

有限要素法による一次元衝撃解析の一考察

A Note on the One-Dimensional Impact Analysis by the Finite Element Method

中桐滋*
Shigeru NAKAGIRI

1. まえがき

動力学問題を有限要素法により解析するとき、運動方程式を時間に対して直接積分せず、変位の時間に対する変化を仮定し安定な解を得ようとする Newmark 等の研究結果が応用されている。その応用に際して、境界条件の与え方が問題となる場合があるので、1次元の均質な棒が引張りを受けるときの衝撃の伝ばを例にとって考察した結果を報告する。ただし、半径方向の慣性力の影響は省略してある。

2. Newmark 法と境界条件

Newmark¹⁾はある時間増分 Δt 内の加速度変化が線形であると仮定して、変位増分 Δu と速度と加速度増分 $\Delta \dot{u}$, $\Delta \ddot{u}$ の関係を

$$\Delta \ddot{u} = 3\left(\frac{\Delta u}{\Delta t} - \dot{u}\right) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{u} \quad (1)$$

$$\Delta \ddot{u} = \frac{6}{\Delta t}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t} - \dot{u}\right) - 3\ddot{u} \quad (2)$$

と与えている。この式では変位は時間の3次関数となっており、同じ3次の関係を用いた Houbolt²⁾の回帰公式と一致し、 Δt に対する逐次積分による変位解は安定である。系に減衰が作用しない場合について、 i 番目の棒要素の運動方程式を増分形でマトリックス表示し、加速度増分に(2)式を代入すれば、周知の剛性方程式

$$\begin{aligned} & \left(\left[k\right] + \frac{6}{\Delta t^2}\left[m\right]\right)\left\{\begin{array}{l} \Delta u_i \\ \Delta u_{i+1} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \Delta f_i \\ \Delta f_{i+1} \end{array}\right\} \\ & + 3\left[m\right]\left\{\begin{array}{l} \ddot{u}_i + \frac{2}{\Delta t}\dot{u}_i \\ \ddot{u}_{i+1} + \frac{2}{\Delta t}\dot{u}_{i+1} \end{array}\right\} \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。ここで $[k]$, $[m]$ は剛性および質量マトリックス、 $\{f\}$ は静的荷重増分で以後この項が零の場合のみを扱う。棒要素の長さ Δl を波動伝ばの特性曲線にそって $\Delta l = c\Delta t$ (c : 音速) とし、変位は要素内で線形とする。また $[m]$ として分布質量マトリックスをとる。要素断面積を A 、綫弾性係数、密度を E 、 ρ とすると

$$\left[k\right] = \frac{EA}{\Delta l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \left[m\right] = \frac{\rho A \Delta l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rho = \frac{E}{c^2} = \frac{\Delta t^2}{\Delta l^2} E \quad \therefore \frac{6}{\Delta t^2} \cdot \frac{\rho A \Delta l}{6} = \frac{EA}{\Delta l}$$

より、(3)式左辺は

$$\left[k\right] + \frac{6}{\Delta t^2}\left[m\right] = \frac{EA}{\Delta l} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

したがって系全体のマトリックスも対角マトリックスとなる。節点 $i=1$ を衝撃端とすると、そこでの変動は(3)式右辺の変化を通じて内部点へ Δt ごとに進行する。今、初期条件が全て零であって衝撃端が一定速度 V で引張られる場合の境界条件を例にとる。この条件を変位、速度、加速度増分で与えたときの(1), (2)式の計算結果を表1に示す。本表では境界条件として与えた量を太字で示す。 Δu を指定すると \dot{u}, \ddot{u} 振動しつつ指数関数状に発散し、 $\Delta \dot{u}$ を指定すると \ddot{u} が振動、 $\Delta \ddot{u}$ 指定の場合のみ他の成分も妥当で、擾乱をうける部分は2要素にとどまる。(1), (2)式の関係を適用せず、各成分を独立に境界条件として与える(CASE 4)と波頭部の擾乱は3要素に及ぶ。境界値に本表のような振動成分を残しておくと、その影響は $\Delta l = c\Delta t$ の関係により時間とともに内部節点にも現われ、図1に示すように変位、ひずみに異常を生ずる。したがって種々の境界条件を取り扱うときには、(2)式を用いて(3)式を加速度増分により

