

梁理論の精密化に関する二、三の試み (その 3)

Some Attempts on the Refinement of Modern Engineering Theory of Beams (III)

—Saint-Venant の捩り問題 (続)—
 —Saint-Venant's Torsion Problems (continued)—

川井 忠彦*・藤谷 義信*

Tadahiko KAWAI and Yoshinobu FUJITANI

前号において、Saint-Venant の捩り理論の概要について述べ、一般の断面については石鹸膜類推法 (薄膜相似法) を用いてその捩りに関する諸定数が求められるが、また、これより調和関数の性質を利用してそのゆがみ関数を求め、したがって断面の曲げ捩り剛性や剪断中心が求められることを論じた。この方法は二、三の中実断面の場合にしか厳密解が求められないが、薄肉断面の場合には陽に求められることを述べ、開断面および単一連結閉断面材の場合についての公式を与え、いくつかの数値計算例を示した。本号においては引き続き複雑な薄肉断面 (多隔壁断面を含む) の捩り諸定数の実用計算法および任意の断面の捩り諸定数を求め得る有限要素解析法について概説する。

1. 複雑な形状をした薄肉断面材の捩り解析

今図 3.1 に示すような板厚一定の平板からなる薄肉断面を考える。筒状薄肉断面の場合には、その断面を図のように平板要素の集合体に理想化することにする。

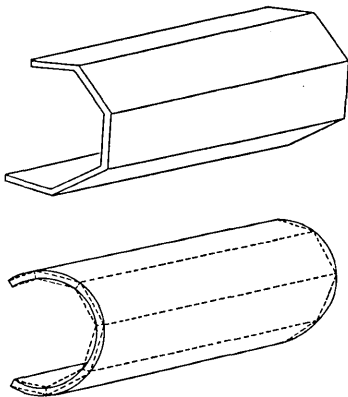


図 3.1 薄肉断面材とその理想化

$$(a) \quad \omega(s) = \int_0^s h(s) ds + \omega_0$$

図 3.2 に示すように任意の平板要素 ij を考え、その辺に原点から下した垂線の長さを h_{ij} とすれば、 ij 要素につきそのゆがみ $\omega(s)$ は次式で与えられる。

$$\omega(s) = \omega_i + \int_0^s h_{ij} ds$$

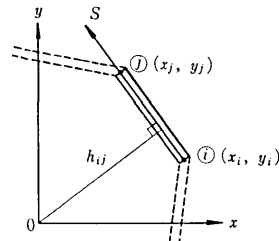


図 3.2 薄肉断面における要素 ij

$$= \sum_{pq}^i h_{pq} l_{pq} + h_{ij} s \quad (0 \leq s \leq l_{ij}) \quad (3.1)$$

ここに、 l_{ij} は ij 平板要素の長さであり、 s は ij 要素の端から測った平板の中心線の長さを表わしている。すなわち、 $\omega(s)$ は 1 つの辺上で s の 1 次関数として与えられる。

$$(b) \quad I_{\omega x} = \int_0^l \omega x t ds$$

図 3.3 を参考にして

$$\omega(s) = \omega_i + \left(\frac{\omega_j - \omega_i}{x_j - x_i} \right) (x - x_i) \quad (3.2)$$

と書くことができる。また、 $ds = \frac{dx}{\cos \alpha_{ij}}$ であるから

$$\int_0^{l_{ij}} \omega x t ds = \frac{t_{ij}(x_j - x_i)}{\cos \alpha_{ij}} \cdot \frac{1}{6} (2\omega_j x_j + 2\omega_i x_i + \omega_i x_j + \omega_j x_i)$$

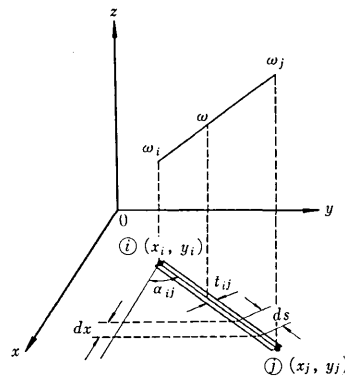


図 3.3 薄肉断面におけるゆがみ量の計算

* 東京大学生産技術研究所 第 2 部

$$=l_{ij}t_{ij}\left\{\frac{1}{3}(\omega_i x_i + \omega_j x_j) + \frac{1}{6}(\omega_i x_j + \omega_j x_i)\right\}$$

以上の計算は 1 枚の平板要素についての計算であるから

$$I_{\omega x} = \frac{1}{3} \sum_{ij} (\omega_i x_i + \omega_j x_j) l_{ij} t_{ij} + \frac{1}{6} \sum_{ij} (\omega_i x_j + \omega_j x_i) l_{ij} t_{ij} \quad (3.3)$$

となる。同様にして、

$$I_{\omega y} = \frac{1}{3} \sum_{ij} (\omega_i y_i + \omega_j y_j) l_{ij} t_{ij} + \frac{1}{6} \sum_{ij} (\omega_i y_j + \omega_j y_i) l_{ij} t_{ij} \quad (3.4)$$

$$I_{xy} = \frac{1}{3} \sum_{ij} (x_i y_i + x_j y_j) l_{ij} t_{ij} + \frac{1}{6} \sum_{ij} (x_i y_j + x_j y_i) l_{ij} t_{ij} \quad (3.5)$$

という公式が得られる。

$$(c) I_{\omega} = \int_0^l \omega_n^2 t ds$$

$\omega(s)$ と同様に $\omega_n(s)$ も ij 平板要素内で s に関して 1 次的である。すなわち、

$$\omega_n(s) = \omega_{ni} + \left(\frac{\omega_{nj} - \omega_{ni}}{l_{ij}}\right) s \quad (3.6)$$

である。したがって、 ij 平板要素につき、

$$\int_0^{l_{ij}} \omega_n^2 t ds = \frac{1}{3} l_{ij} t_{ij} (\omega_{ni}^2 + \omega_{ni} \omega_{nj} + \omega_{nj}^2)$$

となるから、次の公式が得られる。

$$I_{\omega} = \frac{1}{3} \sum_{ij} (\omega_{ni}^2 + \omega_{ni} \omega_{nj} + \omega_{nj}^2) l_{ij} t_{ij} \quad (3.7)$$

同様にして、

$$I_{xx} = \frac{1}{3} \sum_{ij} (x_i^2 + x_i x_j + x_j^2) l_{ij} t_{ij} \quad (3.8)$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3} \sum_{ij} (y_i^2 + y_i y_j + y_j^2) l_{ij} t_{ij} \quad (3.9)$$

という公式が得られる。

$$(d) S_{\omega}(s) = \int_0^s \omega_n(s) t ds + S_{\omega 0}$$

(3.6) 式で与えられるように $\omega_n(s)$ の変化は要素内で 1 次的であるから、 $S_{\omega}(s)$ は要素内で s に関して 2 次式となる。すなわち、(3.6) 式で表わされた $\omega_n(s)$ を用いると、 ij 要素内の $S_{\omega}(s)$ については、

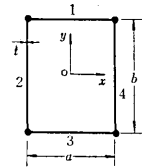
$$S_{\omega}(s) = S_{\omega i} + \int_0^s \left\{ \left(1 - \frac{s}{l_{ij}}\right) \omega_{ni} + \frac{s}{l_{ij}} \omega_{nj} \right\} t_{ij} ds = \frac{1}{2} \sum_{pq} (\omega_{np} + \omega_{nq}) l_{pq} t_{pq} + \left\{ s \left(1 - \frac{s}{2l_{ij}}\right) \omega_{ni} + \frac{s^2}{2l_{ij}} \omega_{nj} \right\} t_{ij} \quad (0 \leq s \leq l_{ij}) \quad (3.10)$$

という公式が得られる。

以上に与えた諸公式を表 3.1 に与えるような計算用

表 3.1 断面定数計算用テーブル (薄肉箱形断面の場合)

