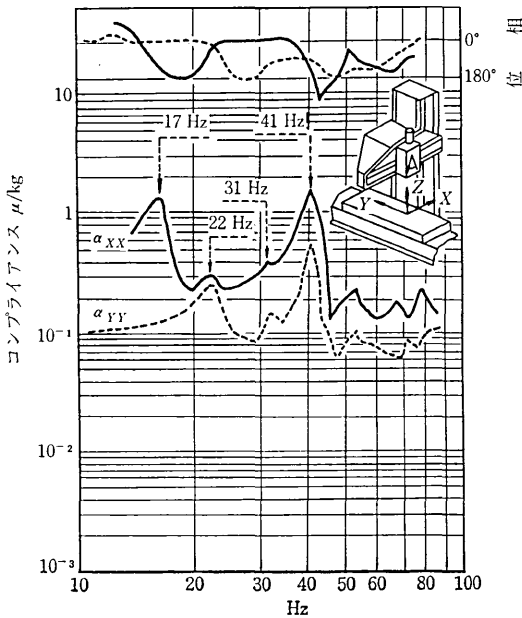


図 8 フライ盤の実験によるコンプライアンス¹²⁾

うに、力にたいする変位の関係コンプライアンス、あるいは、リセプタンスを与えるものであるから、共振曲線を特に共振点近傍で実系のそれと比較するためには、減衰定数の値を正確に知る必要があるから、現在のところ設計段階でこれを知ることは難しく、経験的に知られて

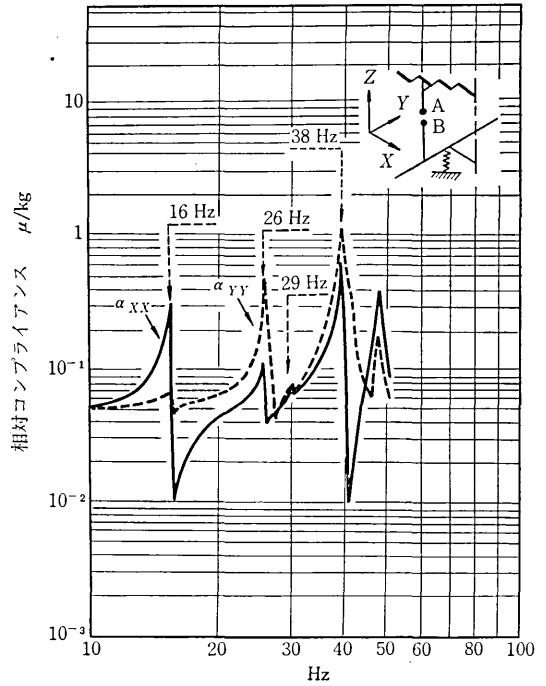


図 9 フライ盤の計算によるコンプライアンス¹²⁾

いる程度の値にたいして、リセプタンスがどの程度になるかを知るのが、意義のある使い方となる。

図 8¹²⁾は、図内に示されたフライ盤の加振実験によるリセプタンス曲線で、顕著な山から固有振動数が 17, 22, 41 Hz 等にあることが示されている。一方図 9¹²⁾はこのフライ盤を図内右上に示されているような梁構造にモデル化した時に、計算で求められるリセプタンス曲線を示している。梁構造化する過程で問題が残るとしても、16, 26, 38 Hz とえられる固有振動数は実機のそれとよく一致し、リセプタンスも同じ桁程度にあうことが示されている。

3. 有限要素法による板構造としての解析

1) 概論

有限要素法による板構造の解析法を工作機械構造の振動解析に適用することは、佐田ら¹³⁾ならびに著者らによってすすめられてきている。実際の機械を対象とした計算法の実用化については今後の研究に待たねばならないが、基礎的な研究の段階で、将来に明るい見通しをえている。以下では、筆者らの解析の結果についてのべることとする。

有限要素法の定式化については、すでに詳しい文献¹⁵⁾も少なくないのでそれらにゆずるとし、ここでは、図 9 のような薄板長方形要素を用い、変位関数として、板の面内変形について

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \quad (18)$$

$$v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \quad (19)$$

面外変形について、

$$\begin{aligned}
 w = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x y + \alpha_6 y^2 \\
 & + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 x y^2 + \alpha_{10} y^3 \\
 & + \alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} x y^2 \quad (20)
 \end{aligned}$$

を採用して剛性マトリックスを評価したことをのべるにとどめる。

まず有限要素法の定式化にしたがって作るプログラムを検討するため、メタアクリル樹脂模型の加振実験を同時にすすめた。実機を薄板構造として扱うことについては、これまでの実機の加振実験の経験から、第1次近似としては差支えないものと考えた。また有限要素法として求められている成果を直ちに用いる点でも、工作機械構造の振動解析に早急な発展をはかりうることが期待しえた。

機械としては普通旋盤を対象とした。テールストック、刃物台、主軸駆動系等の補機類をとりさった基本構造を例にとり、それがベッド・脚の要素構造からくみあげられていることに注目し、まず要素構造の振動特性を明らかにすることを試みた。特にベッドについては、典型的なリブの配置をした場合数例について検討し、振動特性に与える効果を定量的に明らかにした。計算精度を高める上からは要素分割を充分細かくとること、基本構造について一時に計算してしまうことなどが当然考えられるが、計算機記憶容量の制約がともなうため、できるだけ簡略な計算をおこなって、まず第1次近似としてもこの計算法が使いうるかどうかを明らかにする方向で検討をすすめた。最後に、実際の旋盤の要素構造、基本構造についても、この計算法を適用することを試みている。