$$\begin{aligned} & \left(\left[k\right] + \frac{6}{\Delta t^2}\left[m\right]\right)\left\{\begin{array}{l} \Delta \ddot{u}_i \\ \Delta \ddot{u}_{i+1} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \Delta f_i \\ \Delta f_{i+1} \end{array}\right\} \\ & - 3\left[k\right]\left\{\begin{array}{l} \ddot{u}_i + \frac{2}{\Delta t}\dot{u}_i \\ \ddot{u}_{i+1} + \frac{2}{\Delta t}\dot{u}_{i+1} \end{array}\right\} \end{aligned} \quad (5)$$

として表現し

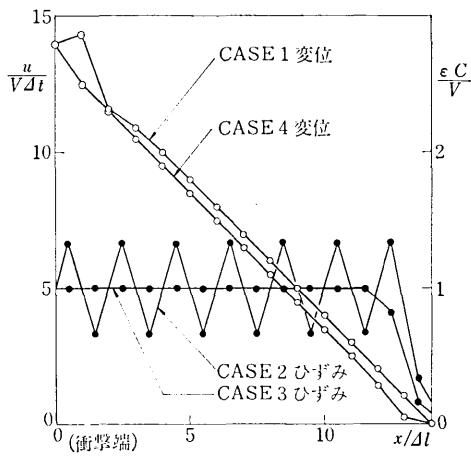
$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{\Delta t}{2}(\Delta \ddot{u}_i + 2\ddot{u}_i)$$

表1 Newmark の公式による変位、速度、加速度の関係

$T = t/\Delta t$	CASE 1			CASE 2			CASE 3		
	$u/V\Delta t$	\dot{u}/V	$\ddot{u}/\Delta t/V$	$u/V\Delta t$	\dot{u}/V	$\ddot{u}/\Delta t/V$	$u/V\Delta t$	\dot{u}/V	$\ddot{u}/\Delta t/V$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	3	6	1/3	1	2	1/6	1/2	1
2	2	-6	-24	5/3	1	-2	1	1	0
3	3	27	90	7/3	1	2	2	1	0
4	4	-96	-336	11/3	1	-2	3	1	0

* 東京大学生産技術研究所 第1部

研究速報

図1 $t=14\Delta t$ における変位とひずみの分布

$$\Delta u_i = \Delta t \left(\frac{\Delta t}{6} (\Delta \ddot{u}_i + 3\dot{u}_i) + \dot{u}_i \right) \quad (6)$$

とすれば、加速度増分をもとに境界条件をふくめて統一的に演算を実行することができる。

3. Newmark 法による波動伝ばの解析

今 $E, \rho, \Delta l$ が一様で、節点 $i=m$ で断面積のみが A から $A'(A'/A=\beta)$ へ変化する場合を考える。 $\Delta l=c\Delta t$ としたとき(5)式は節点 m の近傍で

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3(1+\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 6\beta \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \Delta \ddot{u}_{m-1} \\ \Delta \ddot{u}_m \\ \Delta \ddot{u}_{m+1} \end{array} \right] \\ & = \left[\begin{array}{ccc} -6 & 3 & 0 \\ 3 & -3(1+\beta) & 3\beta \\ 0 & 3\beta & -6\beta \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \ddot{u}_{m-1} + \frac{2}{\Delta t} \dot{u}_{m-1} \\ \ddot{u}_m + \frac{2}{\Delta t} \dot{u}_m \\ \ddot{u}_{m+1} + \frac{2}{\Delta t} \dot{u}_{m+1} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

となる。したがって、節点 m を通過して節点 $m-1$ から $m+1$ へ移行するとき加速度増分は $6/3(1+\beta)$ 倍となり、逆の場合には $6\beta/3(1+\beta)=1-(1-\beta)/(1+\beta)$ となる。この関係は波頭が断面積の異なる部分に入射したときに生ずる透過波と反射波の関係³⁾と一致するものである。

さらにまた、前述のように、断面積が一様 ($\beta=1$) である棒が一定速度 V の引張衝撃を受ける場合 $\Delta \dot{u}$ を(7)式より求めれば、波頭部を除いて $\Delta \dot{u}=0$ となり、 $\Delta l=c\Delta t$ によって時間と位置の関係を置換えれば、表1右欄は棒内部の衝撃の進行(下から上へ)を示し、 $T=0$ は波頭位置となる。波頭通過後の定常ひずみ領域(T

