

## 博士論文

アナログ中継システムの

最適構成に関する研究

昭和49年 12月 23日 提出

指導教官 瀧保夫教授

電気工学専門課程

小林 郁太郎

## 目次

序言	(1)
I 中継系の最適構成	(9)
§ 1 序	(10)
§ 2 中継系のモデル	(14)
2.1 情報源	2.2 雑音
2.3 等化特性	2.4 平均電力制限
§ 3 最適化基準	(24)
3.1 相互情報量	3.2 相互情報量の表現
3.3 平均二乗誤差	3.4 平均二乗誤差の表現
3.5 最適化基準の意味	
§ 4 相互情報量評価による最適系	(36)
4.1 方程式系	4.2 中継器特性
4.3 最終段の中継器特性	
4.4 送信等化特性	4.5 最適系

## §5 平均二乗誤差評価による最適系 (49)

- 5.1 方程式系
- 5.2 中継器特性
- 5.3 送信等化特性
- 5.4 受信等化特性
- 5.5 最適系

## §6 最適系の機能構造 (60)

- 6.1 位相特性
- 6.2 中継器の構造
- 6.3 送信等化器の構造
- 6.4 受信等化器の構造
- 6.5 系の構成

## §7 最適系の等価変換 (73)

- 7.1 等価伝送路 (伝送路系)
- 7.2 相互情報量最大の系の等価構成
- 7.3 平均二乗誤差最小の系の等価構成
- 7.4 中継機能を持たない系との対応

## §8 最適系の特性 (84)

- 8.1 出力 SNR
- 8.2 相互情報量
- 8.3 平均二乗誤差
- 8.4 数値例

§ 9 結論	(103)
II 中継系の最適構成と雑音相関	(108)
§ 1 序	(109)
§ 2 中継系のモデル	(112)
2.1 雑音	2.2 等化特性
2.3 平均電力制限	2.4 最適化基準
§ 3 平均二乗誤差評価による最適系	(119)
3.1 方程式系	3.2 完全相関
3.3 特解	3.4 中継器特性
3.5 受信等化特性	3.6 送信等化特性
3.7 部分無相関	
§ 4 最適系の構造の特徴	(140)
4.1 位相特性	4.2 振巾特性
4.3 雑音相関を持たない系との比較	
§ 5 結論	(148)



Ⅲ	中継網の最適構成	(151)
§ 1	序	(152)
§ 2	中継網のモデル	(158)
2.1	情報源	
2.2	雑音	
2.3	径路の接続関係と等化器の分類	
2.4	分岐合流点について	
2.5	一般的な伝達関数の表現	
2.6	電力制限の表現	
§ 3	単一径路の定理	(173)
3.1	直・並列系の最適解の条件	
3.2	条件の意味	
3.3	単一径路の定理	
3.4	定理の証明	
§ 4	中継器に関する定理	(192)
4.1	定理	
4.2	補助定理	
4.3	補助定理の証明	
4.4	定理の証明	
§ 5	分岐点の等化特性に関する定理	(204)

5.1 定理

5.2 定理の証明

§6 合流点の等化特性に関する定理 (211)

6.1 定理(I)

6.2 定理(I)の証明

6.3 定理(II)

6.4 定理(II)の証明

§7 端末の等化特性に関する定理 (223)

7.1 定理(I)

7.2 定理(I)の証明

7.3 定理(II)

7.4 定理(II)の証明

§8 中継網の最適化 (236)

8.1 モデル

8.2 定理の適用

8.3 単純な並列系・直列系との対応

§9 経路選択 (247)

9.1 最適な経路選択の条件

9.2 条件の意味

9.3 経路選択のアルゴリズム

§10 複数情報源受信者対への拡張 (260)

10.1 複数の情報源受信者対の系

10.2 複数情報源受信者対の経路選択アルゴリズム

§ 11 結論

(268)

結語

(272)

謝辭

(276)

参考文献

(277)

# 序 言

情報伝達が極めて原始的な手段により行なわれていた時代から“中継”は情報の遠方への伝達の為に不可欠であった。電気通信の時代に入ってもこの事実には変りはない。

しかし“中継”に対する考え方は、目的とする受信者に直接情報を伝達することが不可能な場合の“なかつぎ”としてとらえられていた。現在の電気通信においても“中継”を含む現実の伝送システムの設計理論は、基本的にはこの考え方に依っている。<sup>(1)~(8)</sup>これは、必要不可欠な要素としての“中継”が、初期の段階から現実に利用され、その為 中継系の持つ各種のパラメータも主に実用的技術的観点から検討決定され、必ずしも最適性と言う観点からの十分な考慮がなされなかった事に依る。

しかし、近年大量の情報伝送が必要となり、又デジタル中継系も導入され<sup>(9)~(11)</sup> 中継系の各種パラメータが再検討されるようになった。すなわち従来主として 外的要請から決定されていた、中継器間隔、

帯域等のパラメータを含めて、系の情報伝送速度等の指標のもとに検討された<sup>(12)~(17)</sup>

これらの検討により明らかにされた多くの事実の中に“中継”と言う機能の改善限界に因するものがある。すなわち、一定の距離差を持つ二点が、減衰を持つある伝送媒体で結ばれている時、この二点間に中継器を挿入することで、通常中継系の能力は向上する。しかし、この中継器の個数を増加させることで常に系の改善が図れる保証はない。従来、実用的観点から、最小中継器間隔がかなり大きな値に設定されていた為、このような点は向題として現われてこなかった。しかし大量の情報伝送が必要となり従来の中継器間隔では要求に応じることができなくなり、又一方で能動線路、簡易中継系といった、極めて短かい中継器間隔を持つ中継システムの構成概念が提案され<sup>(12),(18)~(25)</sup>

この中継機能による系の改善限界の向題が浮かび上がった。この結果、改善限界については系の具体的な構成の細部に立ち入らないうマクロ的な観点で解決がされた。

すなわち、線型等化器によるアナログ中継システムでは否定的に解決され、与えられた伝送媒体のもとでは中継機能による改善に限界が生じ、与えられた条件のもとで最適な中継段数が存在する。<sup>(14),(16)</sup>

一方、非線型中継器を用いたデジタル中継システムについては肯定的に解決され、中継器による系の改善に限界が無いこと、更に能動線路あるいは簡易中継系といった構成概念に基づく中継系において中継機能が改善効果を持つ為の条件等も明らかにされた。<sup>(12)</sup>

これらの議論を通じて中継と云う機能は単なる“なかつぎ”の機能から、より高速・高品質の情報伝送の為に有用な概念として理解された。そこで更に進んで、系の情報伝送速度等の指標のもとで最適な中継システムはどのような構造を持ち、その中で中継機能は具体的にどのような機能を果しているのかについて考えてみる。デジタル中継システムについては、デジタル中継器特有の(感)値効果により、各中継段毎の雑音の相加は實際上皆

無と考えてよく、(いわば)各中継段毎に最適化を行なえば良い。

この意味からは中継機能を持たない伝送系に関する従来の多くの理論的検討結果<sup>(26)~(36)</sup>から、デジタル中継システムの理論的な最適構造は比較的容易に描くことができる。この時、中継器の機能は雑音相加を防ぎ、これにより実効的に伝送路長を短縮する機能として理解できる。従って、デジタル中継システムの向題は技術的実地的な見地から、経済性も考慮して最適なシステムを構成する段階にある。

一方、アナログ中継システムについての理論的な検討は極めて少なく、その最適化に関するものは新しいものではS.L. Framy等の論文<sup>(37)</sup>のみと思われる。従って、最適なアナログ中継システムの構成、その中での中継機能の本質についての議論は見当らない。これは従来理論的な検討が情報源と受信者及びこれを結ぶ伝送媒体と云う中継機能を持たない系に集中し<sup>(34)</sup>、他方、中継システムについては、実用的観点からの検討が中心となった為、非線型歪、漏話等々の實際上重要な向題を解決する為の設計



指標の確立と云った面に偏り、中継システムの理論的な扱ひまでに至らなかつた為と思われる。一方中継機能を持たないアナログ伝送系についてもその最適解に対する機能上の解釈は必ずしも十分ではなく、単に個別の場合についての最適解に終つていた。

本論文はアナログ中継システムを対象とし、情報理論的な観点からの最適化及び得られた最適系の解析と構成に関する解釈を通じて、アナログ伝送系の最適構成に関する統一的な理解を得る事を目的とする。これにより、アナログ中継システムにおいて中継機能の持つ役割はもとより、更に進んでアナログ伝送系の一般的な機能構成を明らかにする。

すなわち、単純な接続関係を持つアナログ中継系の最適化及び網状の接続関係を持つアナログ中継網の最適化により、各最適系の構成を明らかにした後、アナログ中継システムの最適解の各部の機能を解釈することにより、中継器、送信等化器、受信等化器の持つ機能

上の意味を示し、これにより最適系の機能構成を明らかにする。  
この際、雑音相向の有無、系の径路持続関係の変化、最適化の為の評価基準の変化、あるいは、中継器の有無が、最適構造へ及ぼす影響の比較検討を通じて、アナログ中継システムの最適系に共通する機能あるいは構成概念を明らかにする。

これらの結果として、等価伝送路としての“伝送路系”及びこれを構成する機能単位である“中継単位”の概念、及びこの等価伝送路に対する等化機能である“システム等化”の概念に情報源白色化の機能を組み合わせることによって、一見異なる構造を持つアナログ中継システムの最適構成が統一的に解釈されることが明らかとなる。  
この時、一般的な網状の接続関係を持つアナログ中継システムの最適構成は“伝送路系”の等価雑音を判定関数として、“単一径路の定理”を適用することによって、単純な直列構成の系に帰着させて統一的に扱うことができる。

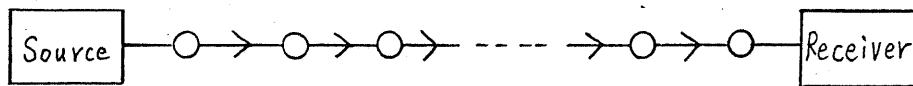
(I-中継系の最適構成), (II-中継系の最適構成と雑音相  
関) で単純な接続関係を持つ中継系を扱い、最適化  
と種々の解析を行なう。 “I” では雑音に相関の無い  
場合を論じ、“II” では雑音に相関が存在する際の  
影響を “I” との対比により論じる。

(III-中継網の最適構成) では、網状の接続関係  
を持つ中継網の最適構成について論じる。

# I 中継系の最適構成

## § 1 序

アナログ中継システムのうち、グラフ的に考えて最も単純な構成と考えられるものは 図 I.1 に示すような直列構成であり、通常“中継系”と云う言葉から思い起されるシステムはこの構成である。



○ : 等化器      → : 伝送路

図 I.1 単純な中継系の構成例

本論文の I, II, III のうち (I-中継継の最適構成) では、このように伝送路と等化器が単純な直列接続の関係にあるアナログ中継系のうち、各中継段の伝送路で相加する雑音相互あるいは雑音と情報信号の間に相関の無い場合について取り扱う。