2) 模型要素構造についての解析

図 11 は、計算法の検討に用いた、メタアクリル樹脂製の旋盤基本構造の模型の略図である。実系にたいする

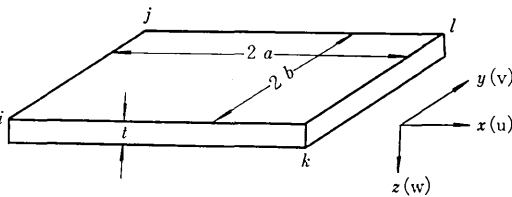


図 10 薄板長方形要素

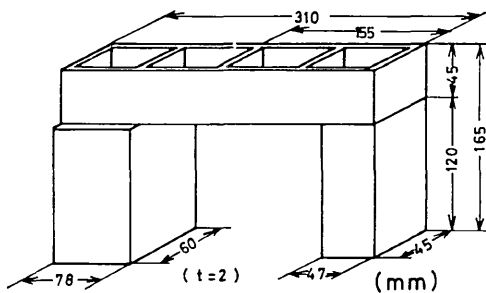


図 11 旋盤基本構造模型

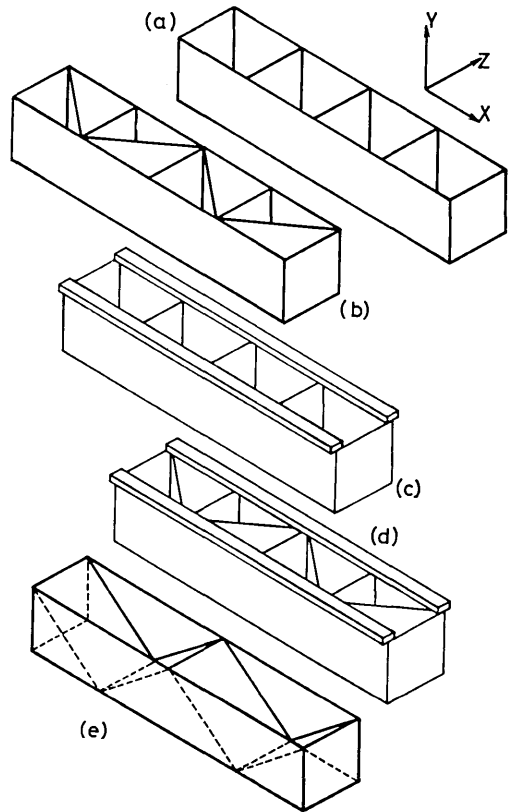


図 12 ベッド構造模型

尺度は、4 尺旋盤の約 1/5 である。ベッドにしても脚にしても、実系では刃物台すべり面や、電動機格納のための開口部がある等の点は、心押台、駆動系をとり去った上、さらに簡略化されている点であるが、計算法の開発という観点から、図のようにできるだけ単純かつ基本的な構造となるようにした。

図 12 は、まず要素構造としてベッドを考え、計算を試みた模型の略図を示している。(a)は、上からみたリブの配置が梯子形となるもの、(b)はこれに斜めのリブを加えたもの、(c)、(d)は(a)、(b)に幅 6 mm、厚さ 4 mm の工具台すべり面をつけた形となっている。(d)はリブが横方向に入り、上からみた時波形となっている。いずれも、ある程度実際にもとづいた特徴的な形であるといえよう。

境界条件は模型の加振実験として実施しやすい一端固定を選んでいる。図 13 は、図 12(a) のベッドについて、固有振動数と振動モードの計算結果、実験結果を比較している。固有振動数についてみると、すでにふれたメタアクリル樹脂の縦弾性係数の振動数依存性を較正しているにもかかわらず、実験値よりも高かるべき計算値がいずれも低くなるという結果となっている。振動モードについては、模型実験の加振点が最下端のリブに設けられていることから、第 2、3 番目の固有振動数にたいして

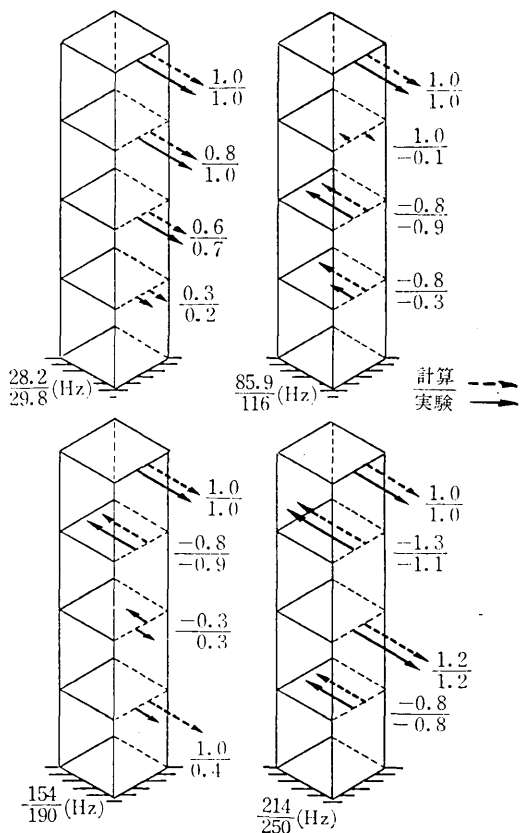


図 13 図 12(a) のベッド模型の固有振動数と振動モード

両者の結果が合わなくなっているとみられるが、全体としてはかなりよく一致しているといえよう。

第 1 の固有振動数にたいするモードをみるのに、自由端に近づく程傾きが小さくなっている。この点単純梁の一端固定の場合に、自由端に近い程傾きが大きくなるのと異なり、板構造としての特徴が観察される。

ところで、これらの計算はリブ 1 枚ならびに、リブとリブの間の側壁 1 枚が長方形の 1 要素としてすすめられており、要素の分割としては最も粗いものであるにもかかわらず、固有振動数、振動モードともに比較的良好な結果をえたことは、この方法を用いて工作機械構造の振動特性を求める問題について、明るい見通しをえたいといえよう。