≥ 2) の節点では $\Delta \dot{u}_i = \dot{u}_i = 0$ 、さらに(6)式より $\dot{u}_i = V$ 、 $\Delta u_i = V\Delta t$ の結果が得られる。したがって、

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = V = \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

が各節点で成立する。ある節点における変位増分は、 $\Delta l = c\Delta t$ だけはなれた隣接節点間の変位差であるので、加速度まで境界条件を満足させるようにして Newmark 法を適用すれば

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x} \quad \therefore \sigma = \rho c V \quad (8)$$

の関係もふくまれることになる。

一方、 $\Delta l \neq c\Delta t$ の場合には(4)式で対角マトリックスの性質が失われ、ある節点での加速度は剛性マトリックス項を通じて他の節点における加速度増分に影響するので上述の衝撃伝ばに関する諸関係は近似的にしか成立しなくなる。衝撃速度が十分大きく、棒中に塑性域が発生する場合は、音速(塑性域については $c = \sqrt{\partial \sigma / \rho \partial \epsilon}$)の値が位置の関数となり、一様要素分割では $\Delta l = c\Delta t$ の関係を保つことができない。この影響を調べるために、(5)式を用いて塑性波の伝ばの試算を行なった。材料の構成方程式としてアルミニウム系で歪速度に依存しない

$$\sigma = \sigma_y \quad \sigma \leq \sigma_y \quad (\sigma_y: \text{降状応力})$$

$$\sigma = \sigma_y + K(\epsilon^{0.4} - \epsilon_y^{0.4}) \quad \sigma > \sigma_y$$

$$E = 7031 \text{ kg/mm}^2 \quad K = 35.15 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_y = 7.031 \text{ kg/mm}^2 \quad \epsilon_y = 0.001 \quad (9)$$

を用い、要素数は 100、 $\Delta l=1 \text{ mm}$ とした。この材料の弾性域の音速は $c = 5.052 \times 10^6 \text{ mm/sec}$ で、時間増分は $\Delta t = \Delta l/c = 0.1979 \times 10^{-6} \text{ sec}$ である。衝撃条件は図2に示すように $t=1.78 \times 10^{-6} \text{ sec}$ まで一定加速度で加速し、以後 $V=1.67 \times 10^4 \text{ mm/sec}$ とするものである。この条件を満すように加速度増分で境界条件を与え、各時間増分に対して系全体の(5)式を解いて棒中のひずみ $\epsilon = (u_{i-1} - u_i)/\Delta l$ を求める。速度境界条件が ramp 状であると、(8)式より棒内では弾性域でのひずみも ramp 状に進行する。 V までの加速過程中に時間増分の中途で衝撃端要素内の応力値が降状応力をこえるので、そのときは荷重増分法による弾塑性計算⁴⁾と同様に、1要素ずつ降伏するように時間増分を調節した。降伏後の塑性要素では(9)式の $\partial \sigma / \partial \epsilon$ の値による塑性剛性マトリックスを用いる。

以上の計算結果の内、塑性波の伝ばを示すひずみ分布を $t=2.02 \times 10^{-6} \text{ sec}$ から $1.98 \times 10^{-6} \text{ sec}$ ごとに、また $t=19.83 \times 10^{-6} \text{ sec}$ における粒子速度分布を図2に示す。図に明らかなように、弾性波頭の先行、衝撃端よりの塑性域プロートの形成、衝撃端における反射波が見られ、歪速度非依存性で類似の構成方程式を用いた Ondracek 等⁵⁾の結果と一致している。本計算では Δl