従来 アナログ伝送系の最適化については種々の議論が行なわれている。最も単純なものは 図 I.2 のような中継機能を持たない伝送系についての最適化であり、この

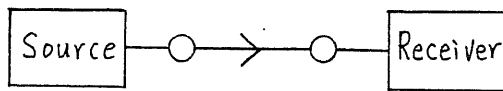


図 I-2  
単純な伝送系

この問題については、最適化基準として相互情報量あるいは平均二乗誤差のいずれを用いても、雑音及び信号に定常性等の条件を加えれば容易に解くことができ、その最適解は良く知られている。<sup>(33), (38)~(40)</sup>

一方、図 I-3 のような並列伝送路における最適化については、平均二乗誤差を最適化基準とした最適解が求められている。<sup>(41)</sup> 又、この伝送系の送受信者間の相互情報量を最大とする最適化も行なわれ<sup>(42), (43)</sup> 更に受信等化器に対して伝送路相互に情報交換を行なわないという条件を加えた場合等の最適化も行なわれている。<sup>(44)</sup>

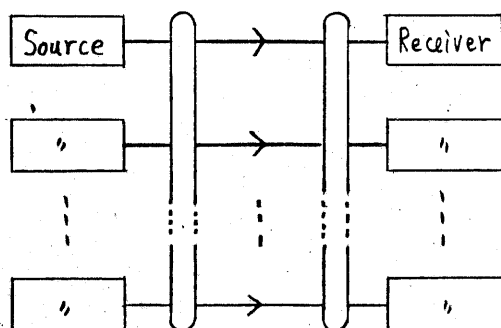


図 I-3  
並列伝送系  
○ : 等化器  
→ : 伝送路

一方、中継機能を持つ図 I-1 のような伝送系については、情報源がサンプル値を発生する場合に、平均二乗誤差を用いた最適化が行なわれている。<sup>(37)</sup>

以下の章 (I-82 ~ I-89) では 図 I-1 の構成を持つ伝送系について、相互情報量及び平均二乗誤差の二つの評価基準で解の最適化を行なう。

更に得られた二つの最適解の機能的な構造、系の構成を互いに対比させながら解析し、その物理的な意味を明らかにする。又両系の総合特性についての解析を数値例も合わせて行ない、各系の特性上の特徴を明らかにする。

一方、得られた二つの最適系は相互にその機能構成を対比するのみならず、図 I-2 に示されるような中継の無い一段の系の最適解と機能構成上の対比を行なう。これにより、従来個別に最適化が行なわれ、その最適解の構成あるいは物理的な意味の明確でなかったアナログ伝送系のうち中継を含む場合と含まない場合を総合した直列伝

送系の最適解についての統一的な解釈を得ることができる。

図I-3に示されるような並列伝送系も含めた一般的な系に対する統一的な解釈及びその意味については(Ⅲ-中継網の最適構成)で取り扱う。



## § 2 中継系のモデル

解析の対象となる中継系のモデルを設定する。

情報源から発生する情報信号  $m(t)$  を  $n$  段中継後、

受信者に伝える図 I-4 の系を考える。

### § 2.1 情報源

情報源は電力スペクトル密度  $M(f)$  を持つ定常なアナ

ログ信号  $m(t)$  を発生するものと考える。 かわる

$$M(f) = \int_{-\infty}^{\infty} E_m[m(\tau), m(\tau')] e^{-j2\pi f(\tau'-\tau)} d(\tau'-\tau) \quad (1.2.1)$$

但し、 $E_m[\cdot]$  は情報信号  $m(t)$  に関する期待値を表わす。

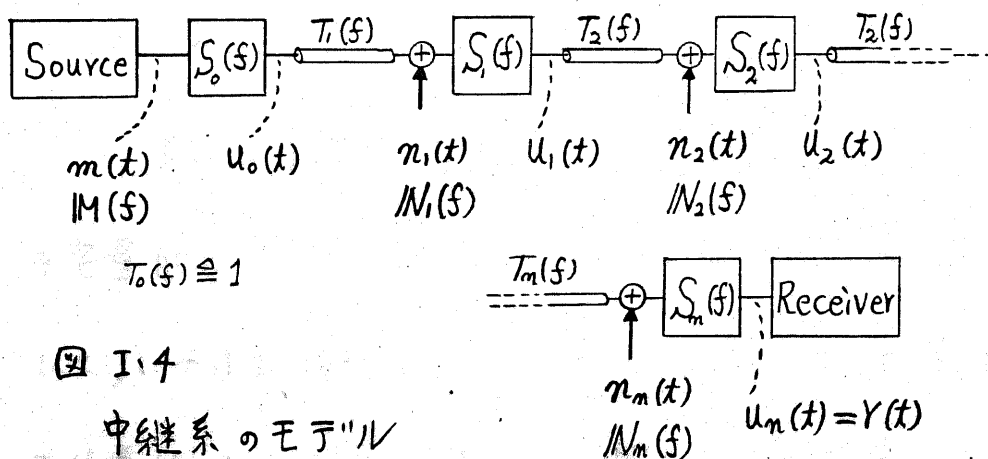


図 I-4

中継系のモデル

尚、評価基準として相互情報量を用いる場合にはガウス性の条件を加える。

逆に情報源としては、電力スペクトル密度  $M(f)$  を持つアナログ信号を発生するものであればその内部構造は向わない。

例えば情報信号として音声信号を考える時、中継系の最適化基準として平均二乗誤差を用いれば、得られた最適な中継系に特に不自然なところは無い。しかし、最適化基準として相互情報量を用いれば、得られる最適系の出力は必ずしも元の信号のスペクトルを保存しておらず、受信者の識別に適したものでない。この意味からは相互情報量最大の系は不自然な系となっている。

情報量は元の信号を再現する為に伝送すべき情報を定量的に表現する。しかし元々音声信号には受信者にとって不自然な情報も多く含まれている。従って受信者が音声信号識別の為に必要とする情報は、情報量として一般的に表現される信号とは異なった次元のものである。

従って、相互情報量によって最適化された系を音声信号の伝送に用いる場合、この最適中継系で扱われる信号  $m(t)$  と元の音声信号は同一のものでなく、何らかの変換・処理により結びつけられたものである必要がある。

すなわち、音声信号の電カスペクトル密度はおおよそ、高域が減衰し低域に電力の集中した特性を持つ。この信号を、音声信号としてではなく、単に定常アナログ信号と考え、情報量の観点でながめると、電カスペクトル密度を白色化し、その後、各周波数を対等に扱うことになる。しかし、音声信号としての次元で考えると、各周波数は対等ではなく、識別の為に不可欠な部分も、特に伝達する必要のない部分もある。従って、音声信号の伝送に際しては、音声信号識別の立場から、あらかじめ必要な情報を抽出し、これを情報源信号  $m(t)$  として相互情報量評価による最適化の対象とする必要がある。

この例に見られるように、元の信号を“識別”等の特定の目的に用いられる信号として見た場合と、そのよ

うな予備知識なしに単なる不規則信号として見た場合、その信号の情報部分と冗長な部分の境界には大きな差が生じる。すなわち、特定目的の信号を相互情報量評価による最適系で伝送する場合の情報源は、図 I.5 に示すように、元の信号の持つ本来の目的に応じた評価基準に基づいて冗長性除去を行なった後の信号を、情報信号  $m(t)$  として発生する構造を考えるべきである。この時冗長性除去の部分は、個々の信号とその信号の目的に応じた評価基準により個別に決定される。

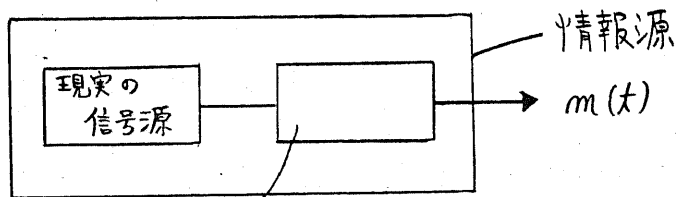


図 I.5  
情報源の構造

〔目的に応じた評価基準に基づき特徴抽出(あるいは冗長性除去)〕

以下で扱う情報源としては、最初に記したように、その出力の確率的性質のみを規定し、その内部構造は問わない。この時、中継系の最適化基

準が平均乗誤差であっても、相互情報量であっても、(現実の信号源) ≡ (情報源) とすれば、自然な場合も不自然な場合も生じる。理想的には、図 I-5 の情報源のモデルを考え、相互情報量評価による最適系を構成するのが良い。しかしその具体的な構成には未知の部分も存在し大きな困難がある。従って、現実的な意味からは平均乗誤差もその価値は小さくない。

## § 2.2 雑音

雑音  $n_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) としては、各伝送路で相加し電力スペクトル密度  $N_i(f)$  を持つ、定常なアナログ雑音を考える。すなわち次式となる。

$$N_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} E_m [n_i(\tau), n_i(\tau')] e^{-j2\pi f(\tau' - \tau)} d(\tau' - \tau) \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (1.2.2)$$

但し、 $E_m[\cdot]$  は雑音  $n(t)$  に関する期待値を表わす。

以下の章 (I-§2 ~ I-§9) では、雑音相互及び雑音と情報信号の間に相関は無く従って次式が成立するものとする。

3.

$$E_{m,n} [m(\tau), n_i(\tau')] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.2.3)$$

$$E_m [n_i(\tau), n_j(\tau')] = 0 \quad (i \neq j, i, j=1, 2, \dots, n) \quad (1.2.4)$$

但し  $E_{m,n} [ \cdot ]$  は 情報信号と雑音に関する期待値を表わす。

尚 最適化基準として 相互情報量を用いる場合には  
ガウス性の条件を加える。

### § 2.3 等化特性

情報信号  $m(t)$  は 送信等化器  $S_0(f)$  により線型変換  
された後、1段目の伝送路  $T_1(f)$  に送出される。各伝  
送路  $T_i(f)$  の出力は 中継器  $S_i(f)$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) により線型  
変換され、次段の伝送路  $T_{i+1}(f)$  に送り込まれる。最終段  
の伝送路  $T_n(f)$  の出力は 受信等化器  $S_n(f)$  により線型変  
換され 受信者に伝えられる。

従って、各等化器及び伝送路のインパルス応答を

それぞれ  $\rho_i(t)$ ,  $\tau_i(t)$  とする

$$\rho_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_i(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1.2.5)$$

$$x_{\lambda}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T_{\lambda}(f) e^{j2\pi f t} df \quad (1.2.6)$$

の関係があり、各等化器の機能は、その出力を  $u_{\lambda}(t)$ 、 $\lambda$  を  $f_{\lambda}(t)$  とすると

$$u_{\lambda}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\lambda}(t-\tau) A_{\lambda}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\lambda}(t-\tau) S_{\lambda}(f) e^{j2\pi f \tau} df d\tau \quad (1.2.7)$$