表 2 は、図 12 に示したベッド構造について同様な計算実験をおこなった結果をまとめたものである。(a)* は(a)と同じ寸法で厚さのみを 0.6 mm の鋼板模型とした場合の結果である。物性定数の把握が容易なため、計算結果が実験結果に比べて大きくなり、有限要素法による結果の本来特性があらわれている。

(a), (b) についての結果を比較すると、斜めのリブが Y 軸まわりのまげ、x 軸まわりのねじりのモードについて固有振動数の上昇にはたしている役割が明瞭に示されている。まげについては約 5 倍、ねじりについては約 4 倍の固有振動数の上昇となっている。(c), (d) にたいする結果を(a), (b) のそれと比べれば、すべり面の存在が固有振動数におよぼす影響の程度が明らかである。大きくはないが固有振動数の上昇しているのがみられる。すべり面相当の梁が付けられていることから、(a) と(c) あるいは、(b) を(d) の対応する固有振動数に対応するモードは一致せず(c), (d) では、Y 軸まわりのまげでも、ややねじりの入ったものとなっている。

この表の中で最も問題な点は、(a), (a)* にみるように X 軸まわりのねじりの固有振動数について、実験値が計算値の約 1/2 となっていることである。以上の計算では面内の角変形 θ_z にたいする変位関数が考慮されていないのにたいし、模型実験ではこれが生じているとみられるのが 1 つの理由である。この点を解決することについては、新たな要素による表示についての提案もあり¹⁶⁾、今後の問題であろう。

図 10(e) についてみると、(a), (b) にみられるような Y 軸まわりの曲げのモードが明瞭にあらわれる対称性がなくなり、表の中に並記しにくい、計算結果は 150.2, 155.4, 176.9 Hz 等にきられ、最低次の固有振動数としては(b)と同程度の値がえられることがわかる。しかし固有振動数が互いに密接していることには注意を要しよう。

図 14 は、図 11 の左側の脚について、下端固定の条件で固有振動数と振動モードを比較している。計算は側壁 1 枚について、中心で直交する分割線で区分される 4 要素としておこなっている。図中白丸は、振幅が充分小さいことをあらわしている。この場合も、固有振動数、

表 2 旋盤ベッド模型の固有振動数

図 12 のベッド構造 主要モード	(a)*		(a)		(b)		(c)		(d)	
	実験	計算	実験	計算	実験	計算	計	算	計	算
Y 軸まわり曲げ	21.0	25.3	29.8	28.2	155	150.9	39.3		160.7	
Y 軸まわり曲げ	68.0	77.6	116	85.9	520	586.0	129.0		649.9	
Y 軸まわり曲げ	117	132.0	190	154.3	—	714.9	235.0		—	
X 軸まわりねじり	210	446.4	90.0	176.4	—	653.0	175.7		580.0	
Z 軸まわり曲げ	—	473.0	—	159.6	—	171.9	167.2		179.5	

* 鋼板

[Hz]

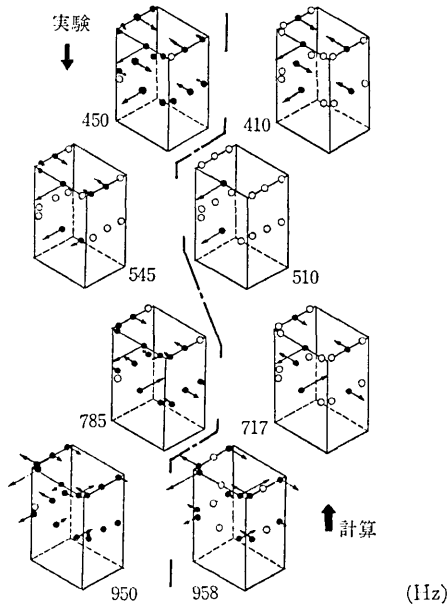


図 14 太脚模型の固有振動数と振動モード

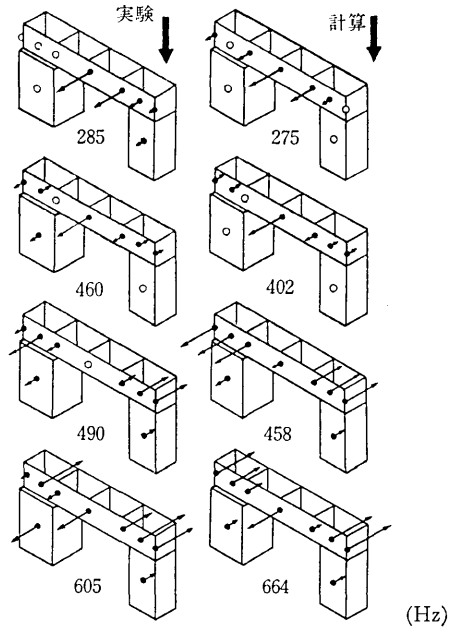


図 15 施盤基本構造模型の固有振動数と振動モード

振動モードともかなりよく一致していることがみられる。脚を柱あるいは梁とみてる時、その曲げに対応するモードとしては、計算値 510 Hz にその 1 つがみられる。410, 717 Hz のモードは側壁が振動し、断面がつぶみ形に変形するものである。958 Hz のモードは、断面が直角 2 方向に同時に剪断をうけているとみられるもので、ねじりに対応しているとみてよいであろう。もう一方の脚についても、同様な計算と実験の結果の一致をみている。

3) 模型基本構造についての解析

以上の脚・ベッドを組み上げた図 11 の基本構造の振動特性の計算をすすめるには、全体を板構造として扱うことができればよいが、65K 語程度の記憶容量の計算機では、これまでみてきたような最も粗い分割でも図 11 の基本構造を計算するのが難しいというのが現状である。そこで上に計算した板構造としての要素構造の特性にもとづき、これと基本次の振動特性が等価な単純梁で各要素構造をおきかえて基本構造を構成し、解析をすすめることを試みた。結局全体としては梁構造としての扱いになるが、固々の要素構造で板構造としての解析をすすめた結果にもとづいて系が構成されていることに特徴があ