要素	x_i	x_j	y_i	y_j	ω_i	ω_j	l_{ij}	t_{ij}
1	$\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{b}{2}$	$-c$	c	a	t
2	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	$-\frac{b}{2}$	c	$-c$	b	t
3	$-\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$-\frac{b}{2}$	$-\frac{b}{2}$	$-c$	c	a	t
4	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$-\frac{b}{2}$	$\frac{b}{2}$	c	$-c$	b	t



ただし

$$c = \frac{ab(a-b)}{4(a+b)}$$

テーブルを作って組織的に計算するか、電子計算機にかけられるようにプログラムを作れば複雑な薄肉開断面材の捩りに関する諸定数を容易に計算することができる。

(e) 応力分布

薄肉開断面材内の応力分布は次式により求められる。すなわち曲げ捩り直応力 $\sigma_{\omega}(s)$ は、

$$\sigma_{\omega}(s) = \frac{M_{\omega}^{(s)} \omega_n(s)}{I_{\omega}^{(s)}} \quad (3.11)$$

曲げ捩り剪断応力 $\tau_{\omega}(s)$ は

$$\tau_{\omega}(s) = \frac{M_{\omega}^{(s)} S_{\omega}(s)}{I_{\omega}^{(s)} t(s)} \quad (3.12)$$

で与えられる。(前号 (2.78), (2.88) 式参照)

次に複雑な薄肉開断面材の曲げ捩り解析の方法について考察することにする。

(f) 複雑な薄肉断面材の曲げ捩り問題のマトリックス解析

前号で述べたように、従来から用いられている薄肉断面の剪断流れ理論 (shear flow theory) は次の微小要素内の応力のつりあい式を基礎としている。(図 3.4 参照)

すなわち剪断応力 τ_{ω} と軸応力 σ_{ω} との間には

$$\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{\omega} t) + \frac{\partial}{\partial s} (\tau_{\omega} t) = 0 \quad (3.13)$$

の関係がある。したがって

$$\tau_{\omega} t = - \int \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{\omega} t) ds + \text{Const.}$$

となるから、この式を次のように書き表わす。

$$\tau_{\omega} t = q_{\omega} = q_{\omega}^{(0)} + q_{\omega}^{(1)} \quad (3.14)$$

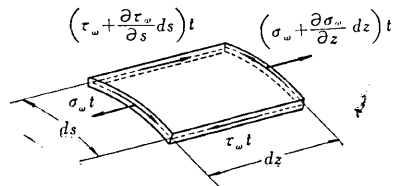


図 3.4 微小要素内応力のつりあい

ここに

$$q_{\omega}^{(0)} = - \int \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{\omega} t) ds = \frac{M_z^{\omega} S_{\omega}(s)}{I_{\omega}^{(s)}} \quad (3.15a)$$

$$q_{\omega}^{(1)} = \tau_{\omega}^{(1)} t \quad (3.15b)$$

$q_{\omega}^{(0)}$ は静定剪断流, $q_{\omega}^{(1)}$ は不静定剪断流である。

さて (3.14) および (3.15) 式を用い不静定骨組構造解析においてすでに標準化されている応力法 (force method) を用いて剪断流解析を行なうことにする。

(i) 静定剪断流

まず図 3.5 に示すように, n 個の閉路をもつ薄肉閉断面に n 個のカットを入れることにより, 開断面の静定構造とする。そして断面を平板要素に分割し, カット部より出発するように節点番号をつける。

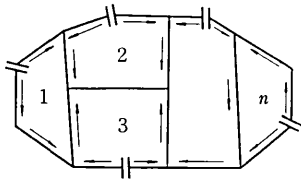


図 3.5 静定剪断流 $q_{\omega}^{(0)}(s)$

ij 要素の静定剪断応力 $\tau_{\omega ij}^{(0)}(s)$ は, (3.15a) 式より

$$\tau_{\omega ij}^{(0)}(s) = \frac{M_z^{\omega} S_{\omega}^{ij}(s)}{I_{\omega}^{(s)} t_{ij}} \quad (0 \leq s \leq l_{ij}) \quad (3.16)$$

で計算することができる。ここに, $S_{\omega}^{ij}(s)$ を求める公式はすでに (3.10) 式で与えられている。

(ii) 不静定剪断流

n 個の閉路に沿う不静定剪断流 $q_{\omega m}^{(1)} (m=1, 2, \dots, n)$ を用いて, 次のような要素 ij の不静定剪断応力 $\tau_{\omega ij}^{(1)}$ を得る。(図 3.6 参照)

$$\tau_{\omega ij}^{(1)} = \{B_{ij}\} \{X\} \quad (3.17)$$

ここに $\{X\}^T = [q_{\omega 1}^{(1)}, q_{\omega 2}^{(1)}, \dots, q_{\omega n}^{(1)}]$ であり, また $\{B_{ij}\}$ マトリックスは, ij 要素がその閉路に沿うときは板厚の逆数 $\pm \frac{1}{t_{ij}}$ を, また関係しない閉路については, 0 となる成分をもつ行ベクトルである。 $\pm \frac{1}{t_{ij}}$ の正負の符号はその不静定剪断流が静定剪断流と同方向のときは正, 反対方向のときは負とする。

さて, ij 要素の剪断応力 $\tau_{\omega ij}(s)$ は (3.14), (3.16) および (3.17) 式より

$$\begin{aligned} \tau_{\omega ij}(s) &= \tau_{\omega ij}^{(0)}(s) + \tau_{\omega ij}^{(1)} \\ &= \frac{M_z^{\omega} S_{\omega}^{ij}(s)}{I_{\omega}^{(s)} t_{ij}} + \{B_{ij}\} \{X\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

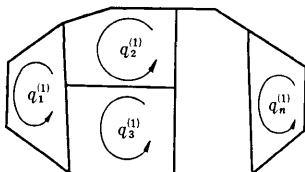


図 3.6 不静定剪断流 $q_{\omega m}^{(1)}$

である。したがって断面の有する歪エネルギー V は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} V &= \sum_{ij} \iint \frac{1}{2G} \tau_{\omega ij}^2 dA \\ &= \sum_{ij} \int_0^{l_{ij}} \frac{1}{2G} \left(\frac{M_z^{\omega} S_{\omega}^{ij}(s)}{I_{\omega}^{(s)} t_{ij}} + \{B_{ij}\} \{X\} \right)^2 t_{ij} ds \\ &= \frac{1}{2G} \left[\frac{M_z^{\omega}}{I_{\omega}^{(s)}}, \mathbf{X}^T \right] \sum_{ij} \int_0^{l_{ij}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{S_{\omega}^{ij}(s)}{t_{ij}} \\ \mathbf{B}_{ij}^T \end{array} \right\} \\ &\quad \times \left[\begin{array}{c} \frac{S_{\omega}^{ij}(s)}{t_{ij}}, \mathbf{B}_{ij} \end{array} \right] t_{ij} ds \left[\begin{array}{c} \frac{M_z^{\omega}}{I_{\omega}^{(s)}} \\ \mathbf{X} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

ゆえに Castigliano の第一定理により

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \{X\}^T} &= \frac{1}{G} \sum_{ij} \int_0^{l_{ij}} \{B_{ij}\}^T \left[\frac{S_{\omega}^{ij}(s)}{t_{ij}}, \mathbf{B}_{ij} \right] t_{ij} ds \\ &\quad \times \left[\begin{array}{c} \frac{M_z^{\omega}}{I_{\omega}^{(s)}} \\ \mathbf{X} \end{array} \right] = 0 \end{aligned}$$

となる。これを

$$\{D_{10}\} \frac{M_z^{\omega}}{I_{\omega}^{(s)}} + \{D_{11}\} \{X\} = 0 \quad (3.20)$$

と書くことにする。ここに

$$\begin{aligned} \{D_{10}\} &= \sum_{ij} \int_0^{l_{ij}} \{B_{ij}\}^T S_{\omega}^{ij}(s) ds \\ &= \sum_{ij} \{B_{ij}\}^T T_{ij} \end{aligned} \quad (3.21a)$$