により表現され、 $A_{\lambda}(t)$  又は  $S_{\lambda}(f)$  によって一意に表わされる。

従って 図 I-4 のモデルにおいて、各等化器  $S_{\lambda}(f)$  の出力

$u_{\lambda}(t)$  は 次式で表わされることになる。

$$u_{\lambda}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} m(t-\tau_0) v_0(\tau_0-\tau_1) v_1(\tau_1-\tau_2) \dots v_{\lambda-1}(\tau_{\lambda-1}-\tau_{\lambda}) \\ \times A_{\lambda}(\tau_{\lambda}) d\tau_{\lambda} d\tau_{\lambda-1} \dots d\tau_1 d\tau_0$$

$$+ \sum_{j=1}^{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} n_j(t-\tau_j) v_j(\tau_j-\tau_{j+1}) \dots v_{\lambda-1}(\tau_{\lambda-1}-\tau_{\lambda}) \\ \times A_{\lambda}(\tau_{\lambda}) d\tau_{\lambda} d\tau_{\lambda-1} \dots d\tau_{j+1} d\tau_j \quad (1.2.8)$$

但し 
$$v_{\lambda}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x_{\lambda+1}(t-\tau) S_{\lambda}(\tau) d\tau \quad (1.2.9)$$

である。

又、 $\sum_{j=1}^0 [\dots] \triangleq 0$  と定義する。

## § 2.4 平均電力制限

受信等化器  $S_m(f)$  を除く、各等化器  $S_k(f)$  ( $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) の出力は平均電力制限を受ける。本節では電力制限の表現式を与える。各等化器  $S_k(f)$  ( $k=0, 1, \dots, m-1$ ) の平均出力電力を  $P_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) とすると、電力制限は

$$P_k = E_{mm} [u_k^2(t)] \quad (1.2.10)$$

と表わすことができる。この式に式(1.2.8)を代入し、雑音相互及び信号と雑音の間に相関の無い事(式(1.2.3), (1.2.4))を用いて積分と  $E[\cdot]$  の演算の入れ替えを行なうと

$$P_k = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_m [m(t-\tau_0), m(t-\tau_0')] w_0(\tau_0) w_0(\tau_0') d\tau_0 d\tau_0' \\ + \sum_{i=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_m [n_i(t-\tau_i), n_i(t-\tau_i')] w_i(\tau_i) w_i(\tau_i') d\tau_i d\tau_i' \quad (1.2.11)$$

但し

$$w_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} v_i(t-\tau_{i+1}) v_{i+1}(\tau_{i+1}-\tau_{i+2}) \dots v_{k-1}(\tau_{k-1}-\tau_k) \\ \times D_k(\tau_k) d\tau_k d\tau_{k-1} \dots d\tau_{i+1} \quad (1.2.12)$$

となる。

定常性の条件から



$$\int_{-\infty}^{\infty} E_m [m(\tau_0), m(\tau_0')] e^{j2\pi f(\tau_0' - \tau_0)} d(\tau_0' - \tau_0) = M(f) \quad (1.2.13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_m [n_\lambda(\tau_\lambda), n_\lambda(\tau_\lambda')] e^{j2\pi f(\tau_\lambda' - \tau_\lambda)} d(\tau_\lambda' - \tau_\lambda) = W_\lambda(f) \quad (1.2.14)$$

の関係があるから Parseval の等式を用いて右辺(式(1.2.11))  
を書きかえると

$$P_R = \int_{-\infty}^{\infty} M(f) W_0(f) W_0^*(f) df + \sum_{\lambda=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} W_\lambda(f) W_\lambda(f) W_\lambda^*(f) df \quad (1.2.15)$$

但し

$$W_\lambda(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_\lambda(t) e^{-j2\pi f t} dt = \prod_{l=\lambda}^k S_l(f) \prod_{m=\lambda+1}^k T_m(f) \quad (1.2.16)$$

が得られる。(注)

一般に 等化器出力端における SNR は充分大きいと  
考えられるから 式(1.2.15)の第2項は通常無視すること  
ができる。従って

$$P_R \simeq \int_{-\infty}^{\infty} M(f) W_0(f) W_0^*(f) df \quad (1.2.17)$$

(注) \*は複素共役を表わす。

とすることができ。(注)

---

(注) 伝送帯域内で各周波数毎の  $SNR$  を考えると一般的には  $SNR \gg 1$  は成立しない。これは帯域の端点付近で  $SNR \approx 1$  となる場合が多いことによる。しかし式 (1.2.15) のように全帯域を総合した  $SNR$  を考える場合にはこの近似は妥当なものである。

## § 3: 最適化基準

系の最適化基準となるべき量として相互情報量及び平均二乗誤差を定義し、この二量の前節で定義した中継系モデルに対する、周波数領域での表現式を与えた後、この評価基準のもとで最適化された系の意味を考える。

### § 3.1 相互情報量

系の出力信号  $Y(t)$  に最適な処理を行なった時に得られる、情報信号  $m(t)$  に関する情報量の最大値として、二つの信号の間に相互情報量  $I(Y, m)$  を定義することができる。

出力信号  $Y(t)$  から、情報信号  $m(t)$  に関する情報を何も得ることができない場合には

$$I(Y, m) = 0 \quad (1.3.1)$$

であり、一方、情報信号がその内部に持ち得る情報量を

$H_m$  とすると、 $I(Y, m)$  はこれを越えることはできないから

$$0 \leq I(Y, m) \leq H_m \quad (1.3.2)$$

(注)  
とある。

相互情報量  $I(r, m)$  を定式化して表現すると次のようになる。  
不規則変数  $r, m$  の取り得る変域をそれぞれ  $X, Y$  とすると、変数  $r, m$  に対する確率密度関数は、

$$P_r(A) = P(r \in A) \quad (1.3.3)$$

$$P_m(B) = P(m \in B) \quad (1.3.4)$$

又、結合確率密度関数は

$$P_{(r,m)}(C) = P((r,m) \in C) \quad (1.3.5)$$

と表わされ、これにより

$$I(r, m) = \int_X \int_Y P_{(r,m)}(dx dy) \log \frac{P_{(r,m)}(dx dy)}{P_r(dx) P_m(dy)} \quad (1.3.6)$$

と定義される。

### § 3.2 相互情報量の表現

図 1.4 の中継系モデルの入出力端の間の相互情報量の表現を与える。

2つの信号  $m(t), r(t)$  が定常ガウス性の場合、その

(注) この関係は通常エントロピーにより  $I(X, Y) = H(X) - H(X|Y)$ ,  $H(X|Y) \geq 0$  と表わされる。又情報信号  $m(t)$  がアナログ信号の場合  $H_m = \infty$  であり、この意味からも I-§2.1 の冗長性除去の考え方が必要である。

相互情報量  $I(r, m)$  は、電カスペクトル密度  $M(f)$ ,  $R(f)$  及び相互電カスペクトル密度  $S_{mr}(f)$  により

$$I(r, m) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log \left( 1 - \frac{|S_{mr}(f)|^2}{M(f)R(f)} \right) df \quad (1.3.7)$$

と表わされる。(15)

I-§2.4 と同様の手法により、系の出力  $r(t)$  の電カスペクトル密度は

$$R(f) = M(f) \left| \sum_{i=0}^m \frac{1}{\pi} T_i(f) S_i(f) \right|^2 + \sum_{j=1}^m \frac{M_j(f)}{|T_j(f)|^2} \left| \sum_{l=j}^m \frac{1}{\pi} T_l(f) S_l(f) \right|^2 \quad (1.3.8)$$

となる。又、系の出力  $r(t)$  と情報信号  $m(t)$  の相互相関関数は

$$R_{mr}(\tau) = E_{mm} [m(t), r(t+\tau)] \quad (1.3.9)$$

と表わされるから、相互電カスペクトル密度  $S_{mr}(f)$  は、

雑音等の相関関係 (式 (1.2.3), (1.2.4)) を考慮すると

$$\begin{aligned} S_{mr}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_{mm} [m(t), r(t+\tau)] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E_{mm} [m(t), m(t+\tau)] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \cdot \left[ \sum_{l=0}^m \frac{1}{\pi} S_l(f) T_l(f) \right]^* \end{aligned} \quad (\text{次頁へ})$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} E_{mm} [m(t), r_j(t+\tau)] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \left[ \prod_{l=j}^m S_l(f) \prod_{m=i+1}^m T_m(f) \right]^* \\
& = |M(f)| \left[ \prod_{l=0}^m S_l(f) T_l(f) \right]^* \quad (1.3.10)
\end{aligned}$$

と表わせる。

式 (1.3.8), (1.3.10) を 式 (1.3.7) に代入して整理すると

$$\begin{aligned}
I(r, m) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \log (|M(f) \cdot R(f)| \right. \\
& \quad \left. - \log (|M(f) R(f) - |S_{mr}(f)|^2) \right\} df \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \log (|M(f)| \left| \prod_{l=0}^m T_l(f) S_l(f) \right|^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^m \frac{|N_j(f)|}{|T_j(f)|^2} \left| \prod_{l=j}^m T_l(f) S_l(f) \right|^2 \right) \\
& \quad \left. - \log \left( \sum_{j=1}^m \frac{|N_j(f)|}{|T_j(f)|^2} \left| \prod_{l=j}^m T_l(f) S_l(f) \right|^2 \right) \right\} df \quad (1.3.11)
\end{aligned}$$

となる。

ここで

$$N_T(f) \triangleq \sum_{j=1}^m \frac{|N_j(f)|}{|T_j(f)|^2} \left| \prod_{l=j}^m T_l(f) S_l(f) \right|^2 \quad (1.3.12)$$

と定義すると、この  $N_T(f)$  は系の出力信号  $r(t)$  に含ま

れる雑音の電カスペクトル密度を表わしている。

この表現を用いると 相互情報量は

$$I(r, m) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \log R(f) - \log M_T(f) \} df \quad (1.3.13)$$

と一般的な形に表現される。

### § 3.3 平均二乗誤差

中継系モデルのもう一つの最適化基準として 平均二乗誤差をとり上げる。

平均二乗誤差  $D$  は 情報信号  $m(t)$  と系の出力信号  $r(t)$  により

$$D = E_{mm} [r(t) - m(t)]^2 \quad (1.3.14)$$

と定義される。図 I.4 のモデルでは、信号、雑音共に定常であるから、信号及び雑音についての期待値をとることで平均二乗誤差  $D$  は 時間  $t$  に無関係な量となり、周波数領域での表現が可能である。

図 I.5 に示したように、中継系の最適化基準と受信者の情報信号に対する評価基準の整合を 情報源内部で充分に行なう場合、中継系の最適化基準として相互情報量が最適で

ある。すなわち、受信者の持つ評価基準に対して有用な情報すべてを、情報信号から抽出し、いずれの情報も伝送してもその情報量が等しければ受信者の持つ評価基準への寄与が等しい形に情報の変型を行なえば、中継系の機能と受信者の持つ評価基準との整合は完全となり、これを上まわる系は相互情報量の定義から存在し得ない。

このような観点からは、平均二乗誤差は最適化基準として意味はない。しかし、相互情報量と受信者の持つ評価基準との間の充分な整合をとる具体的な手法は明らかでない。

又、この整合の為の複雑化も見逃せない。従って、実用的な意味からは、この整合を一切行なわず受信者の持つ評価基準と中継系の最適化基準を同一にあることが考えられる。この時、平均二乗誤差は、受信者の持つ評価基準の一例として最もなじみ深いものであろう。