表 3 等価梁モデルの主要モードの固有振動数

主要モード 要素構造	曲げ	曲げ	ねじり
ベ ッ ド	26.7	154	158
太 い 脚	418	556	715
細 い 脚	546	546	842

[Hz]

ろう。

表 3 は、ベッド、太い脚、細い脚の曲げ 2 方向と、ねじりに対応しているモードの最低次の固有振動数の計算結果を示してある。表 2 の結果と僅かに違っている点が見られるのは、縦弾性係数の振動数特性校正以前の値を示しているためである。

いま長さもとの要素構造に等しく、また断面積もとの構造で剛性をきめる主要な部分の断面積に等しくなるようにする。ここで、板構造としての解析からえられる固有円振動数を ω_p 、リブ部分は集中質量とし、他は上にのべた梁として計算される固有円振動数を ω_s とする。また梁として扱う時の剛性をきめる部分の断面 2 次モーメントを I とする。梁として扱ってえられる固有円振動数が板構造としてのそれに等しくなるよう

$$I_c = (\omega_p / \omega_s)^2 \cdot I \tag{21}$$

によって等価な断面 2 次モーメントを求める。また、ねじりに対応するモードに関しては、等価横弾性係数 G_c をねじりに対応する固有振動数を用いて(21)と同様な関係から求める。

図 15 の計算の結果は、表 3 に示す各要素構造の固有振動数にたいして、上述の過程を経て等価な梁を設定し、それを組上げた梁構造の形で基本構造としての特性を求めたものである。梁構造についての計算法は、質量を集中化する有限要素法によっており、脚を 2 質点、ベッドを 5 質点としている。計算結果は比較のためもとの構造の上に重ねて示してある。

計算がかなり粗い等価梁としてなされたものであるにもかかわらず、低い方から 3 つの固有振動数、振動モードはかなりよく一致している。4 番目のモードについて

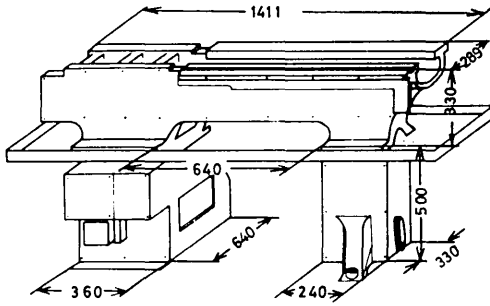
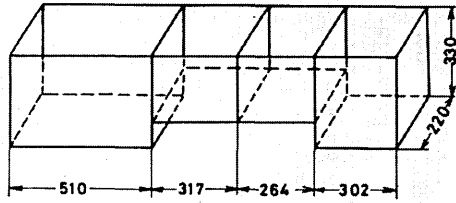
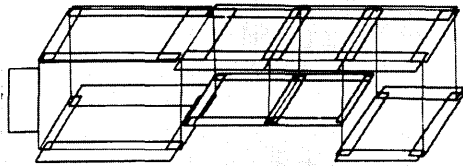


図 16 施盤実機基本構造



(a)



(b)

図 17 実機ベッド計算模型

も中央から右半の傾向はよく一致している。実機では、計算値の 275, 458 Hz のモードが低い方から 2 つの固有振動数に対応して観察されるのが普通である¹⁷⁾。402 Hz のモードは、実系にくらべてかなり撓み易い合成樹脂材料を用いていること、あるいは脚下部の境界条件が実系ではばね支持とみられるのに、模型では固定となっているため、第 2 番目と第 3 番のモードが実系の場合と入れかわっているともみられることなどが、実系にみられる振動モードの順との違いの理由かと考えられる。

模型についての実感として、要素構造、特にベッドは柔らかくできているものの、基本構造としてくみあげてみると、脚下端が完全に固定されているためもありかなり剛い感の模型構造となるにもかかわらず、実系と比較しう形の振動モードが測定できることは興味深い。なお、ベッド構造として図 12(b) についても同様な検討を試みた結果、基本次の固有振動数として実験、計算に 320, 340 Hz と、同様にほぼ一致する結果をえている。これらの値は図 15 の結果とくらべてやや高くなっている。