ここに

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \int_0^{l_{ij}} S_{\omega}^{ij}(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{pq}^i (\omega_{np} + \omega_{nq}) l_{pq} t_{pq} l_{ij} \\ &\quad + \frac{1}{6} (2\omega_{ni} + \omega_{nj}) t_{ij} l_{ij}^2 \end{aligned} \quad (3.21b)$$

また

$$\begin{aligned} \{D_{11}\} &= \sum_{ij} \int_0^{l_{ij}} \{B_{ij}\}^T \{B_{ij}\} t_{ij} ds \\ &= \sum_{ij} \{B_{ij}\}^T \{B_{ij}\} t_{ij} l_{ij} \end{aligned} \quad (3.22)$$

すなわち (3.20) 式より

$$\{X\} = -\{D_{11}\}^{-1} \{D_{10}\} \frac{M_z^{\omega}}{I_{\omega}^{(s)}} \quad (3.23)$$

となる。

(iii) 剪断応力 $\tau_{\omega}(s)$ の決定

不静定剪断流が (3.23) 式より求まると, (3.18) 式で与えられる ij 要素の剪断応力は次のようになる。

$$\tau_{\omega ij}(s) = \frac{q_{\omega ij}(s)}{t_{ij}} = \left[\frac{S_{\omega}^{ij}(s)}{t_{ij}} - \mathbf{B}_{ij} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{10} \right] \frac{M_z^{\omega}}{I_{\omega}^{(s)}} \quad (3.24)$$

そして要素の中央点における剪断応力の値を求めたい場合は次のように計算すればよい。

$$\begin{aligned} \tau_{\omega ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right) &= \frac{q_{\omega ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right)}{t_{ij}} \\ &= \left[\frac{S_{\omega ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right)}{t_{ij}} - \mathbf{B}_{ij} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{10} \right] \frac{M_x^{\omega}}{I_{\omega}^{(i)}} \end{aligned} \quad (3.25a)$$

ここに、 $S_{\omega ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right)$ は(3.10)式より計算される。

$$\begin{aligned} S_{\omega ij} \left(\frac{l_{ij}}{2} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{pq}^i (\omega_{np} + \omega_{nq}) l_{pq} t_{pq} \\ &\quad + \frac{1}{8} (3\omega_{ni} + \omega_{nj}) l_{ij} t_{ij} \end{aligned} \quad (3.25b)$$

2. 薄膜相似法による数多くの隔壁を有する薄肉閉断面材の Saint-Venant 振り解析

前節で述べた方法を用いれば任意の断面形状の薄肉閉断面材の曲げ振り解析ができるわけであるが、一般に薄肉閉断面材の振りにおいては断面のゆがみは小さく、曲げ振り剪断応力 τ_{ω} は Saint-Venant の剪断応力 τ_{si} に比較して無視することができる場合が多い。このような場合、Saint-Venant の振り解析は前号で述べた薄膜相似法(membrane analogy)と応力法を用いることにより以下のように能率的に行なうことができる。すなわち薄膜相似法によれば断面に働く振りモーメント M_x は図 3.7 に示すような n 個の部屋を有する薄肉断面に対し次式のように与えられる。(前号(2.58)式参照)

$$M_x = 2G\alpha \sum_{i=1}^n k_i A_i \quad (3.26)$$

ここに k_i は i 番目の中空孔周辺の Ψ の値で、 A_i は i 番目と $(i+1)$ 番目の隔壁に囲まれた部屋の面積を表わしている。もちろん G は材料の剪断弾性係数、 α は断面の捩れ率を表わしている。ところが i 室の剪断流 f_i 、および断面内の任意の辺内を流れる剪断流 q 、剪断応力 τ について次の式が成立する。

$$q = \tau t, \quad f_i = k_i G\alpha \quad (3.27)$$

$$\oint_{Ci} \tau ds = 2G\alpha A_i \quad (3.28)$$

(3.28)式は i 番目の部屋のまわりのゆがみの連続性を示し、 Ci はその周辺の積分路を示している。

したがって、(3.27)式を(3.28)式および(3.26)式に代入して次式を得る。

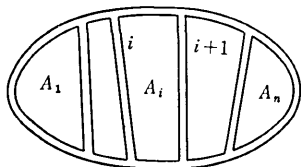


図 3.7 多くの隔壁をもつ薄肉閉断面

$$\oint_{Ci} \frac{q}{t} ds = 2G\alpha A_i \quad (3.29)$$

$$M_x = 2 \sum_{i=1}^n f_i A_i \quad (3.30)$$

これらの式をマトリックス表示して演算の過程を示せば次のとおりである。まず、各部屋の反時計まわりの剪断流 $f_i (i=1, 2, \dots, n)$ の列ベクトルを $\{f\}$ で表わす。次に薄肉断面の各辺上の剪断流 q の列ベクトルを $\{q\}$ で表わせば、次のような関係式が成立する。

$$\{q\} = \{B\} \{f\} \quad (3.31)$$

ここに $\{B\}$ は、1, 0, -1 を成分とするマトリックスである。

次に p 点と q 点を結ぶ辺の(長さ/板厚)の値 l_{pq}/t_{pq} を各部屋ごとに考え、 i 室以外の l_{pq}/t_{pq} を 0 とおいた行ベクトル $\{l/t\}_i$ とし、これを成分とするマトリックス $\{l/t\}$ を作ると、(3.29)式は次のように書くことができる。

$$\left[\frac{l}{t} \right] \{q\} = 2G\alpha \{A\} \quad (3.32)$$

ここに $\{A\}^T = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ である。(3.32)式に(3.31)式を代入すれば

$$\left[\frac{l}{t} \right] \{B\} \{f\} = 2G\alpha \{A\} \quad (3.33)$$

となるから

$$\{f\} = 2G\alpha \{C\}^{-1} \{A\} \quad (3.34)$$

となる。ここに、

$$\{C\} = \left[\frac{l}{t} \right] \{B\} \quad (3.35)$$

である。

したがって、(3.30)式は次式のように与えられる。

$$M_x = 2 \{f\}^T \{A\} = 4G\alpha \{A\}^T \{C^{-1}\}^T \{A\} \quad (3.36)$$

また、 $M_x = GK\alpha$ であることに注意すれば、Saint-Venant の振り定数 K は次式で与えられることになる。

$$K = 4 \{A\}^T \{C^{-1}\}^T \{A\} \quad (3.37)$$

さらに曲げ振り剛性を評価する必要がある場合には、前号(2.66)式を拡張した式を作って断面のゆがみ関数 $\omega(s)$ を作成しなければならない。この計算は前節に述べた方法に従えばよいので省略する。

3. 逐次近似法による多隔壁梁の Saint-Venant 振りにおける剪断流解析

航空機翼、特に超音速機翼の構造設計は最近図 3.8 に示すような多隔壁構造に向いつつあるが、このような多隔壁梁の Saint-Venant 振り解析では前節で述べたように 1 つの部屋 (cell) ごとに 1 つの不静定剪断流を考えな



図 3.8 超音速機翼構造の断面

ければならないので、最終的には n 個の隔壁のある梁の場合 $(n+1)$ 個の不静定剪断流 q_i に関する連立一次方程式を解かなければならない。電子計算機の発達した今日では数千円から数万円の連立 1 次方程式を解くことが日常化しつつあるので、このような問題を解くことは簡単な演習問題を解くことに等しくなったが、電子計算機が存在しなかった時代に航空機構造技術者によって開発された逐次近似法 (method of successive approximations) の方法は今日あまり知られていないと思われる。そこでこの方法の概要について紹介しておきたい。

この方法は S.U. Benscoter がアメリカ航空学会誌に発表した論文がその走りであるといわれており、H. Cross が骨組の構造解析の数値計算法として提案したモーメント分配法 (moment-distribution method) に非常によく似ている。要するに、この方法は多元連立 1 次方程式を逐次近似的に解く 1 つの解法であると考えられる。