尚 平均二乗誤差  $D$  最小と SNR 最大は必ずしも一致しない。<sup>(注)</sup> 又、SNR 最大と相互情報量最大も特別の場合

---

(注) 無歪条件を加えた場合には、SNR 最大の系は I-§5 の手法に無歪条件を加えて容易に得られる。



以外もちろん一致しなす。

### § 3.4 平均二乗誤差の表現

中継系のモデル 図 1.4 に対する平均二乗誤差  $D$  の周波数領域での表現を与える。

系の出力信号  $r(t)$  は 式 (1.2.8) と同様次式で表わされる。

$$r(t) = u_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} m(t-\tau_0) v_0(\tau_0-\tau_1) v_1(\tau_1-\tau_2) \dots v_{m-1}(\tau_{m-1}-\tau_m) \\ \times \Delta_m(\tau_m) d\tau_m d\tau_{m-1} \dots d\tau_2 d\tau_1 d\tau_0 \\ + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} n_j(t-\tau_j) v_j(\tau_j-\tau_{j+1}) \dots v_{m-1}(\tau_{m-1}-\tau_m) \\ \times \Delta_m(\tau_m) d\tau_m d\tau_{m-1} \dots d\tau_{j+1} d\tau_j \quad (1.3.15)$$

但し 
$$v_i(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h_{i+1}(t-\tau) S_i(\tau) d\tau \quad (1.3.16)$$

従つて、この式を 式 (1.3.14) に代入し 積分と期待値の演算を入

れかえて整理すると

$$D = E_{mm} [ \{ r(t) - m(t) \}^2 ] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} E_{mm} [ m(t-\tau_0), m(t-\tau_0') ] v_0(\tau_0-\tau_1) v_1(\tau_1-\tau_2) \dots v_{m-1}(\tau_{m-1}-\tau_m) \\ \times S_m(\tau_m) \times v_0(\tau_0'-\tau_1') v_1(\tau_1'-\tau_2') \dots v_{m-1}(\tau_{m-1}'-\tau_m') S_m(\tau_m') d\tau_m d\tau_m' \\ \times d\tau_{m-1} d\tau_{m-1}' \dots d\tau_0 d\tau_0' \quad (\text{次頁へ})$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} E_m [n_j(t-\tau_j), n_j(t-\tau'_j)] v_j(\tau_j - \tau_{j+1}) v_{j+1}(\tau_{j+1} - \tau_{j+2}) \cdots \\
& \quad \times v_{m-1}(\tau_{m-1} - \tau_m) S_m(\tau_m) \times v_j(\tau'_j - \tau'_{j+1}) v_{j+1}(\tau'_{j+1} - \tau'_{j+2}) \cdots \\
& \quad \times v_{m-1}(\tau'_{m-1} - \tau'_m) S_m(\tau'_m) d\tau_m d\tau'_m d\tau_{m-1} d\tau'_{m-1} \cdots d\tau_j d\tau'_j
\end{aligned} \tag{1.3.17}$$

となる。ここで

$$\int E_m [m(\tau_0), m(\tau'_0)] e^{-j2\pi f(\tau'_0 - \tau_0)} d(\tau'_0 - \tau_0) = M(f) \tag{1.3.18}$$

$$\begin{aligned}
\int E_m [n_\lambda(\tau_0), n_\lambda(\tau'_0)] e^{-j2\pi f(\tau'_0 - \tau_0)} d(\tau'_0 - \tau_0) &= N_\lambda(f) \tag{1.3.19} \\
& (\lambda=1, 2, \dots, m)
\end{aligned}$$

の関係があるから Parseval の公式を用いて周波数領域の積分に書きかえると

$$\begin{aligned}
D &= \int_{-\infty}^{\infty} M(f) \left| \prod_{\lambda=1}^m T_\lambda(f) S_\lambda(f) - 1 \right|^2 df \\
& + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_j(f)}{|T_j(f)|^2} \left| \prod_{\lambda=j}^m T_\lambda(f) S_\lambda(f) \right|^2 df
\end{aligned} \tag{1.3.20}$$

が得られる。

この時 第1項は信号の歪による平均二乗誤差を表わし  
 第2項は各中継段で加わる雑音による平均二乗誤差、すなわち系の出力信号に含まれる雑音成分を表わす。

従って、無歪条件を加えた場合 第1項は零となる。

### § 3.5 最適化基準の意味

前節までにアナログ中継系の最適化の基準として、相互情報量及び平均二乗誤差の二つを取り上げ、その表現式を与えた。

本節では最適化基準の意味について触れておく。

中継系の最適化の立場からは情報源と受信者の向を結ぶ伝送路と中継器の部分が対象となり、I-§2.1で触れたように情報源の内部の構造は向わない。又、受信者、雑音源の内部についても同様のことが云える。

従って、中継系を利用する立場からみると図I.6のように、情報源から送信等化器  $S_o(f)$  へ情報信号を受け渡す点“A”での

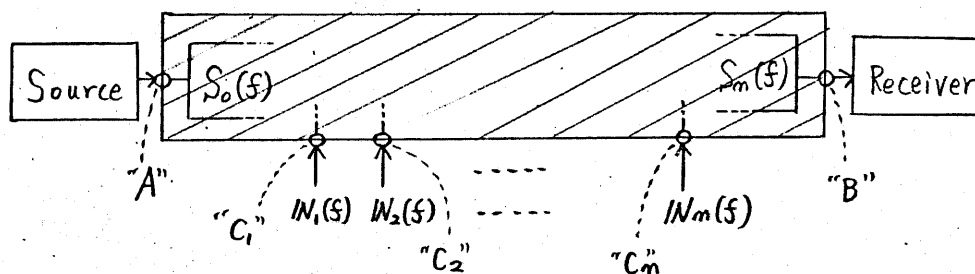


図 I.6. 中継系の境界条件

信号の性質及び、系への雑音の入力点  $C_1, C_2, \dots, C_m$  での雑音

の性質及び点“A”と点“B”の信号を変数に持つ最適化基準  
 において、中継系は規定されており、同図の斜線部が与えられた  
 最適化基準を満足するように、上記の境界条件のもとで決定される  
 ことになる。

受信者が情報源の発生する信号に関する情報すべてを少  
 しでも多く望む場合に中継系の最適化基準として相互情報量  
 が用いられているれば整合が良い。逆に、平均二乗誤差が用い  
 られているれば受信者の評価基準と最適化基準に不整合が起る。

一方、受信者の評価基準が平均二乗誤差であった場合には、  
 逆の整合、不整合の関係が生じる。しかしここで注意を

要することは、相互情報量が最適化基準の場合の不整合は  
 境界点“A”、“B”の外側で、十分な信号処理を行えば整合可  
 能であるのに対して、平均二乗誤差が最適化基準の場合の  
 不整合は、境界の外側の処理では整合不能と云う点である。

更に、平均二乗誤差が最適化基準の場合の整合は必ずしも  
 真の整合を意味しない。

すなわち、中継系の最適化基準が相互情報量の場合に

限り、真の整合が可能でありこの意味から受信者の評価基準の変化に対して相互情報量が最も一般的な最適化基準と云える。

しかし、この最適化基準で真の整合を取るには、境界点の前後で複雑な信号処理を必要とし、その具体的手法も見出されていらい現状では必ずしも現実的な意味を持ち得ず、限界を与えるにとどまる。すなわち、相互情報量を最適化基準として選ぶことにより、将来の限界を与える最適系が得られ、一方、最もなじみ深い受信者の評価基準の一つとして、平均二乗誤差を最適化基準として選ぶことにより特定の評価基準に対して一応の整合のとれた現実的な最適系の一例が得られることになる。

受信者の評価基準が平均二乗誤差  $D$  の場合の限界は、相互情報量を最適化基準とした系の最大の相互情報量  $I_{max}$  と情報源に対する Rate-distortion 関数  $R(D)$  により<sup>(46)~(52)</sup>

$$D \geq R^{-1}(I_{max}) \quad (1.3.21)$$

と与えられる。<sup>(注)</sup>

---

(注) " $R^{-1}$ " は関数  $R(D)$  の逆関数を表わす。

## § 4. 相互情報量評価による最適系

相互情報量を系の最適化基準として最適解の満たすべき方程式系を示し、これを解くことにより最適系(MI系)を求める。本章で与える解法はいくつかの個所で  $SNR \gg 1$  の仮定を用いている。一方本章で得られた結果から解をあらかじめ予想することで、電力制限の表現に  $SNR \gg 1$  を仮定するだけで解を求めることが可能であり、これは III-§7 で示される。

### § 4.1 方程式系

問題は 図 I-4 の中継系モデルにおいて与えられた情報信号の電カスペクトル密度  $M(f)$ 、雑音電カスペクトル密度  $N_i(f)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )、各段の伝送路特性  $T_i(f)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ;  $T_0(f) \equiv 1$ )、各等化器の平均出力電力  $P_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ) が与えられた時、電力制限

$$P_k = E_{mm} [U_k^2(t)] \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1.4.1)$$

のもとで、相互情報量

$$I(r, m) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \log R(f) - \log M_T(f) \} df \quad (1.4.2)$$

を最大とするように 等化特性  $S_i(f)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) を定めれば良く、これにより相互情報量最大の系が得られる。

この時 受信等化器  $S_m(f)$  は 伝送帯域  $\Omega_T$  において

$$S_m(f) \neq 0 \quad (1.4.3)$$

であれば任意で良い。これは、相互情報量が可逆な線型変換に対して不変であることから明らかである。

ここで Lagrange の未定乗数  $\lambda_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) を用いて

$$I(r, m) - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k P_k \quad (1.4.4)$$

の等化器  $S_p(f)$  ( $p=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) に関する変分をとることによって最適解の満たすべき方程式

$$\delta \left[ I(r, m) - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k P_k \right]_{S_p} = 0 \quad (p=0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (1.4.5)$$

を得ることが出来る。



従って、これらの式と電力制限(式(1.4.1))と合わせて、計  
 $2n$ 個の式から未定乗数  $\lambda_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ) 及び  
 等化特性  $S_p(f)$  ( $p=0, 1, 2, \dots, n-1$ ) を定めれば良い。

式(1.4.5)を I-§2, §3の結果を用いて計算し、整形の為  
 両辺に  $S_p(f)$  を掛けて整理すると、次の方程式系が得  
 られる。(注) この際  $SNR \gg 1$  として式(1.2.17)を用いている。

$$\begin{aligned}
 EP: & \frac{1}{R} \left[ M \left| \sum_{i=0}^m T_i S_i \right|^2 + \sum_{i=1}^P \frac{N_i}{|T_i|^2} \left| \sum_{l=i}^m T_l S_l \right|^2 \right] \\
 & - \frac{1}{N_T} \left[ \sum_{i=1}^P \frac{N_i}{|T_i|^2} \left| \sum_{l=i}^m T_l S_l \right|^2 \right] \\
 & - \sum_{k=p}^{n-1} 2 \lambda_k M \left| \sum_{i=0}^k T_i S_i \right|^2 = 0 \\
 & (p=0, 1, 2, \dots, n-1) \qquad (1.4.6)
 \end{aligned}$$