4) 実機ベッドについての解析

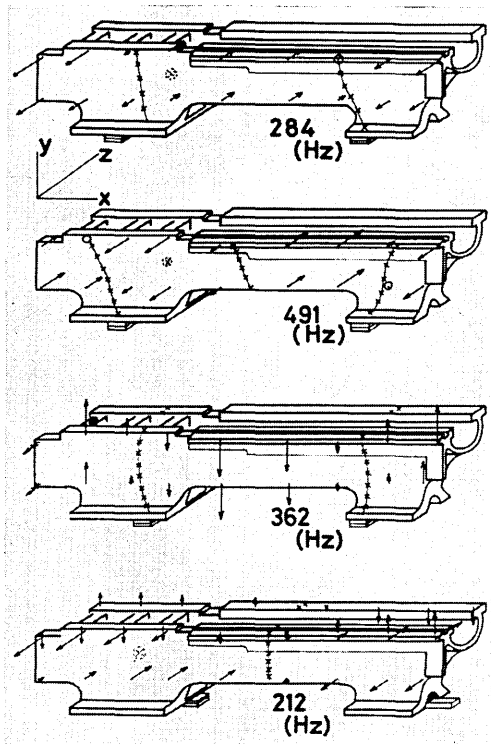


図 18 施盤ベッド実機の固有振動数と振動モード

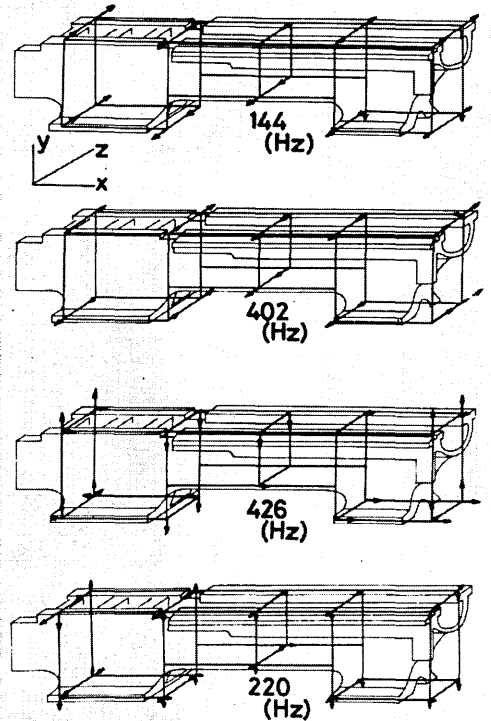


図 19 計算による施盤ベッド固有振動数と振動モード

以上模型を対象とした解析の経験をもとに、実機を対象とすることを試みた。図 16 は、対象とした施盤の基

本構造の概形寸法を示したものである。まずベッドに注目し、計算のためのモデル化を図 17 のようにした。リップを適宜集めたり、すべり面、脚と結合のためのフランジ等は同図(b)に示すように梁としたりして単純化をはかっている。なお板厚は 12 mm である。

図 18 は、実機ベッドの固有振動数と振動モードを示す。支持条件としては、これまでもゴムパッドや木片等を用いた場合についての報告があるが⁸⁾、本研究では、ゴムパッドの他、鋼球の上に球面座をもったベアリングをのせた支持装置を作り使用した。これによって垂直方向の支持を除き、充分拘束が小さく、しかも安定な支持条件を実現することが可能となった。

図の中で 362 Hz のモードは、両側壁が面内に振動するものであり、機械全体に与える影響についてはともかく、実験的にはこれまでに報告されていないモードである。曲げ振動の 2 次よりは低くでていることには注意すべきであろう。結果的には、ねじりに対応するモードが最も低い固有振動数であらわれている。表 4 には、各種の支持条件による固有振動数測定結果を示す。ゴムパッド支持に比べ僅かではあるがベアリング支持の方が柔らかくなっていることがわかる。

表 4 実機旋盤ベッドの固有振動数

モード	支持条件	支持条件				解析結果 (自由支持)
		ゴム支持	ベアリング 8 点支持	ベアリング 内側 4 点支持	ベアリング 外側 4 点支持	
Y 軸まわり曲げ	1 次	284	275	269	277	144
	2 次	491	467	484	500	402
Z 軸まわり曲げ	1 次	362	335	340	361	426
Y 軸まわりねじり	1 次	212	195	202	210	220
	2 次	643	—	—	635	504

(Hz)

図 19 は、完全自由の支持条件で計算した結果である。この計算では、表にみたねじりモードにたいする固有振動数の実験計算の相異を補正するため Zienkiewicz¹⁸⁾¹⁹⁾にもとづき剛性マトリックスに、

$$\begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{xj} \\ M_{zk} \\ M_{xi} \end{Bmatrix} = \alpha \begin{Bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ K_4 & K_1 & K_2 & K_3 \\ K_3 & K_4 & K_1 & K_2 \\ K_2 & K_3 & K_4 & K_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \\ \theta_{zk} \\ \theta_{xi} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

ただし

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{3}{2} Etab, & K_2 &= -\frac{a}{a+b} Etab \\ K_3 &= -\frac{b}{a+b} Etab, & K_4 &= -\frac{1}{2} Etab \end{aligned} \quad (23)$$

なる項を導入して扱うことを試みている。モードとしては、上から順に図に示す結果とよく対応している。しかし、固有振動数についてはあまりよい一致をみていない。特に本来最もよく一致することを期待してよいはず

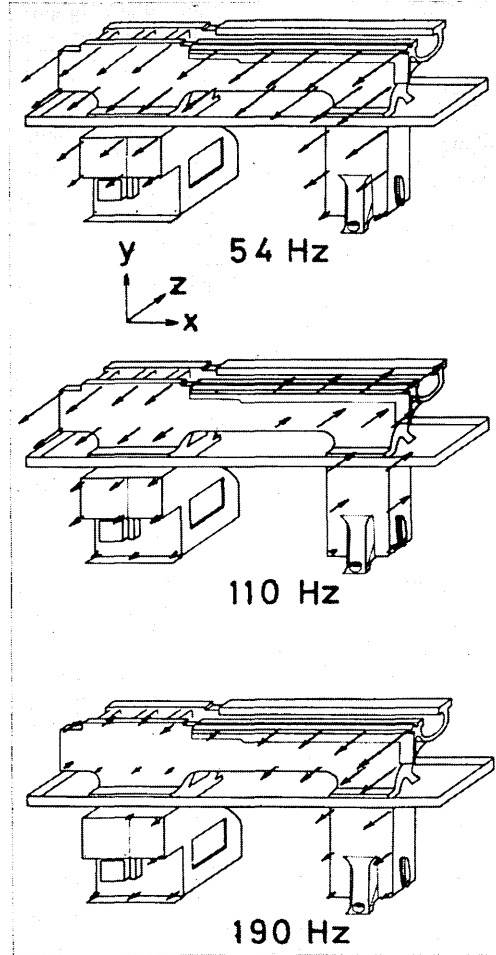


図 20 実機旋盤基本構造の固有振動数と振動モード

の、Y 軸まわりの曲げの 1 次の固有振動数が大きく異なっている。模型の場合には計算値が大きい値を示していたねじりに相当するモードの固有振動数が、よく一致している。さらによく一致する結果をうるために、境界条件のとり方、計算モデルの妥当性、上記計算で 0.02 としている α のとる妥当な値等について、今後の検討が必要である。

5) 実機基本構造についての解析

図 20 は、旋盤の基本構造について固有振動数、振動モードの測定結果を示す。固有振動数の低いものから、ベッドが一樣に前後に振動する、ベッドの両端が逆位相となる、むかって右端のみが大きく振動する等がモードの特徴としてとらえられる。