いま、Bruhn に従って 1 隔壁薄肉閉断面の捩り問題を例にとってこの方法の要点を説明しよう。図 3.9 に示すような 2 室閉断面梁を考えよう。

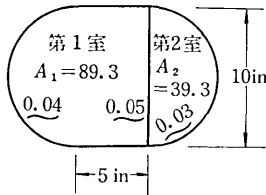


図 3.9 2 室閉断面梁

まず各室が独立して働くものと仮定し、第 1 室が剪断流 q_1 を受けて $G\alpha_1=1$ の捩り変形を起したとしよう。(3.29) 式において q = 一定とすれば

$$G\alpha = \frac{q}{2A} \oint \frac{ds}{t} \quad (3.38)$$

いま $G\alpha=1$ であるから、この式から

$$q = \frac{2A}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (3.39)$$

が得られる。一般に大部分の薄肉梁は板厚一定の平板要素より構成されているから、

$$\oint \frac{ds}{t} = \sum \frac{l}{t} \quad (3.40)$$

と書くことができる。ここに l は平板要素の長さ、 t はその板厚を表わしている。したがって(3.40) 式を(3.39) 式に代入して、各室につき

$$q = \frac{2A}{\sum \frac{l}{t}} \quad (3.41)$$

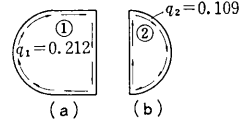
という公式が得られる。この式を用いて第 1 室の剪断流を計算すると

$$q_1 = \frac{2A_1}{\left(\sum \frac{l}{t}\right)_{\text{①}}} = \frac{2 \times 89.3}{\frac{25.7}{0.04} + \frac{10}{0.05}} = \frac{178.6}{842} = 0.212 \text{ lb/in}$$

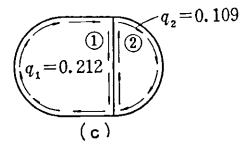
となる。同様に第 2 室で $G\alpha_2=1$ とするような剪断流 q_2 を計算すれば次のようになる。

$$q_2 = \frac{2A_2}{\left(\sum \frac{l}{t}\right)_{\text{②}}} = \frac{2 \times 39.3}{\frac{10}{0.05} + \frac{15.7}{0.03}} = \frac{78.6}{723} = 0.109 \text{ lb/in}$$

これらの結果を図 (a) および図 (b) に示しておいた。



次にこの 2 つの部屋の隔壁部分を接合して一体となったとすれば隔壁には図 (c) に示すように合剪断流 $q = q_1 - q_2 = 0.212 - 0.109 = 0.103 \text{ lb/in}$ を受けることになる。隔壁内の剪断流がこのように変化すれば当然のことながら各室の捩れ率 $\alpha_i (i=1, 2)$ は次のように変化する。



$$G\alpha_1 = \frac{1}{2A_1} \left(\sum q \frac{l}{t} \right)_{\text{①}} = \frac{1}{2 \times 89.3} \left[0.212 \times \frac{25.7}{0.04} + (0.212 - 0.109) \times \frac{10}{0.05} \right] = 0.875$$

$$G\alpha_2 = \frac{1}{2A_2} \left(\sum q \frac{l}{t} \right)_{\text{②}} = \frac{1}{2 \times 39.3} \left[0.109 \times \frac{15.7}{0.03} - (0.212 - 0.109) \times \frac{10}{0.05} \right] = 0.4375$$

したがって、断面が変形しないならば α_1 と α_2 は等しくなければならないから、上に求めた剪断流は 2 つの部屋が一体として働く場合の正しい結果ではない。

よって、 $G\alpha_1=1$ に再び戻すためにはある一定の剪断流 q_1' を第 1 室に加えて、隔壁上に働く q_2 による負の捩れ率を相殺させることを考える。すなわちこの条件式は次式で与えられる。

$$q_1' \left(\sum \frac{l}{t} \right)_{\text{①}} - q_2 \left(\frac{l}{t} \right)_{\text{web 1-2}} = 0$$

したがって、

$$q_1' = q_2 \left(\frac{\left(\frac{l}{t} \right)_{\text{web 1-2}}}{\left(\sum \frac{l}{t} \right)_{\text{①}}} \right) \quad (3.42)$$

この式に必要な数値を代入すると

$$q_1' = q_2 \left(\frac{\frac{10}{0.05}}{\frac{25.7}{0.04} + \frac{10}{0.05}} \right) = \frac{200}{842} q_2 = 0.237 q_2$$

言いかえれば, $G\alpha_1=1$ にするために第 1 室に $0.237 q_2$ の一定剪断流を加えてやる必要がある. $q_2=0.109 \text{ lb/in}$ であるから

$$q_1' = 0.0258 \text{ lb/in}$$

となる. 修正剪断流 q_1' は第 2 室の剪断流 q_2 にある比率をかけた形で求められるから, 修正分配剪断流 (correction carry over shear flow) と呼ばれ, 分配修正係数と q_2 との積で与えられる. すなわち第 2 室から第 1 室への分配修正係数は

$$\text{C. O. F. (2} \rightarrow 1) = \frac{\left(\frac{l}{t}\right)_{\text{web } 1-2}}{\left(\sum \frac{l}{t}\right)_{\text{①}}} \quad (3.43)$$

となり, この例題では 0.237 となる. 同様にして第 2 室は $q_1 = -0.212 \text{ lb/in}$ (q_2 は反時計方向の剪断流であるからこれを正にとる.) の作用を隔壁 (1-2) に受けるのでその振れ率は 1 から 0.4375 に低下したと考えることができる. したがって $G\alpha_2$ を再び 1 に等しくするためにある修正剪断流 q_2' を加えて $q_1 = -0.212 \text{ lb/in}$ の振れ率への寄与を相殺しなければならない. この式は

$$q_2' \left(\sum \frac{l}{t}\right)_{\text{②}} - q_1 \left(\frac{l}{t}\right)_{\text{web } 2-1} = 0$$

と書くことができ, したがって,

$$q_2' = -\frac{q_1 \left(\frac{l}{t}\right)_{\text{web } 2-1}}{\left(\sum \frac{l}{t}\right)_{\text{②}}} \quad (3.44)$$

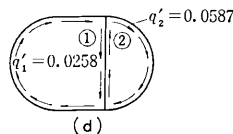
が得られる. 実際 q_2' を計算すると次式のようになる.

$$q_2' = q_1 \left(\frac{200}{723}\right) = 0.277 q_1 = 0.277 \times 0.212 = 0.0587 \text{ lb/in}$$

すなわち第 1 室から第 2 室への分配率は

$$\text{C. O. F. (1} \rightarrow 2) = \frac{\left(\frac{l}{t}\right)_{\text{web } 2-1}}{\left(\sum \frac{l}{t}\right)_{\text{②}}} = \frac{200}{723} = 0.277$$

となる. このようにして各室の振れ率を再び 1 にするために加えるべき剪断流 (q_1' と q_2') を図示すると図 (d) のようになる. そうすると一体で 2 室が変形するとした場合, 隔壁を流れる剪断

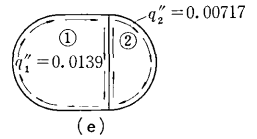


流は $(q_1' - q_2') = -0.0329 \text{ lb/in}$ となる. この剪断流を図 (c) の剪断流に加えてやるとまた $G\alpha_1$ も $G\alpha_2$ も 1 とはならなくなるが, 図 (d) で示す剪断流の場合よりもとみに近寄った値となる. 図 (d) を参考にして第 1 室および第 2 室に加えるべき第 2 次修正剪断流 q_1'' および q_2'' を再び $G\alpha_1 = G\alpha_2 = 1$ が独立して成立するように決めると次式のように与えられる.

$$q_1'' = \text{C. O. F. (2} \rightarrow 1) \times q_2' = 0.237 \times 0.0587 = 0.0139 \text{ lb/in}$$

$$q_2'' = \text{C. O. F. (1} \rightarrow 2) \times q_1' = 0.277 \times 0.0258 = 0.00717 \text{ lb/in}$$

この結果を図示すれば図 (e) のようになる. これまでの結果からわかるように修正剪断流の値は急激に 0 に近づくから, 繰返し計算



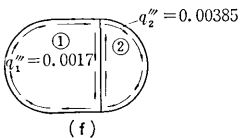
の回数は求めようとする計算の精度によって適当に決めなければならない.