この方程式系には添字“ $p$ ”に無関係に各式に共  
 通に含まれる項がある。これを消去する為各式の辺々  
 引き算を行ない “ $EP$ ” - “ $EP-1$ ”  $\rightarrow$  “ $FP$ ” を作ると、

方程式系の  $n$ 個の独立な式は次のようになる。

$$E0: \frac{1}{R} \left[ M \left| \sum_{i=0}^m T_i S_i \right|^2 \right] - \sum_{k=0}^{n-1} 2 \lambda_k M \left| \sum_{i=0}^k T_i S_i \right|^2 = 0 \qquad (1.4.7)$$

(注) 以下では、まぎらわしい場合を除いて変数  $f$  を省略し  $S(f) = S$  と表わす。

$$\begin{aligned}
 FP: & \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{N_T} \right) \frac{N_p}{|T_p|^2} \left| \sum_{\ell=p}^n T_\ell S_\ell \right|^2 \\
 & = -2 \lambda_{p-1} M \left| \sum_{\lambda=0}^{p-1} T_\lambda S_\lambda \right|^2 \\
 & \quad (P=1, 2, \dots, m-1) \qquad (1.4.8)
 \end{aligned}$$

従って、 $n$  個の未知関数  $S_\lambda(f)$  ( $\lambda=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) については連立方程式 ( $E_0, F_1 \sim F_{m-1}$ ) を解けば良い。

## § 4.2 中継器特性

等化特性  $S_\lambda(f)$  ( $\lambda=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) のうち、送信等化特性  $S_0(f)$  及び最終段の中継器特性  $S_{m-1}(f)$  を除く中継器特性  $S_p(f)$  ( $p=1, 2, \dots, m-2$ ) を求める。

式 (1.4.8) ( $FP; p=1, 2, \dots, m-1$ ) の辺々割り算を行ない

“ $F_{p+1}$ ” / “ $FP$ ”  $\rightarrow$  “ $G_p$ ” を作ると

$$\begin{aligned}
 G_p: & \frac{N_{p+1}}{N_p} \frac{|T_p|^2}{|T_{p+1}|^2} \frac{1}{|T_p S_p|^2} = \frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}} |T_p S_p|^2 \\
 & \quad (P=1, 2, \dots, m-2) \qquad (1.4.9)
 \end{aligned}$$

が得られる。これらの式を  $|S_p(f)|^2$  について解くと

$$|S_p|^2 = \sqrt{\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} \frac{N_{p+1}}{N_p} \frac{1}{|T_p|^2 |T_{p+1}|^2}} \qquad (1.4.10)$$

のように、中継器の振巾特性を得ることが出来る。

### §4.3 最終段の中継器特性

最終段の中継器特性  $S_{m-1}(s)$  を求める。

他の中継器の特性 (式 (1.4.10)) より

$$\begin{aligned} \prod_{\lambda=0}^{n-2} |T_{\lambda} S_{\lambda}|^2 &= |S_0|^2 \prod_{\lambda=1}^{n-2} \sqrt{\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} \frac{N_{p+1}}{N_p} \frac{|T_p|^2}{|T_{p+1}|^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_{n-2}} \frac{N_{n-1}}{N_1} \frac{|T_1|}{|T_{n-1}|}} |S_0|^2 \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

の関係が得られる。そこでこの関係を

$$\begin{aligned} F_{n-1}: \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{N_T} \right) N_{n-1} |S_{n-1} T_n S_m|^2 \\ + 2 \lambda_{n-2} M \left| \prod_{\lambda=0}^{n-2} T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

に代入して整理すると次式となる。

$$\begin{aligned} |S_{m-1}|^4 [N_{m-1} |T_{m-1}|^2 |T_m|^4] \\ - |S_{m-1}|^2 \left[ 2 \lambda_{n-2} N_{ne} (2 N_T' + M \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_{n-2}} \frac{N_{n-1}}{N_1}} |T_1| |T_{n-1}| |T_m S_0|^2) \right] \\ - [2 \lambda_{n-2} N_m^2] = 0 \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

$$\text{但し (注)} \quad N_{ne} \triangleq \frac{N_T}{|S_m|^2} \triangleq N_T' |S_{m-1}|^2 + N_m \quad (1.4.14)$$

(注) 伝送帯域  $\Omega_I$  内で  $S_m(s) \neq 0$  を用いている。

ここで

$$a \cong N_{m-1} |T_{m-1}|^2 |T_m|^4 \quad (1.4.15)$$

$$b \cong 2 \lambda_{m-2} N_{me} (2 N_T' + M) \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_{m-2}} \frac{N_{m-1}}{N_1}} |T_1| |T_{m-1}| |T_m S_0|^2 \quad (1.4.16)$$

$$c \cong 2 \lambda_{m-2} N_m^2 \quad (1.4.17)$$

$$\alpha \cong |S_{m-1}|^2 \quad (1.4.18)$$

とおく、 $\lambda_k > 0$  の場合を考えれば良くなる<sup>(注1)</sup>  $a, b, c > 0$

となる

$$a \alpha^2 - b \alpha - c = 0 \quad (1.4.19)$$

は正、負の実根 ( $\alpha > 0, \beta < 0$ ) を持つ。従って解は

$$|S_{m-1}|^2 = \alpha = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \quad (1.4.20)$$

となる。<sup>(注2)</sup>  $SNR \gg 1$  であれば

$$b \simeq 2 N_{me} M \sqrt{\lambda_0 \lambda_{m-2} \frac{N_{m-1}}{N_1}} |T_1| |T_{m-1}| |T_m S_0|^2 \quad (1.4.21)$$

$$b^2 \gg 4ac \quad (1.4.22)$$

が成立するから

(注1) 式(1.4.4)で、最適解では  $\lambda_k > 0$  となるように符号が定めてある。得られた解ももちろん  $\lambda_k > 0$  を満足している。

(注2) 式(1.4.20)の与える解は  $M=0$  あるいは  $|S_0|=0$  の時  $|S_{m-1}|=0$  となるが伝送帯域が一致しない。これは電力制限の近似式(1.2.17)を用いた事に起因する。

$$|S_{m-1}|^2 = \sqrt{\frac{\lambda_0 \lambda_{m-2}}{N_1 N_{m-1}}} M N_{me} \frac{2}{|T_m|^2} \frac{|T_1|}{|T_{m-1}|} |S_0|^2 \quad (1.4.23)$$

が得られる。

以上ですべての中継器特性  $S_1(f) \sim S_{m-1}(f)$  が送信等化特性  $S_0(f)$  の関数として定まった。これらの結果(式(1.4.10),

(1.4.23)) を式(1.4.7)(E0) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} & |S_0|^2 \left[ |S_0|^6 \left\{ 4 \lambda_{n-1} \frac{\lambda_0^2}{N_1^2} M^3 N_{me} \frac{|T_1|^2}{|T_m|^2} \right\} \right. \\ & + |S_0|^4 \left\{ 2 \lambda_{n-1} \frac{\lambda_0}{N_1} M^2 N_{me} \frac{|T_1|}{|T_m|^2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{N_\lambda}{|T_\lambda|} \sqrt{\frac{\lambda_0 \lambda_{\lambda-1}}{N_1 N_\lambda}} \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\lambda_0}{N_1} M^2 |T_1| \sum_{k=0}^{n-2} \sqrt{\lambda_0 \lambda_k} \frac{N_{k+1}}{N_1} \frac{1}{|T_{k+1}|} \right\} \right. \\ & + |S_0|^2 \left\{ \frac{\lambda_0}{N_1} M \left( 2 \lambda_{n-1} N_n \frac{1}{|T_m|^2} - 1 \right) \right. \\ & \quad \left. \left. + 2 M \left( \sum_{\lambda=0}^{n-2} \sqrt{\lambda_0 \lambda_\lambda} \frac{N_{\lambda+1}}{N_1} \frac{1}{|T_{\lambda+1}|} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \frac{N_n}{N_{ne}} \frac{1}{|T_1|} \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \sqrt{\lambda_0 \lambda_k} \frac{N_{k+1}}{N_1} \frac{1}{|T_{k+1}|} \right\} \right] = 0 \quad (1.4.24) \end{aligned}$$

となる。

今  $x = |S_0|^2$  とおくと上式は

$$x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0 \quad (1.4.25)$$

と表わすことができる。  $SNR \gg 1$  であれば  $\lambda_k > 0$  を

考慮して

$$A = 4 \lambda_{n-1} \frac{\lambda_0^2}{W_1^2} M^3 W_{ne} \frac{|T_1|^2}{|T_m|^2} > 0 \quad (1.4.26)$$

$$B \simeq \frac{2\lambda_0}{W_1} M^2 |T_1| \sum_{k=0}^{n-2} \sqrt{\lambda_0 \lambda_k \frac{W_{k+1}}{W_1}} \frac{1}{|T_{k+1}|} > 0 \quad (1.4.27)$$

$$C \simeq -\frac{\lambda_0}{W_1} M < 0 \quad (1.4.28)$$

$$D \simeq 0 \quad (1.4.29)$$

となり 式 (1.4.24) は解として 正負の実根 ( $\delta > 0$ ,  $\delta < 0$ ) を

持つ。従って 送信等化特性は 次式となる。

$$|S_0|^2 \simeq \delta(f) = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n-2} \sqrt{\lambda_k W_{k+1}} \frac{1}{|T_{k+1}|}\right)^2 + \frac{4\lambda_{n-1} W_{ne}}{|T_m|^2}} - \left(\sum_{k=0}^{n-2} \sqrt{\lambda_k W_{k+1}} \frac{1}{|T_{k+1}|}\right)}{4 \sqrt{\frac{\lambda_0}{W_1}} M \lambda_{n-1} \frac{W_{ne}}{|T_m|^2} |T_1|} \quad (1.4.30)$$

この式の中で  $W_{ne}(f)$  は 式 (1.4.14) より

$$W_{ne} \triangleq \frac{W_T}{|S_m|^2}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n-2} \sqrt{\lambda_\lambda W_{\lambda+1}} \frac{1}{|T_{\lambda+1}|} \cdot \sqrt{\frac{W_{n-1}}{\lambda_{n-2}} |T_{n-1}| |T_m|^2 |S_{n-1}|^2 + W_n} \quad (1.4.31)$$

と表わされ、最終段の中継器特性  $S_{n-1}(f)$  を含む。

そこで、式 (1.4.30) を式 (1.4.23) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} & \left( 2 |S_{m-1}|^2 \sqrt{\frac{W_{m-1}}{\lambda_{m-2}}} |T_{m-1}| \lambda_{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right)^2 \\ &= \left( \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right)^2 + 4 \lambda_{m-1} \left( \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \cdot \sqrt{\frac{W_{m-1}}{\lambda_{m-2}}} |T_{m-1}| |S_{m-1}|^2 + \frac{W_m}{|T_m|^2} \right) \end{aligned} \quad (1.4.32)$$