図 21 は、先のベッド構造とともに、脚を側壁各 1 枚を 1 要素とする箱に単純化して計算をすすめた結果を示す。脚下端は完全固定としている。振動数が一致していないが、振動モードをくらべると、脚の形の著しい単純化にもかかわらずよく一致していることがわかる。モードで比較をすると、第 2 と第 3 の固有振動数の順序が入

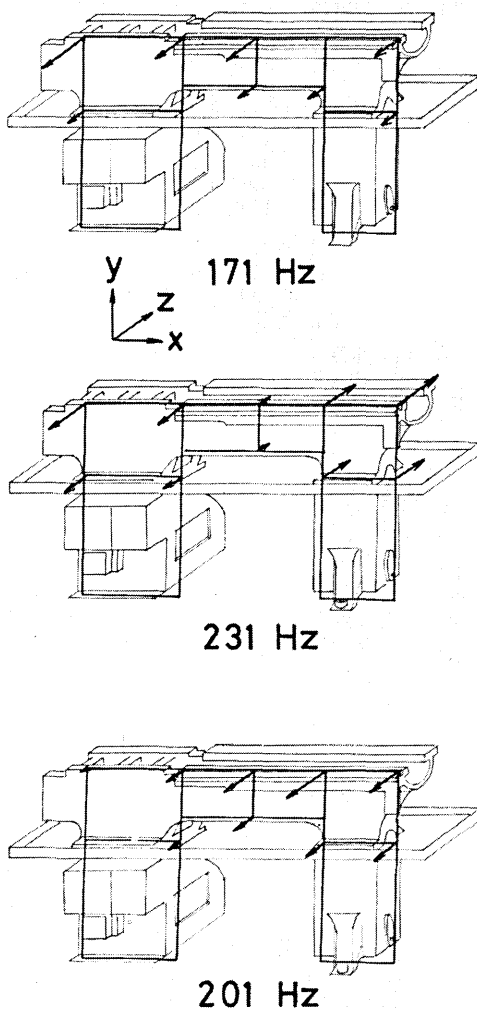


図 21 算による施錠基本構造の固有振動数と振動モード

れ替っているが、下端支持をばね支持とすることによって、実機の結果に近くなることが期待される。

工作機械構造の振動特性としては、最低次の固有振動数をできるだけ高くとれることが望ましいことからすれば、計算の結果が実験値より3倍程度高いということは、構造と固定条件が満足されればとりうる限界の値を示しているとみることもでき興味深い。

4. 減衰定数の推定について

工作機械の振動問題を考えるにあたって、いま1つの重要なパラメータは減衰定数である。通常これが臨界減衰係数にたいする系のもつ減衰係数の比をもってあらわされる。工作機械の場合、この値は約3%前後と測定されている場合が多い。この値ができるだけ大きい値であることは、剛性をできるだけ大きくすることとあわせて防振の見地から望ましいことであるが、当面、多段の測定例について経験的に値の範囲を知るようにすることが

重要であろう。減衰定数の測定も基本次の振動数にたいしては比較的容易であるが、高次振動数について求めることが、必ずしも容易でない。本稿では、構造に衝撃を与えてえられるインパルス応答を利用して減衰定数を求める新たな試みについて述べる。すなわちインパルス応答に高速フーリエ変換²⁰⁾を応用してパワー・スペクトルを求めたのち、パワー・スペクトルにみられる山ごとに1自由度系を対応させて、曲線適合によって各固有振動数に対応する減衰定数を求めることを試みている。

減衰定数を求める方法については、これまでも種々のものが提案されている。これらについては、すでに概観を試みている²¹⁾が、それぞれに一長一短がある。なかでもインパルス応答を利用することが、特に加振実験をする必要もなく比較的簡単にもとめられることもあり、しばしば利用されてきた。しかし、実系ではしばしば減衰波形がビートをうちやすく、その場合には正確な減衰波形を把握しにくい、高次振動の減衰波形は低次振動の波形に重畳してしまうので、やはり正確な形を知りにくい等の難もあった。

一方伝達関数測定装置を用いて、振動系のインピーダンス特性を精度よく求められるようになったことを利用し、各共振点ごとに1自由度系を仮定して曲線適合するように固有振動数、減衰定数をきめる方法²²⁾が提案されるに至っている。これによれば、高次の振動数に至るまでの減衰定数が、実験データをもとに計算機の処理によって求められることになる。

以下にのべる方法²³⁾は、上にのべた2つの方法の特徴を生かすことをねらいとしている。インパルス応答の振動数領域の特性をパワースペクトルで示すことを考えるとこれまで、しばしば用いられてきた相関関数を求めた上でフーリエ変換する方法は、データ長を充分とりにくく、かつ相関の長さも充分長くはとりにくいこと等のため、実用的でない。高速フーリエ変換がこれらの難点を補ない、減衰波形の振動数領域での特性表示には適していると思われる。

いま1自由度ばね質点系のインパルス応答は、インパルスの強さも考慮した形として、

$$f(t) = \frac{I\omega_0^2/h}{\omega_0\sqrt{1-h^2}} e^{-h\omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1-h^2} t \quad (24)$$

とあらわされる。ここで、 I : インパルスの強さ、 ω_0 : 固有円振動数、 h : 減衰定数、 k : ばね定数である。(24)をラプラス変換してえられる $F(j\omega)$ の絶対値の2乗をとって、パワー・スペクトル $S(\omega)$ は

$$S(\omega) = \frac{\omega_0^4 D}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega_0^2 \omega^2} \quad (25)$$