この問題の場合今一組の修正剪断流 q_1''' および q_2''' を加えることにしよう. 再び前にもとめた分配修正係数を用いると

$$q_1''' = 0.237 \times 0.00717 = 0.0017 \text{ lb/in}$$

$$q_2''' = 0.277 \times 0.0139 = 0.00385 \text{ lb/in}$$

となり, 図 (f) にその計算結果を示す.

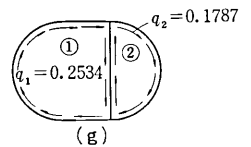


したがって最終的な剪断流は最初の剪断流 q_1 と修正剪断流の和で表わされる.

$$q_1(\text{最終値}) = q_1 + q_1' + q_1'' + q_1''' = 0.2534 \text{ lb/in}$$

$$q_2(\text{最終値}) = q_2 + q_2' + q_2'' + q_2''' = 0.1787 \text{ lb/in}$$

この最終的な剪断流分布は図 (g) に示してある.



各室の最終的な振れ率をチェックするために図 (g) の結果を用いて各室の $G\alpha$ を計算してみると次のようになる.

$$G\alpha_1 = \frac{1}{2 \times 89.3} \left[0.2534 \times \frac{25.7}{0.04} + 0.0747 \times \frac{10}{0.05} \right] = 0.997$$

$$G\alpha_2 = \frac{1}{2 \times 39.3} \left[0.1787 \times \frac{15.7}{0.03} - 0.0747 \times \frac{10}{0.05} \right] = 0.997$$

といずれも予期しているように

$$G\alpha_1 = G\alpha_2 = 1$$

となり, 正しいことがわかる.

以上の計算を, 次に示すような表 (表 3.2) を作ることににより組織的に行なうことができる. まず各室の分配係数を, ここに説明した方法で計算し, この表の第 1 行に記入する. 第 2 行には各室が独立に振られると仮定した場合, 振れ率 $G\alpha=1$ を生ぜしめるに必要な剪断流の値を書き入れる. 第 3 行目には 1 回目の修正剪断流の値を記入する. 修正剪断流 q は carry over q あるいは C. O. q と表の中には記入され, その値は隣の部屋の剪断流と C. O. F. との積で与えられる. なすわち $0.237 \times$

		第1室	第2室
1	C. O. F.	0.277	0.237
2	q	0.212	0.109
3	C. O. q	0.0258	0.0587
4	C. O. q	0.0139	0.00717
5	C. O. q	0.0017	0.00385
6	Σq	0.2534	0.1787

表 3.2 計算表 (逐次近似法)

0.109=0.0258 は第2室より第1室に分配され、0.277×0.212=0.0587 は第1室より第2室に分配される。4行目には第2回目の修正分配剪断流、すなわち 0.277×0.0258=0.00717 が第2室へ、0.237×0.0587=0.0139 が第1室に分配される。5行目にはもう一度修正分配剪断流を求めた結果が記入されている。そして最後の6行目には始めの q と、分配修正剪断流の総和をとった最終剪断流の値が記入されている。この計算方式はもっと複雑な断面の薄肉梁の場合にも同じように適用できるものである。5節にはもっと複雑な断面の振り解析例を示しておいたので参照されたい。

4. 有限要素法による Saint-Venant 振り解析

4.1 Saint-Venant 振り問題の仮想仕事方程式

前号において仮想仕事の原理による Saint-Venant の振り問題の定式化について詳しく述べたが、そのとき軸方向の変位関数として

$$W(x, y, z) = \alpha w(x, y)$$

を用いた。本節では有限要素法による定式化のためにわざと

$$W(x, y, z) = w(x, y) \tag{3.45}$$

と置いて議論を進めよう。すなわち、前号(2.1)式で与えられる変位関数のうち $W(x, y, z)$ を(3.45)式でおきかえた式を用いると応力成分は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y \right\} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = G \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x \right\} \end{aligned} \right\} \tag{3.46}$$

次に歪エネルギーの変分 δV を求めてみよう。この場合もちろん変分は α および w についてとられる。したがって、

$$\begin{aligned} \delta V &= \delta \iint \frac{1}{2} G \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x \right)^2 \right\} dx dy \\ &= G \iint \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y \right) \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x \right) \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right\} dx dy \\ &\quad + G \iint \left\{ - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y \right) y \delta \alpha \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x \right) x \delta \alpha \right\} dx dy \end{aligned} \tag{3.47}$$

となる。

よって、Saint-Venant 振り問題の仮想仕事方程式は、

上に導いた δV と $\delta W_{ex} = M_z \delta \alpha$ から、 $\delta V - \delta W_{ex} = 0$ を作ることににより、次式ようになる。

$$\begin{aligned} G \iint \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y \right) \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x \right) \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right\} dx dy \\ + G \iint \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} x - \frac{\partial w}{\partial x} y + \alpha x^2 + \alpha y^2 \right\} \delta \alpha dx dy \\ - M_z \delta \alpha = 0 \end{aligned} \tag{3.48}$$

4.2 有限要素法の定式化

ここに導いた(3.48)式を用いて有限要素法の定式化を以下のように行なう。

(a) ゆがみ関数 $w(x, y)$ の変位関数

まず単位長さの梁を図 3.10 に示すような柱状要素(図では三角柱要素)の集合体に理想化し、その軸方向の変位関数 $w(x, y)$ を有限要素法の標準的方法にしたがって次式のようにおく。

$$w(x, y) = [\mathbf{h}(x, y)] \{\mathbf{a}\} \tag{3.49}$$

$[\mathbf{h}(x, y)]$ はいわゆる形状関数 (shape function) であり、 $\{\mathbf{a}\}$ は一般化座標の列ベクトルである。いま、 $\mathbf{h}(x, y)$ に次々に要素節点の座標を入れた行ベクトルを並記して作られるマトリックスを $[\mathbf{A}]$ とし、要素の節点変位ベクトルを $\{\mathbf{w}\}$ とすれば次の関係が成立する。

$$\{\mathbf{w}\} = [\mathbf{A}] \{\mathbf{a}\} \tag{3.50a}$$

この式より

$$\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{A}^{-1}] \{\mathbf{w}\} \tag{3.50b}$$

であるから、これを(3.49)式に代入して

$$w(x, y) = [\mathbf{h}(x, y)] [\mathbf{A}^{-1}] \{\mathbf{w}\} \tag{3.51}$$

となる。

(b) w の微分形

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= [\mathbf{h}_x(x, y)] [\mathbf{A}^{-1}] \{\mathbf{w}\} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= [\mathbf{h}_y(x, y)] [\mathbf{A}^{-1}] \{\mathbf{w}\} \end{aligned} \right\} \tag{3.52}$$

ここに $[\mathbf{h}_x]$ 、 $[\mathbf{h}_y]$ はそれぞれ $[\mathbf{h}]$ マトリックスの x 、 y による偏微分を表わす。

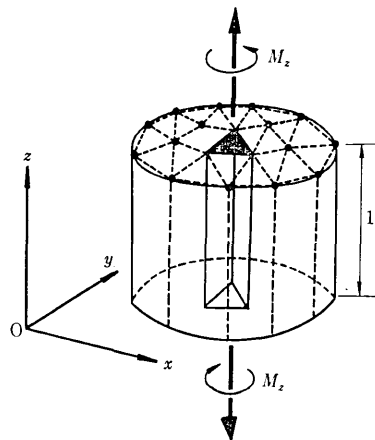


図 3.10 Saint-Venant 振り解析のための断面の柱状要素分割

(c) 仮想仕事方程式のマトリックス表示

(3.52)式を用いて(3.48)式をマトリックス表示すれば容易に次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} G \iint \{ & \{\delta w\}^T [A^{-1}]^T \{h_x\}^T (\{h_x\} [A^{-1}] \{w\} - y\alpha) \\ & + \{\delta w\}^T [A^{-1}]^T \{h_y\}^T (\{h_y\} [A^{-1}] \{w\} \\ & + x\alpha) \} dx dy \\ & + \sum_{\sigma} G \delta \alpha \iint \{ x \{h_y\} [A^{-1}] \{w\} - y \{h_x\} [A^{-1}] \{w\} \\ & + \alpha x^2 + \alpha y^2 \} dx dy - M_x \delta \alpha = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