の関係が得られる。従って  $|S_{m-1}(f)|^2$  について解くと

$$|S_{m-1}|^2 = \sqrt{\frac{\lambda_{m-2}}{\lambda_{m-1}} \frac{W_m}{W_{m-1}}} \frac{1}{|T_{m-1}| |T_m|} \quad (1.4.33)$$

のように最適解を得ることが出来る。

#### § 4.4 送信等化特性

送信等化特性  $S_0(f)$  は前節の式 (1.4.30) に最終段の中

継器特性(式 (1.4.33)) を代入し整理することにより得られる。

式 (1.4.30) を変型すると

$$|S_0|^2 = \frac{1}{M} \frac{1}{|T_1|} \sqrt{\frac{W_1}{\lambda_0}} \frac{1}{\sqrt{\left( \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right)^2 + \frac{4 \lambda_{n-1} W_{ne}}{|T_n|^2} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|}}} \quad (1.4.34)$$

となり、一方前節の式 (1.4.31), (1.4.33) から

$$\sqrt{\left( \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right)^2 + \frac{4 \lambda_{n-1} W_{ne}}{|T_n|^2}} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} + \frac{2 \sqrt{\lambda_{n-1} W_n}}{|T_n|} \quad (1.4.35)$$

の関係が得られるから

$$|S_0|^2 = \frac{1}{M} \frac{1}{|T_1|} \sqrt{\frac{M_1}{\lambda_0}} \frac{1}{2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_k M_{k+1}}}{|T_{k+1}|}} \quad (1.4.36)$$

よ、送信等化特性  $S_0(f)$  の最適解を得ることができる。

### § 4.5 最適系

前節までで 各等化器の最適解を得ることができた。

この解は その導出に際して  $SNR \gg 1$  の仮定を用いて解かれて

ている。 伝送帯域の端点付近は 通常  $SNR$  の悪い部

分となる。 従って 伝送帯域の端点付近の解をも正確に

決定するには、 解導出の過程で  $SNR \gg 1$  の近似を

用いずに解く必要がある。<sup>(注)</sup> このようにして得られる

正確な解は 図 I.7 に実線で示すように、伝送帯域  $\Omega_I$

で値を持ち 阻止域  $\Omega_I^c$  で零となる。 この事は 式(1.4.25)

の形からも推測される。

前節までには求めた解は  $SNR \gg 1$  の近似を用いている為

(注) この正確な解は III-§7 の定理で示される。



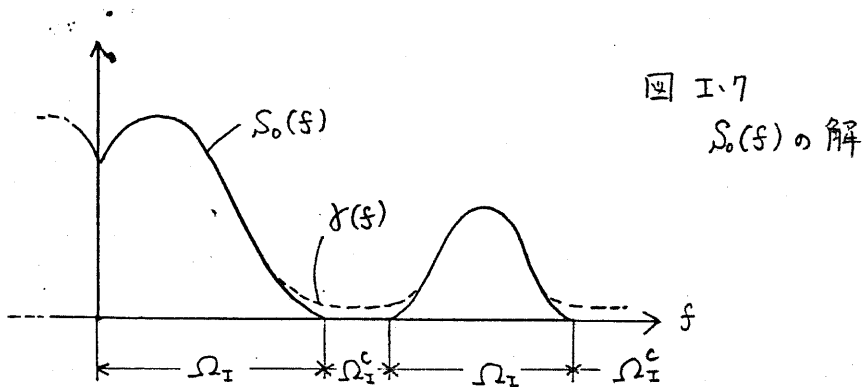


図 I.7 に破線で示したように 阻止域  $\Omega_I^c$  及び 伝送帯域の  
端点付近で真の解からはずれ、伝送帯域の中央部のみ  
で正しい解を与えている。

式(1.4.24)をみると 送信等化特性  $S_0(f)$  が正の解を持つ  
為には 少なくとも

$$\left( \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\sqrt{\lambda_k} W_{k+1}}{|T_{k+1}|} \right)^2 + \frac{\lambda_{n-1} W_n}{|T_n|^2} < \frac{1}{2} \quad (1.4.37)$$

の成立する必要がある。伝送帯域  $\Omega_I$  は この条件を満足する

領域内 にあることがわかる。従って 伝送帯域  $\Omega_I$  につい

て上式から おおよその事を 知る事ができる (図 I.8)。しか

し 正確には  $SNR \gg 1$  の仮定を用いずに 解を求めよ 必要がある。<sup>(注)</sup>

(注) III-57 の解は、電力制限の表現以外に  $SNR \gg 1$  を用いておらず、

帯域も決定することが出来る。式(1.4.37)はこの結果の 一つの近似式となっている。

得られた最適系をまとめて次式に示す。伝送帯域  $\Omega_I$  で

$$|S_0|^2 = \frac{1}{M} \frac{1}{|T_1|} \sqrt{\frac{W_1}{\lambda_0}} \frac{1}{2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|}} \quad (1.4.38)$$

$$|S_p|^2 = \frac{1}{|T_p|} \sqrt{\frac{\lambda_{p+1} W_{p+1}}{\lambda_p W_p}} \frac{1}{|T_{p+1}|} \quad (p=1, 2, \dots, m-1) \quad (1.4.39)$$

$$|S_m|^2 \neq 0 \quad (1.4.40)$$

阻止域  $\Omega_I^c$  ですべて零。

この時伝送帯域は

$$\left( \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right)^2 + \frac{\lambda_{m-1} W_m}{|T_m|^2} < \frac{1}{2} \quad (1.4.41)$$

を満足する  $f$  の領域内にある。

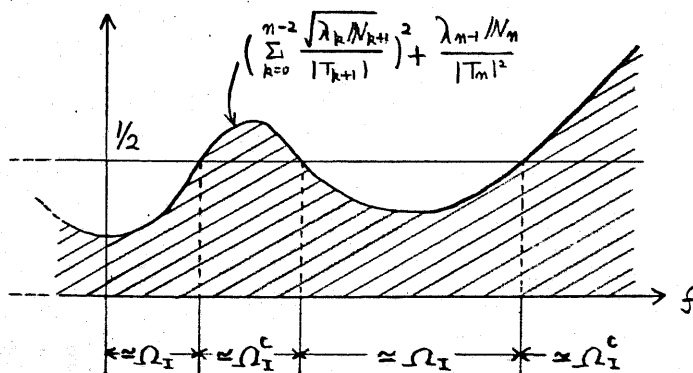


図 1.8  
雑音電カスペクトル  
密度の例。

又各等化器の位相特性はどのように選んでも式(1.4.6)の方

程式系を満足するから任意である。これは、雑音相互に相

関が無く、又最適化基準である相互情報量が系の出力の電力スペクトル密度  $R(f)$  とこれに含まれる雑音の電力スペクトル密度  $N_T(f)$  の関数

$$I(r, m) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \log R - \log N_T \} df \quad (1.4.42)$$

であることから容易に理解できる。

尚、III-§7 で得られる定理を用いると正確な解は、伝送帯域  $\Omega_{\pm}$  で

$$|S_0|^2 = \frac{1}{|M|} \frac{1}{|T_1|} \sqrt{\frac{N_1}{\lambda_0}} \left\{ \frac{1}{2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}}}{|T_{k+1}|}} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right\} \quad (1.4.43)$$

$$|S_p|^2 = \frac{1}{|T_p|} \sqrt{\frac{\lambda_{p-1} N_{p+1}}{\lambda_p N_p}} \frac{1}{|T_{p+1}|} \quad (p=1, 2, \dots, m-1) \quad (1.4.44)$$

$$|S_m|^2 \neq 0$$

となり、伝送帯域  $\Omega_{\pm}$  は

$$\Omega_{\pm} \triangleq \left\{ f \mid \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right)^2 < \frac{1}{2} \right\} \quad (1.4.45)$$

と定まる。

本章の結果は、この解の  $SNR \gg 1$  の一つの近似となっており、送信等化特性  $S_0(f)$  及び伝送帯域の決定式が近似表現となっている。

## § 5: 平均二乗誤差評価による最適系

本章では平均二乗誤差を系の最適化基準として、I-S4と同様最適解の満たすべき方程式を示し、これを解くことにより最適系(MS系)を求めらる。手法はI-S4と同一であるが本章の方が方程式系は簡単で容易に解に達することができる。

### § 5.1 方程式系

§ 4.1 の場合と同様に 図 I.4 の中継系モデルにおいて、信号、雑音の電カスペクトル密度  $M(f)$ ,  $M_i(f)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )、伝送路特性  $T_i(f)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ;  $T_0(f)=1$ )、各等化器の平均出力電力  $P_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ) が与えられた時、電力制限

$$P_k = E_{m,n} [u_k^2(t)] \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1.5.1)$$

のもとで平均二乗誤差

$$D = E_{m,n} [\{r(t) - m(t)\}^2] \quad (1.5.2)$$

を最小とするように等化特性  $s_i(f)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) を定めれば良い。この結果平均二乗誤差最小の系が得られる。

Lagrange の未定乗数  $\lambda_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ) を用いて

$$D + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k P_k \quad (1.5.3)$$

の等化器  $S_p(f)$  ( $p=0, 1, 2, \dots, m$ ) に因する変分を取ることで、最

適解の満たすべき方程式

$$\delta [D + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k P_k]_{S_p} = 0 \quad (p=0, 1, 2, \dots, m) \quad (1.5.4)$$

を得ることができ<sup>(注)</sup>。

これらの式と電力制限の式(1.5.1)と合わせて計  $(2m+1)$  個の式から、未定乗数  $\lambda_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) 及<sup>w</sup>等化特性  $S_p(f)$  ( $p=0, 1, 2, \dots, m$ ) を定めれば良い。

I-§2, §3 の結果を用いて式(1.5.4)の計算を実行し、両辺に  $S_p(f)$  を掛けて整理すると次の方程式系が得られる。この際、等化器出力端において  $SNR \gg 1$  として式(1.2.17)を用いている。

$$LP: \quad M \left\{ \left| \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=0}^m T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2 - \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=0}^m T_{\lambda} S_{\lambda} \right\} + \sum_{\lambda=1}^p \frac{W_{\lambda}}{|T_{\lambda}|^2} \left| \frac{1}{\pi} \sum_{\ell=\lambda}^m T_{\ell} S_{\ell} \right|^2 \\ + \sum_{k=p}^{m-1} \lambda_k M \left| \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=0}^k T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2 = 0 \quad (p=0, 1, 2, \dots, m) \quad (1.5.5)$$

この連立方程式には添字“p”に無関係な項が含まれている。

(注) 乗数  $\lambda_k$  の前の符号は、平均乗誤差  $D$  の最小問題であるから  $\lambda_k > 0$  とするよう、I-§4とは逆に“+”に選んである。