と求められる。ただし $D = (I/k)^2$ である。

図 22 において、実線は測定結果などによって与えられるパワースペクトルであるとする。この曲線を点線に

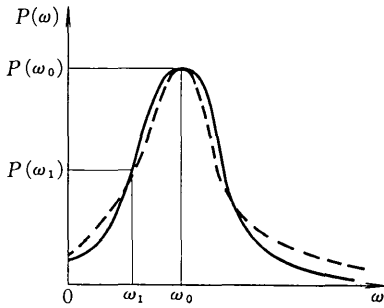


図 22 パワー・スペクトルの曲線適合

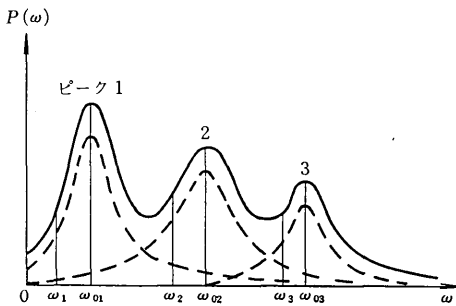


図 23 多ピーク・パワー・スペクトルの曲線適合

示した1自由度系のそれによって近似することを考える。両方の曲線の値が ω_1, ω_0 で一致するよう D, h を与えることとする。(25)を用いると、 ω_1, ω_0 において次式が成立する。

$$P(\omega_1) = \frac{\omega_0^4 D}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4h^2 \omega_0^2 \omega_1^2} \quad (26)$$

$$P(\omega_0) = \frac{D}{4h^2} \quad (27)$$

これより

$$h = \sqrt{\frac{D}{4P(\omega_0)}} \quad (28)$$

$$D = \frac{(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{P(\omega_0)}{\frac{P(\omega_0)}{P(\omega_1)} \omega_0^2 - \omega_1^2} \quad (29)$$

として D, h が求められる。(28), (29)から明らかなように、この際 $P(\omega_0)$ ならびに $P(\omega_0)/P(\omega_1)$ の比がわかればよい。

ところで、構造物の衝撃波形のパワー・スペクトルを単純化し模型的にあらわせば、図 23 のように示される。すなわち、インパルス応答中に含まれる固有振動数に対応していくつかの山をもった実線のようなパワー・スペクトルが描かれる。近似的には、各山が1自由度系のそれに対応しているとみなせるが、実際には、これらが点線で示されるように、互いに他の固有振動数の影響が入りこんでおり、その分の補正をすることによって、各固有振動数ごとに(25)の形に分離した形で特性を表わすことが可能になり、したがって各固有振動数に対応する減

衰定数を求めることができる。

以下にこの間の過程の代表的なものをあげておく。一般に N 箇の山を有する衝撃波形のパワー・スペクトル曲線を N 箇の1自由度系のパワー・スペクトルの重ね合わせで近似すれば、

$$S_N(\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{D_j \omega_j^4}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4h_j^2 \omega_j^2 \omega^2} \quad (30)$$

ここで、 j は第 j 番目の山をあらわすものとする。 ω_j は与えられたパワー・スペクトル曲線から求めることができるから、 $S_N(\omega)$ がパワー・スペクトルと一致するように h_j, D_j をきめればよいこととなる。(30)を h_j, D_j で偏微分すると、

$$\frac{\partial S_N(\omega)}{\partial h_j} = \frac{-8 D_j h_j \omega_j^6 \omega^2}{\{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4h_j^2 \omega_j^2 \omega^2\}^2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial S_N(\omega)}{\partial D_j} = \frac{\omega_j^4}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4h_j^2 \omega_j^2 \omega^2} \quad (32)$$

$$j=1, 2, \dots, N$$

と求められる。これにより $S_N(\omega)$ の増分 $\Delta S_N(\omega)$ は、 h_j, D_j の増分 $\Delta h_j, \Delta D_j$ を用いて、

$$\Delta S_N(\omega) = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\partial S_N(\omega)}{\partial h_j} \Delta h_j + \frac{\partial S_N(\omega)}{\partial D_j} \Delta D_j \right\} \quad (33)$$

と与えられる。

パワー・スペクトルの各山に対して、固有円振動数 ω_j およびその近くの適当な点 ω を選び (28), (29) を用いれば、各山に対する $h_j, D_j (j=1, \dots, N)$ の第1近似値がえられる。これらを(30), (33)に代入してえられる関係をそれぞれ $S_{N_i}(\omega), \Delta S_{N_i}(\omega)$ とする。 $\Delta S_{N_i}(\omega)$ の中で $\Delta h_j, \Delta D_j$ が未知であり、与えられているパワー・スペクトルを $P(\omega)$ として

$$P(\omega) - S_{N_i}(\omega) = \Delta S_{N_i}(\omega) \quad (34)$$

となるように $\Delta h_j, \Delta D_j$ を求めると、 h_j, D_j の第2近似値は

$$h_j = h_{j1} + \Delta h_j \quad (35)$$

$$D_j = D_{j1} + \Delta D_j \quad (36)$$

と求められ、以下同様の過程をくりかえす計算によって h_j, D_j が求められる。(34)において $\Delta h_j, \Delta D_j$ は $j=1$

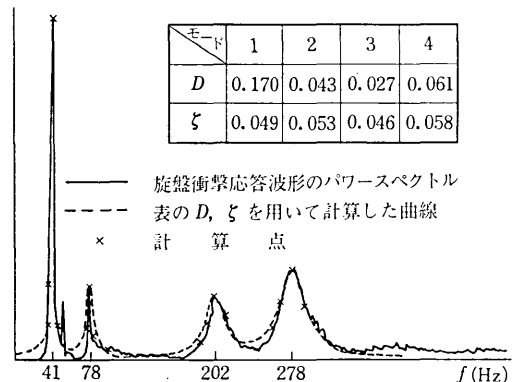


図 24 インパルス応答のパワー・スペクトルを用いた減衰定数の計算例 (図中の ζ は h に訂正)