研究速報

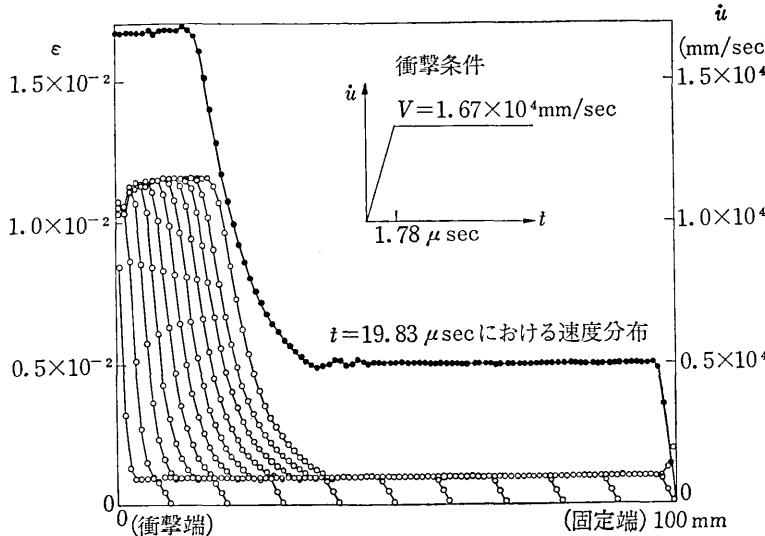


図2 衝撃をうける棒内の塑性波の伝ばと速度分布

を一定にしてあるので、時間増分を調節するときにも $\Delta l = c \Delta t$ の関係から外れ、弾性域内にも誤差を生ずる。また塑性波の伝ばによって各要素内のひずみ値、したがって $\partial \sigma / \partial \epsilon$ の値が変化するので各要素ごとに $\Delta l = c \Delta t$ とするのは困難である。前者の、時間増分を調節するときの誤差は小さく、図2のように弾性波頭伝ばには現われず、波頭部の速度分布に僅少の跳ね上りが残るのみである。

一方、塑性ひずみが立ち上がる弾塑性境界においては、塑性域の応力値と降伏応力値とに差が存在しているので、力積と運動量の時間的変化の関係から、弾性波頭におけるのと同様な加速度変動が存在する。この弾塑性境界での加速度変動は次の時間増分内の加速度増分に直接影響し、時間とともに累積する。その影響は図2で $t = 19.83 \times 10^{-6}$ sec における粒子速度分布に示すように速度立上り部にわずかに先行した部分での振動状速度分布となって現われる。また、塑性域では位置によって異なる c の値により、一般には $\Delta l \neq c \Delta t$ となり対角マトリックスの性質が失われているため加速度変動の影響は波頭進行と逆方向にも現われる。衝撃端節点では境界条件によって速度と加速度が規定されているので、この加速度変動の影響により、本計算ではある時間経過後、衝

撃端要素でのひずみ増分が負になる結果となっている。この誤差が累積し、衝撃端近傍ではひずみ値が低下し、一定引張衝撃をうける歪速度依存性のない材料では一様塑性ひずみのプラトーが形成されるという従来の知見から外れる結果となる。

4. 結論

要素内で線形の変位仮定、分布質量マトリックス、 $\Delta l = c \Delta t$ の要素分割を用いれば、Newmarkの変位、加速度増分の関係式によって、従来得られている一次元波動の性質を、異なる断面積での波の透過、反射の関係まで含めて正確

に表わすことができる。このとき、時間増分に対する剛性方程式を加速度増分を変数にして表わせば、境界条件を含めて統一的に演算を行なうことができる。

$\Delta l = c \Delta t$ の関係が満足されないときにも、塑性ひずみプラトー末端でのひずみ低下という誤差を除いて、一定速度衝撃による一次元塑性波の伝ばをシミュレートすることが可能である。 $\Delta l \neq c \Delta t$ による加速度誤差伝ばを除去することができれば、解の精度を向上することができるものと考えられる。

(1973年7月30日受付)

参考文献

- 1) Newmark, N. M.: A method of computation for structural dynamics, Proc. ASCE, 85, EM3 (1959), 67-94
- 2) Houbolt, J. C.: A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, J. Aeron. Sci., 17, 9 (1950), 540-550
- 3) Johnson, W.: Impact strength of materials, Edward Arnold, (1972)
- 4) Yamada, Y., et al.: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method, Int. J. mech. Sci., 10, 5 (1968), 343-354
- 5) Ondrack, E., et al.: A numerical method for the analysis of longitudinal elastic-plastic stress wave propagation, Int. J. num. Meth. Engng., 6, 1 (1973) 103-115