これを消去する為に、式の辺々引き算を行ない、「LP」-  
 「LP-1」 $\rightarrow$ 「MP」を作ると独立な式は

$$L_0: M \left\{ \left| \sum_{\lambda=0}^m T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2 - \sum_{\lambda=0}^m T_{\lambda} S_{\lambda} \right\} \\ + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k M \left| \sum_{\lambda=0}^k T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2 = 0 \quad (1.5.6)$$

$$M_P: \frac{N_P}{|T_P|^2} \left| \sum_{\lambda=P}^m T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2 = \lambda_{P-1} M \left| \sum_{\lambda=0}^{P-1} T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2 \\ (P=1, 2, \dots, n) \quad (1.5.7)$$

となる。従って  $n+1$  個の未知関数  $S_p(f)$  ( $P=0, 1, \dots, n$ )  
 についてこの連立方程式 ( $L_0, M_1 \sim M_n$ ) を解けば良い。

## § 5.2 中継器特性

送信等化特性  $S_0(f)$ , 及び受信等化特性  $S_m(f)$  を除いた中  
 継器の特性  $S_1(f) \sim S_{m-1}(f)$  は前節の式 (1.5.7) から容易に求  
 めることができる。

すなわち式 (1.5.7) (MP) の辺々割り算を行ない、

「M<sub>P+1</sub>」/「M<sub>P</sub>」 $\rightarrow$ 「NP」を作ると

$$N_P: \frac{N_{P+1}}{N_P} \frac{|T_P|^2}{|T_{P+1}|^2} \frac{1}{|T_P S_P|^2} = \frac{\lambda_P}{\lambda_{P-1}} |T_P S_P|^2 \quad (1.5.8)$$

となる。これを等化特性  $|S_p(s)|^2$  について解くと

$$|S_p|^2 = \sqrt{\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} \frac{N_{p+1}}{N_p} \frac{1}{|T_p|^2 |T_{p+1}|^2}} \quad (p=1, 2, \dots, m-1) \quad (1.5.9)$$

が得られる。これにより 中継器の振中特性の最適解が与えられる

この解は I-§4 の 相互情報量最大の系 (M工系) における中継器特性と同一である。

### § 5.3 送信等化特性

次に 送信等化特性  $S_0(s)$  を求める。

中継器特性 (式 (1.5.9)) より

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=0}^{m-1} T_i S_i \right|^2 &= |S_0|^2 \prod_{i=1}^{m-1} \sqrt{\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} \frac{N_{p+1}}{N_p} \frac{|T_p|}{|T_{p+1}|}} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_{m-1}} \frac{N_m}{N_1} \frac{|T_1|}{|T_m|}} |S_0|^2 \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

の関係が得られる。この関係を

$$M_m: N_m |S_m|^2 = \lambda_{m-1} M \left| \prod_{i=0}^{m-1} T_i S_i \right|^2 \quad (1.5.11)$$

に代入して整理すると

$$|S_m|^2 = \sqrt{\frac{\lambda_0 \lambda_{m-1}}{N_1 N_m}} M \frac{|T_1|}{|T_m|} |S_0|^2 \quad (1.5.12)$$

となる。中継器特性  $S_1(s) \sim S_{m-1}(s)$  及び受信等化特性

$S_m(s)$  の位相特性は未定であるからこれを  $\varphi_1(s) \sim \varphi_m(s)$

と表わすと、

$$S_p = \sqrt[4]{\frac{\lambda_{p-1} W_{p+1}}{\lambda_p W_p}} \sqrt[2]{\frac{1}{|T_p| |T_{p+1}|}} \exp(j\varphi_p) \quad (p=1, 2, \dots, m-1) \quad (1.5.13)$$

$$S_m = \sqrt[4]{\frac{\lambda_0 \lambda_{m-1}}{W_1 W_m}} \sqrt[2]{M \frac{|T_1|}{|T_m|}} |S_0| \exp(j\varphi_m) \quad (1.5.14)$$

となる。これらの関係から

$$\left| \prod_{\lambda=1}^k T_\lambda S_\lambda \right|^2 = \sqrt{\frac{\lambda_0 W_{k+1}}{\lambda_k W_1}} \frac{|T_1|}{|T_{k+1}|} \quad (k=1, 2, \dots, m-1) \quad (1.5.15)$$

$$\prod_{\lambda=1}^m T_\lambda S_\lambda = \sqrt{\frac{\lambda_0}{W_1}} M |T_1| |S_0| \exp \left\{ j \left( \sum_{\lambda=1}^m \varphi_\lambda + \sum_{\lambda=1}^m \arg T_\lambda \right) \right\} \quad (1.5.16)$$

を得ることが出来る。

これらの式を

$$\begin{aligned} L_0: \quad & M \left\{ \left| \prod_{\lambda=0}^m T_\lambda S_\lambda \right|^2 - \prod_{\lambda=0}^m T_\lambda S_\lambda \right\} \\ & + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k M \left| \prod_{\lambda=0}^k T_\lambda S_\lambda \right|^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

に代入して整理すると

$$|S_0|^4 \left[ \frac{\lambda_0}{W_1} M |T_1|^2 \right] + |S_0|^2 \left[ \sqrt{\frac{\lambda_0}{W_1}} |T_1| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right. \\ \left. (\text{次頁へ}) \right]$$



$$-\sqrt{\frac{\lambda_0}{N_1}} |M| |T_1| \exp \left\{ j \left( \sum_{i=0}^m \varphi_i + \sum_{i=1}^m \arg T_i \right) \right\} = 0 \quad (1.5.18)$$

但し  $\varphi_0(s) \cong \arg S_0(s)$  (1.5.19)

となる。

この式は  $|S_0|^2 = 0$  を解として持つが有意な解は

$$|S_0|^2 = \frac{\sqrt{|M|} \exp \left\{ j \left( \sum_{i=0}^m \varphi_i + \sum_{i=1}^m \arg T_i \right) \right\} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}}}{|T_{k+1}|}}{\sqrt{\frac{\lambda_0}{N_1}} |M| |T_1|} \quad (1.5.20)$$

であり、この解が意味を持つ為には

$$\sum_{i=0}^m \varphi_i + \sum_{i=1}^m \arg T_i = 0 \quad (\text{又は } 2L\pi; L: \text{整数}) \quad (1.5.21)$$

及び

$$|M| > \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right)^2 \quad (1.5.22)$$

が成立しなければならぬ。

式(1.5.21)は位相特性を選ぶことにより満たすことができる。しかし式(1.5.22)は満たされる場合も満たされない場合もあり、この式が満たされない帯域においては、

この等化特性は実現不能であるから

$$|S_0|^2 = 0 \quad (1.5.23)$$

が解となる。

すなわち

$$|S_0|^2 = \begin{cases} \frac{1}{M} \frac{1}{|T_1|} \sqrt{\frac{N_1}{\lambda_0}} \{ \sqrt{M} - N_e \} & M > N_e^2 \\ 0 & M \leq N_e^2 \end{cases}$$

(1.5.24)

但し  $N_e \triangleq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}}}{|T_{k+1}|}$

(1.5.25)

である。<sup>(注)</sup>

#### §5.4 受信等化特性

受信等化特性  $S_m(f)$  は 前節の式 (1.5.12) に式

(1.5.24) を代入することにより

$$|S_m|^2 = \begin{cases} \frac{1}{|T_m|} \sqrt{\frac{\lambda_{m-1}}{N_m}} \{ \sqrt{M} - N_e \} & M > N_e^2 \\ 0 & M \leq N_e^2 \end{cases}$$

(1.5.26)

と得ることができる。<sup>(注)</sup>

(注) 送信等化特性  $S_0(f)$  の導出の過程からわかるように、

$M > N_e^2$  が伝送帯域を表わしている。

## §5.5 最適系

前節までで、平均乗誤差評価のもとで各等化器の最適解が定まった。この解も I-§4 と同様に  $SNR \gg 1$  の条件のもとで解かれている。しかし I-§4 の場合と異なり本章では、平均電力制限について式(1.2.17)が

$$\begin{aligned}
 P_k &= \int_{-\infty}^{\infty} M(f) W_0(f) W_0^*(f) df \\
 &+ \sum_{i=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} M_i(f) W_i(f) W_i^*(f) df \\
 &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} M(f) W_0(f) W_0^*(f) df \\
 &\quad (k=0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (1.5.27)
 \end{aligned}$$

と近似する際に  $SNR \gg 1$  の条件を用いているのみで、解の導出の過程では  $SNR \gg 1$  を用いていない。

すなわち、上式の近似は各等化器出力の中に含まれる雑音電力が充分小さいことを仮定しているのみで、帯域内のある周波数で  $SNR \simeq 1$  であっても伝送帯域全体を総合した  $SNR$  が大であれば成立する。

従って I-§4 の解では伝送帯域の端末付近で  $SNR \simeq 1$  となると解に誤差が生じ、正確な解は III-§7

の定理に依る必要があるが、本章の解はこのような部分でも正しい解を与える。  $SNR \gg 1$  として式(1.5.27)の近似を用いた影響は解の中に含まれる未定乗数  $\lambda_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) がわずかに変化するのみで(向題に存する)。

伝送帯域  $\Omega_s$  は、送受信等化器  $S_0(f), S_m(f)$  が解を持つ領域と存するから I-§5.3, §5.4 より

$$IM \geq \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right)^2 \triangleq Ne^2 \quad (1.5.28)$$

を満足する領域である(図 I-9)。

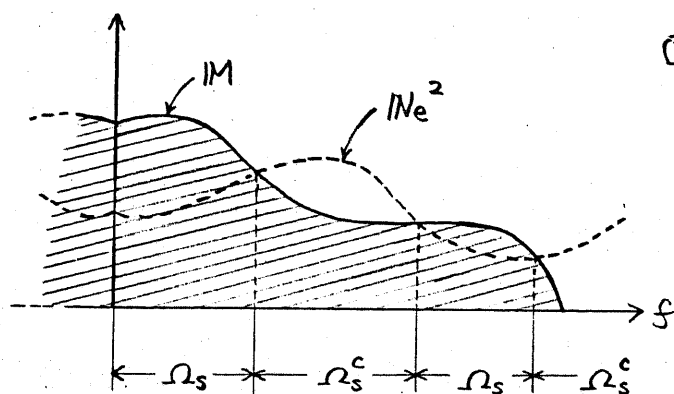


図 I-9

電カスベクトル密度の例

この時 中継器特性  $S_1(f) \sim S_{m-1}(f)$  は阻止域  $\Omega_s^c$  で零に存する。これは  $SNR \gg 1$  として式(1.5.27)の近似を用いた影響であるが、送受信等化特性  $S_0(f), S_m(f)$

からわかるように、もともと阻止域に信号電力は存在せず、この帯域には中継段で相加した雑音が存在するのみであるから、不当に伝送帯域を広くしない限り、中継器でこの帯域を遮断するか否かは単にその中継器の未定乗数  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) がわずかに変化するのみで問題にならない。