ここに \sum_{σ} は各有限要素について行なった計算の総和をとることを意味する。

(d) 剛性マトリックス

(3.53)式はさらに次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} \sum \{ \delta w^T, \delta \alpha \} \\ \times \iint G \left\{ \begin{array}{l} [A^{-1}]^T (\{h_x\}^T \{h_x\} + \{h_y\}^T \{h_y\}) [A^{-1}] \\ (x \{h_y\} - y \{h_x\}) [A^{-1}] \\ [A^{-1}]^T (\{h_y\}^T x - \{h_x\}^T y) \\ (x^2 + y^2) \end{array} \right\} dx dy \left\{ \begin{array}{l} w \\ \alpha \end{array} \right\} \\ - M_x \delta \alpha = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

上式の二重積分項の表わすマトリックスはSaint-Venant 振り問題における有限要素の剛性マトリックス $\{k\}$ を表わしている。すなわち $\{k\}$ は次式のように書くことができる。

$$\{k\} = \left[\begin{array}{c|c} k_{\omega\omega} & k_{\omega\alpha} \\ \hline k_{\alpha\omega} & k_{\alpha\alpha} \end{array} \right] \quad (3.55a)$$

ここに

$$\begin{aligned} \{k_{\omega\omega}\} = G [A^{-1}]^T \iint \{ & (\{h_x\}^T \{h_x\} \\ & + \{h_y\}^T \{h_y\}) \} dx dy [A^{-1}] \end{aligned} \quad (3.55b)$$

$$\{k_{\alpha\omega}\} = G [A^{-1}]^T \iint \{ (x \{h_y\}^T - y \{h_x\}^T) \} dx dy \quad (3.55c)$$

$$\{k_{\omega\alpha}\} = G \iint \{ x \{h_y\} - y \{h_x\} \} dx dy [A^{-1}] \quad (3.55d)$$

$$\{k_{\alpha\alpha}\} = G \iint \{ x^2 + y^2 \} dx dy \quad (3.55e)$$

したがって構造全体の剛性方程式は次式のように書き表わされる。

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{\omega\omega} & K_{\omega\alpha} \\ \hline K_{\alpha\omega} & K_{\alpha\alpha} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} w \\ \alpha \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ M_x \end{array} \right\} \quad (3.56)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \{K_{\omega\omega}\} &= \sum_{\sigma} \{k_{\omega\omega}\}, \quad \{K_{\omega\alpha}\} = \sum_{\sigma} \{k_{\omega\alpha}\} \\ \{K_{\alpha\omega}\} &= \sum_{\sigma} \{k_{\alpha\omega}\}, \quad \{K_{\alpha\alpha}\} = \sum_{\sigma} \{k_{\alpha\alpha}\} \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

である。したがって(3.56)式を分割 (partitioning) すると次の2つの方程式が得られる。

$$\{K_{\omega\omega}\} \{w\} + \{K_{\omega\alpha}\} \alpha = 0 \quad (3.58)$$

$$\{K_{\alpha\omega}\} \{w\} + \{K_{\alpha\alpha}\} \alpha = M_x \quad (3.59)$$

(3.58)式より、まず、

$$\{w\} = -\{K_{\omega\omega}\}^{-1} \{K_{\omega\alpha}\} \alpha \quad (3.60)$$

となるから、(3.59)式に代入して $\{w\}$ を消去すると

$$M_x = (\{K_{\alpha\alpha}\} - \{K_{\alpha\omega}\} \{K_{\omega\omega}\}^{-1} \{K_{\omega\alpha}\}) \alpha \quad (3.61)$$

したがって、Saint-Venant の振り剛性 GK は次式で与えられる。

$$GK = \{K_{\alpha\alpha}\} - \{K_{\alpha\omega}\} \{K_{\omega\omega}\}^{-1} \{K_{\omega\alpha}\} \quad (3.62)$$

4.3 代表的な有限要素とその剛性マトリックス

さて以上に導いた諸公式を用いて Saint-Venant 振り問題解析用の代表的有限要素の剛性マトリックスを次に与えておこう。

(a) 三角柱要素 (図 3.11 参照)

これは最も一般性のある要素であり、次の諸式が計算の基礎となる。

$$\left. \begin{aligned} \{h(x, y)\} &= [1, x, y] \\ \{h_x\} &= [0, 1, 0], \quad \{h_y\} = [0, 0, 1] \\ \{A\} &= \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \\ \{A^{-1}\} &= \frac{1}{2A} \times \\ & \begin{bmatrix} x_j y_k - x_k y_j & x_k y_i - x_i y_k & x_i y_j - x_j y_i \\ y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

A は三角形の面積を表わし

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2} |A| = \frac{1}{2} (x_j y_k - x_k y_j + x_k y_i - x_i y_k \\ + x_i y_j - x_j y_i) \end{aligned}$$

で与えられる。

(3.63)式を用いて計算された三角柱要素の剛性マトリックスを表 3.3 に示す。すでに述べたように節点変位 w_i と節点のゆがみ ω_i との間には、

$$w_i = \alpha \omega_i$$

の関係があることに注意すると、(3.58)式より、節点のゆがみ ω_i に関する次のような剛性方程式が求まる。

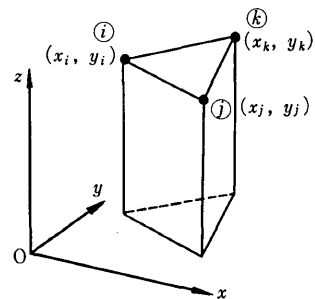


図 3.11 三角柱要素

表 3.3 剛性マトリックス (三角柱要素)

	w_i	w_j	w_k	α	
G×	$\frac{x_k^2+y_j^2}{4A}$			SYM.	
	$\frac{x_j x_{ik} + y_{jk} y_{ki}}{4A}$	$\frac{x_{ik}^2 + y_{ki}^2}{4A}$			
	$\frac{x_{kj} x_{ji} + y_{jk} y_{ij}}{4A}$	$\frac{x_{ik} x_{ji} + y_{ki} y_{ij}}{4A}$	$\frac{x_{ji}^2 + y_{ij}^2}{4A}$		
	$\frac{x_{kj} x_G - y_{jk} y_G}{2}$	$\frac{x_{ik} x_G - y_{ki} y_G}{2}$	$\frac{x_{ji} x_G - y_{ij} y_G}{2}$		$\frac{A}{12}(x_{ic}^2 + x_{jc}^2 + x_{kc}^2 + y_{ic}^2 + y_{jc}^2 + y_{kc}^2) + A(x_G^2 + y_G^2)$

ただし, $x_{mn} = x_m - x_n, y_{mn} = y_m - y_n \quad A = \frac{1}{2}(x_j y_k - x_k y_j + x_k y_i - x_i y_k + x_i y_j - x_j y_i)$

$x_{nG} = x_n - x_G, y_{nG} = y_n - y_G \quad x_G = \frac{1}{3}(x_i + x_j + x_k), y_G = \frac{1}{3}(y_i + y_j + y_k)$

$$\begin{pmatrix} \frac{x_k^2+y_j^2}{4A} \\ \frac{x_j x_{ik} + y_{jk} y_{ki}}{4A} \\ \frac{x_{kj} x_{ji} + y_{jk} y_{ij}}{4A} \\ \frac{x_{kj} x_G - y_{jk} y_G}{2} \end{pmatrix} \text{SYM.} \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{x_{ik} x_G - y_{ki} y_G}{2} \\ \frac{x_{ji} x_G - y_{ij} y_G}{2} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