…、 N にたいして $2N$ 個の未知数となるから、 ω としては各山に対して 2 個づつの点をとれば充分であることがわかる。

この方法が有用なことは数値実験によっても確かめられるが、図 24 は旋盤インパルス応答にこの方法を適用した結果である。点線は計算の結果求められた h, D を用いて与えられるパワー・スペクトルで、実線で示されるインパルス応答からえられたものと非常によく一致していることがわかる。減衰定数の値そのものについては、他の方法で求めた結果などと比べてやや大きくなっているが、パワー・スペクトルの山の高さや山の広がり方をもとにして求める従来の方法にくらべれば、機械的かつ精度高く求められる。

5. おわりに

工作機械構造の固有振動数、振動モード、コンプライアンス等を設計段階で知るため、計算によってこれらを知る問題について筆者らの研究を中心にとりまとめた。

計算機と計算法の発展によって、かなり複雑な構造についてこれらを知るようになるようになってきている反面、板構造としての解析で面内角変形の項に起因する計算上の問題点、比較的簡単な構造でも大型の計算機が必要となること、梁構造として扱うとしてもそのモデル化の方法等、等に問題点と経験の蓄積を要請される点が少ない。しかし、工作機械構造が基本的に板構造であることを考えると、今後は有限要素法による解析が大きな役割をしめると思われる。一方構造全体としての振動特性は、梁構造としての特徴を具えているとみてよい面もあるから、強制振動の問題、コンプライアンスの計算、要素構造の組み上げによる基本的な構造の振動特性の推定等には、梁構造としての計算をすすめることが、計算機使用面での制約を少くした上、基本的な振動特性のみでもまず把握することの意義があろう。

減衰定数は、自励振動の安定限界、コンプライアンス等を推定する場合には重要な因子となるが、現在のところできるだけ正確なデータの蓄積が望まれる段階である。その意味で、上にのべた方法を有効に活用してゆく必要がある。この方法はさらに伝達関数測定装置を用いた測定結果にも活用の道を拡げることが望まれる一方、固有振動数どうしが連成している場合についての精度、どの程度まで隣接し合う系について適用しうるか等の点について検討すべき余地が残されている。

これら工作機械構造の振動特性を推定する問題が地道に解決され、性能の一層優れた工作機械の設計、開発がすすむことが望まれる。

これらの問題について、日頃有益な御意見を頂いている本学、竹中・互理・藤井教授に御礼申しあげる。著者

らの研究については、鈴木講師、駒崎、大堀両技官、大学院生諸君の協力に負う所が大であり感謝の意を表す。

(1973年8月10日受理)

参考文献

- 1) 佐藤：工作機械の振動について、生産研究、24-8, 1971, 55.
- 2) 佐藤：工作機械の振動に関する研究動向、機学誌、76-658, 1973-9, 1105.
- 3) J.C. Matbaek: Beam Method for the Prediction of Vibrator Characteristics of Machine Structures, Proc. 5th MTDR, 1964-9, 23.
- 4) S. Taylor and S.A. Tobias: Lumped Constants Method for the Prediction of the Vibration Characteristics of Machine Tool Structures, Proc. 5th MTDR, 1964-9, 37.
- 5) F.M. Stansfield: Some Notes on the Use of Perspex Models for the Investigation of Machine Tool Structures, Proc. 6th MTDR, 1965-9, 157.
- 6) 安井、菅野、武内、渋谷：工作機械の模型実験用材料としての合成樹脂材料について、機試所報、20-4, 1966.
- 7) 安井、菅野、竹内、渋谷：工作機械の模型実験用材料としての合成樹脂について（第2報）超低周波試験法、機試所報、22-6, 1968.
- 8) 高橋、大野：旋盤ベッドの固有振動解析、生産研究、23-7, 1971, 277.
- 9) H.C. マーチン、吉識監訳：マトリックス法による構造力学の解法、培風館、昭 42.
- 10) 高橋：骨組構造の振動解析、生産研究、21-6, 1969, 411.
- 11) 吉村：電子計算機による構造物の動特性解析法…工作機械の動特性解析法の研究（第一報）、精機、36-3, 1970, 212.
- 12) M. Yoshimura and T. Hoshi: Computer Approach to Dynamically Optimum Design of Machine Tool Structures, Proc. 17th MTDR, 1971-9, 439.
- 13) 佐田、宮本、高島、三好：有限要素法による工作機械動剛性の解析、精機、37-3, 1971-218.
- 14) H. Sato, Y. Kuroda and M. Sagara: Development and its Application of the Finite Element Method for the Vibration Analysis of Machine Tool Structure, 14th MTDR, 1973-9 (To be presented).
- 15) O.C. ツイエンキーヴィッツ、Y.K. チューン、吉識監訳：マトリックス有限要素法、培風館、昭 45.
- 16) 吉田、雨宮、増田：立体構造解析のための薄板有限要素、マトリックス構造解析法研究発表論文集、鋼構造協会第7回大会、1973-6, 105.
- 17) H. Sato and T. Akutsu: A Study on Identification of Dynamic Characteristics of Machine Tool by Means of Micro Tremor, Proc. 12th MTDR 1971-9, 281.
- 18) O.C. Zienkiewicz and others: Arch Dams Analyzed by A Linear Finite Element Shell Solution Program, Symp. on Arch Dams, ICE, 1968-3.
- 19) I. ホランド、K. ベル、川井監訳：有限要素法…応力解析への応用、朝倉書店、昭 47, 207.
- 20) 吉沢：数値解析Ⅱ、岩波講座基礎工学4, 1968.
- 21) 竹中、佐藤、坪、市村、三井：減衰定数の推定法について、機械学会、工作機械の剛性および切削性能の向上に関する研究分科会成果報告、1973（印刷中）.
- 22) A.L. Klosterman and J.R. Lemon: Building Block Approach to Structural Dynamics, ASME 69-Vibr-304, 1969.
- 23) 三井、佐藤：衝撃応答のパワー・スペクトルによる減衰定数推定の一方法、機講論、730-3, 昭 48-4, 123.