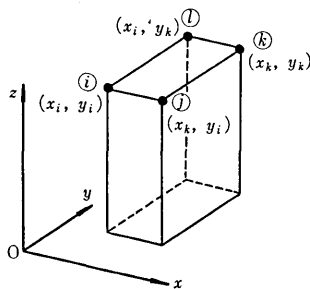


図 3.12 矩形柱要素

(b) 矩形柱要素 (図 3.12 参照)

矩形柱要素は三角柱要素について一般的に使用される有限要素であり, 次の諸式が剛性マトリックスの計算の基礎となる。

$\{h(x, y)\} = [1, x, y, xy]$

$\{h_x(x, y)\} = [0, 1, 0, y], \{h_y(x, y)\} = [0, 0, 1, x]$

$$\{A\} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l \end{pmatrix}$$

ただし, $x_j = x_k, x_l = x_i, y_j = y_i, y_l = y_k$ である

$$\{A^{-1}\} = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} x_k y_k - x_i y_k & x_i y_i & -x_k y_i \\ -y_k & y_k & -y_i & y_i \\ -x_k & x_i & -x_i & x_k \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A = (x_k - x_i)(y_k - y_i)$

(3.65)

(3.65)式を用いて導出された剛性マトリックスを表 3.4 に示す。また, 節点のゆがみ ω_i に関する剛性方程式を導くと次式ようになる。

表 3.4 剛性マトリックス (矩形柱要素)

	w_i	w_j	w_k	w_l	α	
G×	$\frac{l_x^2 + l_y^2}{3A}$				SYM.	
	$\frac{l_x^2 - 2l_y^2}{6A}$	$\frac{l_x^2 + l_y^2}{3A}$				
	$\frac{-l_x^2 + l_y^2}{6A}$	$\frac{-2l_x^2 + l_y^2}{6A}$	$\frac{l_x^2 + l_y^2}{3A}$			
	$\frac{-2l_x^2 + l_y^2}{6A}$	$\frac{-l_x^2 + l_y^2}{6A}$	$\frac{l_x^2 - 2l_y^2}{6A}$	$\frac{l_x^2 + l_y^2}{3A}$		
	$\frac{-2x_i + x_k}{6} l_x + \frac{2y_i + y_k}{6} l_y$	$\frac{-x_i + 2x_k}{6} l_x - \frac{2y_i + y_k}{6} l_y$	$\frac{x_i + 2x_k}{6} l_x - \frac{y_i + 2y_k}{6} l_y$	$\frac{2x_i + x_k}{6} l_x + \frac{y_i + 2y_k}{6} l_y$		$\frac{A}{3}(x_i^2 + x_i x_k + x_k^2 + y_i^2 + y_i y_k + y_k^2)$

ただし, $l_x = x_k - x_i, l_y = y_k - y_i \quad A = l_x l_y = (x_k - x_i)(y_k - y_i)$

$$\begin{pmatrix} \frac{l_x^2+l_y^2}{3A} \\ \frac{l_x^2-2l_y^2}{6A} & \frac{l_x^2+l_y^2}{3A} \\ \frac{l_x^2+l_y^2}{6A} & \frac{-2l_x^2+l_y^2}{6A} & \frac{l_x^2+l_y^2}{3A} \\ \frac{-2l_x^2+l_y^2}{6A} & \frac{l_x^2+l_y^2}{6A} & \frac{l_x^2-2l_y^2}{6A} & \frac{l_x^2+l_y^2}{3A} \end{pmatrix} \text{SYM.} \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \\ \omega_l \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} \frac{-(2x_i+x_k)l_x+(2y_i+y_k)l_y}{6} \\ \frac{-(x_i+2x_k)l_x-(2y_i+y_k)l_y}{6} \\ \frac{(x_i+2x_k)l_x-(y_i+2y_k)l_y}{6} \\ \frac{(2x_i+x_k)l_x+(y_i+2y_k)l_y}{6} \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

(c) 薄板要素 (図 3.13 参照)

矩形柱要素が平たくなったものを薄板要素と呼ぶことにしよう。この場合板厚方向の w の変化は無視し、板厚中心線の軸方向の変位 w にのみ着目すると、1~3 節で考えた剪断流解析と同じ立場になる。剛性マトリックスの計算は次の諸式を基礎とする。

$$\begin{aligned}
 \{h(s)\} &= (1, s) \\
 \{h_x\} &= \left[0, \frac{x_j-x_i}{l}\right] = \frac{x_j-x_i}{l} (0, 1) \\
 \{h_y\} &= \left[0, \frac{y_j-y_i}{l}\right] = \frac{y_j-y_i}{l} (0, 1)
 \end{aligned}$$

ここに

$$l = \sqrt{(x_j-x_i)^2 + (y_j-y_i)^2}$$

$$x = \left(\frac{x_j-x_i}{l}\right)s + x_i, \quad y = \left(\frac{y_j-y_i}{l}\right)s + y_i$$

$$\{A\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}, \quad \{A^{-1}\} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} l & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.67)

これらの式を用いて導出された薄板要素の剛性マトリックスを表 3.5 に示す。また節点のゆがみ ω_i に関する剛性方程式を導くと次式ようになる。

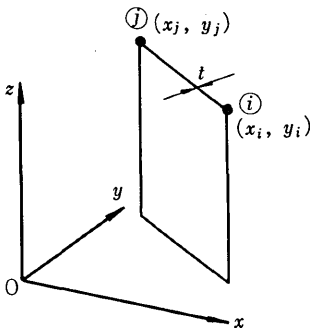


図 3.13 薄板要素

表 3.5 剛性マトリックス (薄板要素)

	w_i	w_j	α
	$\frac{t}{l}$		SYM.
$G \times$	$-\frac{t}{l}$	$\frac{t}{l}$	
	$-\frac{t}{l}(x_i y_j - x_j y_i)$	$\frac{t}{l}(x_i y_j - x_j y_i)$	$\frac{tl}{3}(x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 + y_i^2 + y_i y_j + y_j^2)$

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{l} \text{SYM.} \\ -\frac{t}{l} & \frac{t}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_j \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\frac{t}{l}(x_i y_j - x_j y_i) \\ \frac{t}{l}(x_i y_j - x_j y_i) \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

次節で、これらの諸要素を用いて解析した Saint-Venant 振りのいくつかの例題を紹介する。

5. Saint-Venant 振り問題の数値解析例

以上において、任意形状の断面を有する Saint-Venant 振りの実用的解析手法について述べてきたが、ここではこれらの手法による二、三の解析例を示す。

まず 3 節の逐次近似法を用いた Saint-Venant 振り問題の計算例として、図 3.14 に示す多室薄肉断面をとりあげ、各室の剪断流は表 3.6 のようにして計算することができる。

次に有限要素法を用いた Saint-Venant 振り問題の解析例を図 3.15、図 3.16 に示す。図 3.15 は航空機の翼断面モデルであり、4.3(c) 節の薄板要素を用いて解析したものである。図 3.16 は道路橋断面モデルであり、4.3(b) 節の矩形柱要素を用いて解析したものである。ここで注意すべきことは、薄板要素を用いる場合、開断面、閉断面とも薄肉中心線上のゆがみ ω や、 I_{ω} 、 $I_{\omega x}$ 、 $I_{\omega y}$ および剪断中心位置などを求めることはできるが、 K と剪断応力分布については閉断面の場合しか正解が求まらないということである。これは、開断面の Saint-Venant 振りによる薄肉中心線上の剪断応力はゼロとなることを考えれば理解されると思う。それゆえ、図 3.14 の道路橋断面モデルは薄肉断面であるが、完全な閉断面でないので、ここでは矩形柱要素を用いて解析を行なった。また、4.3(a) 節の三角柱要素を用いた有限要素法による Saint-Venant 振りの解析例としては、すでに生産研究 Vol. 20, No. 5 にキーみぞをもつ丸棒の解析を行っており、それを参考にされたい。(1973 年 6 月 29 日受理)

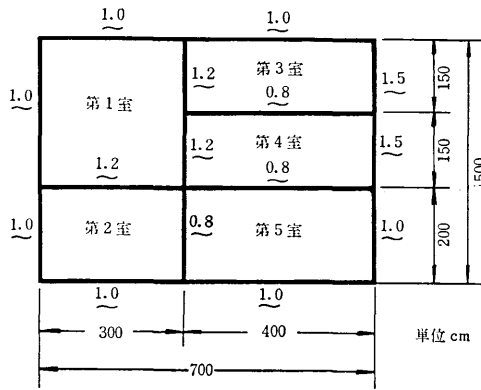


図3.14 逐次計算法適用断面

第3室		C. O. F.	
0.114	0.408	107	1
107		107	1
18.2	43.5	61.7	2
5.62	48.4	54.0	3
3.94	24.1	28.0	4
2.06	21.0	23.1	5
1.52	10.5	12.0	6
0.868	8.70	9.57	7
0.622	4.48	5.10	8
0.366	3.59	3.96	9
0.259	1.91	2.17	10
0.154	1.49	1.64	11
0.108	0.813	0.921	12
		309.16	Σ

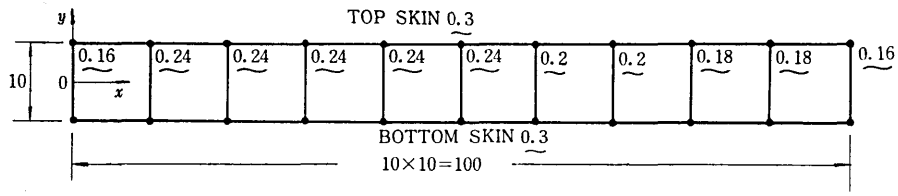
第1室		C. O. F.		
1	164	0.250	0.102	0.111
2	50.6	27.2	11.2	12.2
3	35.5	16.1	12.4	7.03
4	18.6	6.20	6.19	6.16
5	13.7	5.06	5.40	3.19
6	7.82	2.50	2.69	2.63
7	5.60	2.00	2.23	1.37
8	3.30	1.06	1.15	1.09
9	2.33	0.822	0.922	0.581
10	1.39	0.449	0.490	0.451
11	0.970	0.341	0.382	0.247
12	0.586	0.190	0.209	0.187
Σ	304.40			

第4室		C. O. F.		
1	98.0	0.114	0.370	0.444
2	16.7	48.6	43.7	109.0
3	5.16	23.9	25.2	54.3
4	3.62	21.8	22.0	47.4
5	1.90	10.3	11.4	23.6
6	1.40	8.81	9.42	19.6
7	0.798	4.41	4.90	10.1
8	0.571	3.62	3.90	8.09
9	0.337	1.88	2.08	4.30
10	0.238	1.49	1.62	3.35
11	0.142	0.800	0.885	1.83
12	0.0989	0.620	0.669	1.39
Σ	380.96			

第2室		C. O. F.		
1	120	0.227	0.185	
2	70.8	41.0	29.8	
3	27.3	12.7	14.6	
4	22.3	8.88	13.4	
5	11.0	4.65	6.30	
6	8.83	3.43	5.40	
7	4.66	1.96	2.70	
8	3.62	1.40	2.22	
9	1.98	0.825	1.15	
10	1.50	0.583	0.915	
11	0.838	0.348	0.490	
12	0.623	0.243	0.380	
Σ	273.45			

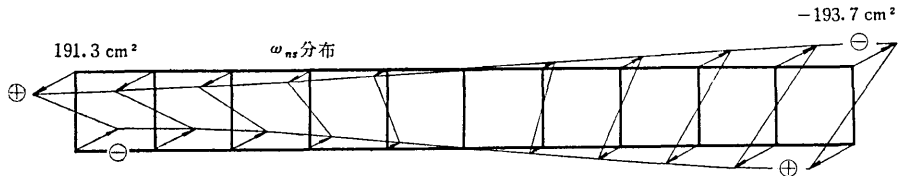
第5室		C. O. F.		
1	119	0.250	0.408	
2	22.2	36.3	58.5	
3	13.1	40.3	53.4	
4	5.05	20.1	25.2	
5	4.13	17.5	21.6	
6	2.04	8.73	10.8	
7	1.63	7.25	8.88	
8	0.862	3.74	4.60	
9	0.670	2.99	3.66	
10	0.366	1.59	1.96	
11	0.278	1.24	1.52	
12	0.155	0.677	0.832	
Σ	309.95			

表 3.6 計算表〔() 内の数字は厳密解〕



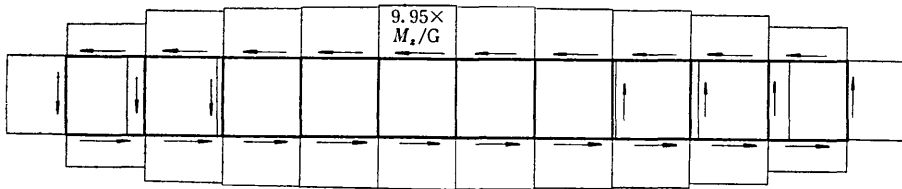
～は板厚, ・は節点 31要素22節点, 単位 cm

(a) 断面寸法および薄板要素分割図



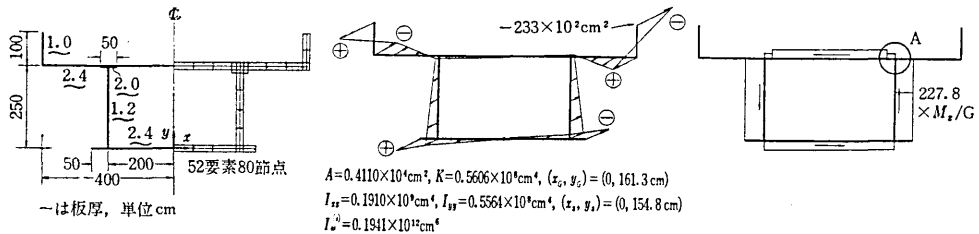
$A = 0.8280 \times 10^2 \text{ cm}^2$, $K = 0.5310 \times 10^4 \text{ cm}^4$, $(x_G, y_G) = (49.35 \text{ cm}, 0)$
 $I_{xx} = 0.7066 \times 10^3 \text{ cm}^4$, $I_{yy} = 0.1690 \times 10^4 \text{ cm}^4$, $(x_s, y_s) = (49.61 \text{ cm}, 0)$, $I_w^{(s)} = 0.1124 \times 10^7 \text{ cm}^6$

(b) ω_{n3} 分布と断面諸定数



(c) 剪断応力分布

図 3.15 翼断面モデルの Saint-Venant 換り解析

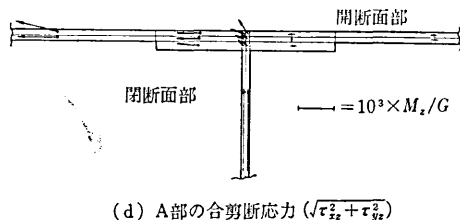


(a) 断面寸法および矩形要素分割図

(b) ω_{n3} 分布と断面諸定数

(c) 簿肉中心線上の応力

図 3.16 道路橋モデルの Saint-Venant 換り解析



(d) A部の合剪断応力 $(\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2})$

参考文献

- 1) T. V. ゴロンバス著, 福本昉士, 西野文雄共訳: “鋼構造部材と骨組”, 丸善 (昭和 45 年 10 月)
- 2) E. F. Bruhn: “Analysis and Design of Aircraft Structures”, Vol. 1, Tri-State Offset Company, Cincinnati, Ohio (1958)
- 3) 小松定夫: “薄肉構造物の理論と計算 I”, 山海堂 (昭和 44 年 11 月)
- 4) 林毅: “軽構造の理論とその応用 (上)”, 日本科学技術連盟 (1966, 9)
- 5) 川井忠彦, 吉村信敏: “マトリクス法による棒のねじり解析”, 生産研究, Vol. 20, No. 5 (1968.5)
- 6) 川井忠彦, 藤谷義信: “有限要素法によるはりのせん断変形解析 (続)”, 日本鋼構造協会構造解析小委員会資料 (昭和 46 年 9 月)