正確には、中継器の伝送帯域を送受信等化器  $S_0(f)$ ,  $S_n(f)$  の伝送帯域に合わせておけば良い。

得られた最適系 (MS系) をまとめて次式に示す。伝送帯域  $\Omega_s$

で

$$|S_0|^2 = \frac{1}{M} \frac{1}{|T_1|} \sqrt{\frac{N_1}{\lambda_0}} (\sqrt{M} - N_e) \quad (1.5.29)$$

$$|S_p|^2 = \frac{1}{|T_p|} \sqrt{\frac{\lambda_{p-1} N_{p+1}}{\lambda_p N_p}} \frac{1}{|T_{p+1}|} \quad (p=1, 2, \dots, n-1) \quad (1.5.30)$$

$$|S_n|^2 = \frac{1}{|T_n|} \sqrt{\frac{\lambda_{n-1}}{N_n}} (\sqrt{M} - N_e) \quad (1.5.31)$$

阻止域  $\Omega_s^c$  ですべて零。

この時伝送帯域は次式で定まる (図 I-9)。

$$\Omega_s \cong \{ f \mid M > N_e^2 \} \quad (1.5.32)$$

但し :

$$N_e \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}}}{|T_{k+1}|}$$

(1.5.33)

である。

## § 6: 最適系の機能構造

相互情報量及び平均二乗誤差を評価基準とした最適系がそれぞれ I-§4, §5 で明らかになった。本章ではこれらの最適系を相互に比較しつつ、その構造と物理的意味を明らかにする。

### § 6.1 位相特性

相互情報量最大の系 (MI系) は、各等化器の振幅特性が規定されるのみで、その位相特性は全く自由である。

一方、平均二乗誤差最小の系 (MS系) では、各等化器及び伝送路の特性を含めた位相特性が

$$\varphi_n = -\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i + \sum_{j=1}^m \arg T_{ij}\right) \quad (1.6.1)$$

を満足する必要がある。

この式は、中継系の入力端から出力端までの総合伝達関数の位相回転が零 ( $2L\pi$  の自由度を持つ;  $L$ : 整数) となる事を要求している。

すなわち、雑音相互及び信号と雑音の間に相関の

無い中継系においては、各信号の相加は電カスペクトルの相加となり相互の位相関係は無関係である。また出力に含まれる雑音の位相成分は評価基準に何ら影響を及ぼさず、出力に含まれる情報信号の位相成分のみが平均二乗誤差に影響を及ぼす。従って、この場合には最適解は出力信号と情報信号の間の位相関係のみを規定することになる。

いわば、平均二乗誤差最小の系(MS系)では各段の等化器の位相特性は全く任意で、最終段又はいずれか一つの等化器の位相特性が式(1.6.1)を満足するように決定されれば良いことになる。相互情報量最大の系(MI系)では、出力信号と情報信号の間の位相関係は任意である。この評価基準が可逆な線型変換に対して不変であることを考え合わせれば、雑音相互及び雑音と信号の間に相関の無い中継系において位相特性が全く任意となることは容易に理解できる。

以下の節では各最適系の振中特性について検討を加える。



## § 6.2 中継器の構造

相互情報量最大の系(MI系), 平均=乗誤差最小の系(MS系)の

いずれにおいても, 中継器の特性は

$$|S_p|^2 = \sqrt{\frac{\lambda_{p-1} N_{p+1}}{\lambda_p N_p}} \frac{1}{|T_p| |T_{p+1}|} \quad (p=1, 2, \dots, m-1) \quad (1.6.2)$$

である。この式を

$$|S_p|^2 = \frac{1}{|T_p|} \sqrt{\frac{\lambda_{p-1}}{N_p}} \times \sqrt{\frac{N_{p+1}}{\lambda_p}} \frac{1}{|T_{p+1}|} \quad (p=1, 2, \dots, m-1) \quad (1.6.3)$$

と変形し, 中継器特性を前後に分離して考える。

後半は この中継器に後置される伝送路  $T_{p+1}(f)$  による減衰  $|T_{p+1}(f)|^2$  の  $1/2$  をあらかじめ補償し, 更にこの伝送路で相加する雑音  $n_{p+1}(t)$  の電カスノクトル密度  $N_{p+1}(f)$  に応じた荷重  $\sqrt{N_{p+1}/\lambda_p}$  を掛けて送受する機能を持っている。

一方, 前半部は この中継器に前置された伝送路  $T_p(f)$  による減衰  $|T_p(f)|^2$  のうち, 前段の中継器で補償された残りの  $1/2$  を補償し, 更に前段の中継器で加えられた荷重を逆変換により取り除く機能を持っている。

すなわち、伝送路  $T_P(s)$  に前置された中継器  $S_{P-1}(s)$  の後半部と伝送路  $T_P(s)$  及び後置された中継器  $S_P(s)$  の前半部により“中継単位”が構成されている(図I.10)。

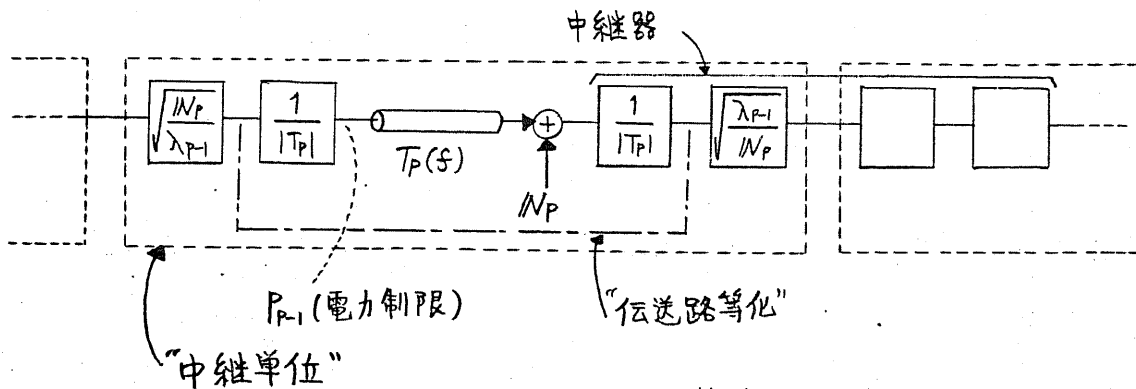


図 I.10 中継単位

この“中継単位”内では電力制限  $P_{P-1}$  のもとで、その段で相加する雑音の電カスパーリトル密度  $N_P(f)$  に応じた荷重を掛けた後、伝送路の減衰  $|T_P(f)|^2$  の  $1/2$  をあらかじめ等化して送出する。信号は伝送路通過後残りの減衰の等化が行われ、更に荷重の逆変換を行なって出力される。

この結果 中継単位の入力端から出力端へ信号は伝達関数“1”で伝えられ、その中継単位内で相加した雑音が新たに増加することになる。

いわば 中継単位の機能は与えられた電力制限の

もとで、伝達関数を“1”に保ちつつ新たに相加する雑音を最小にする等化を行なうことにあると云える。

従って、中継器特性は他の中継段の特性及び“情報信号のスペクトル密度に依存せず”その段の伝送路、雑音特性及び電力制限によって決定される。

この“中継単位”の構成は I-§4, §5 の結果からわかるように平均二乗誤差最小の系 (MS系) に限らず、相互情報量最大の系 (MI系) にも共通して云える。

尚 ④ I.10 で一点鎖線で区切った部分は伝送路とその等化部分であるから、各中継器における情報信号に対する処理は  $\sqrt{\lambda_{P1}/N_P} \times \sqrt{W_{P+1}/\lambda_P}$  であるとも云える。

### § 6.3 送信等化器の構造

次に送信等化特性  $S_0(s)$  を調べる。

平均二乗誤差最小の系 (MS系) の送信等化特性は次式の形に分解できる。

$$|S_0|^2 = \frac{1}{M} \times \left[ \sqrt{M} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right] \times \sqrt{\frac{W_1}{\lambda_0}} \frac{1}{|T_1|} \quad (1.6.4)$$

一方、相互情報量最大の系(MI系)の送信等化特性も同様に次式(注1)の形に分解できる。

$$|S_0|^2 = \frac{1}{M} \times \left[ \frac{1}{2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right] \times \sqrt{\frac{M_1}{\lambda_0}} \frac{1}{|T_1|} \quad (1.6.5)$$

ここで式(1.6.3)の中継器特性あるいは図I-10の中継単位の構成を考え合わせると、上記=式の最終項

$$\sqrt{\frac{M_1}{\lambda_0}} \frac{1}{|T_1|}$$

は、中継器機能とみなされ、第1段目の“中継単位”の一部と考えべきものであることがわかる。一方第1項目は情報源白色化の為の項である。平均=乗誤差最小の系(MS系)の残った第2項

$$\sqrt{W_s} \cong \sqrt{M} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \quad (1.6.6)$$

は、後に続く“中継単位” $n$ 段の縦続接続で構成される“伝送路系”(注2)と白色化された情報信号の整合の為の1つは

(注1) III-87 から得られる正確な解、式(1.4.43)を用いた。

(注2) I-87.1 で詳しく述べる。

“システム等化項”  $\sqrt{W_S(s)}$  とでも呼ぶべきものとなっている。

すなわち 平均 = 乗設差最小の系 (MS系) の送信等化特性  $S_o(s)$  は、  
 情報源符号化とも云うべき 白色化フィルタ、第0段目の中継器とみなすべき雑音電力スペクトル密度  $W_1(s)$  に応じた荷重項と伝送路等化項、及び白色化された信号と等価伝送路とも云うべき “伝送路系” の整合の為の荷重項 (システム等化項) から構成されている (図 I. 11)。

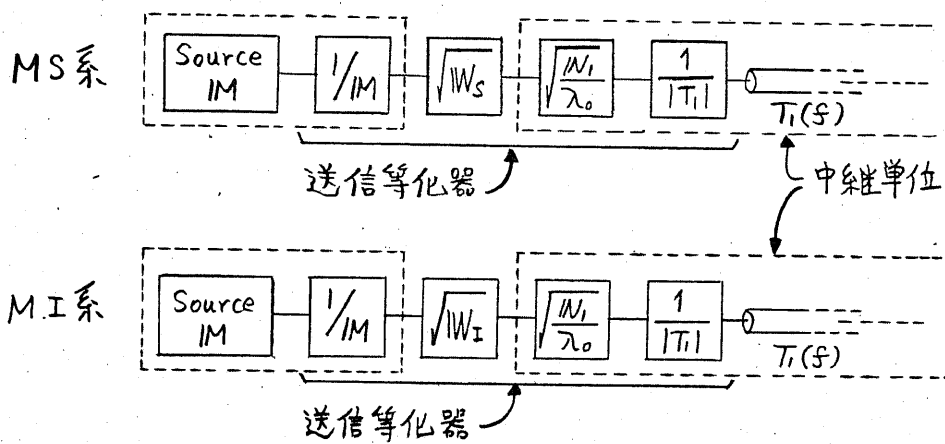


図 I. 11 送信等化器の構造

一方、相互情報量最大の系 (MI系) の送信等化特性も同様に解釈される。この時 “システム等化項”  $\sqrt{W_I}$  は次式となる。

$$\sqrt{W_I} \triangleq \frac{1}{2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \quad (1.6.7)$$

## § 6.4. 受信等化器の構造

次に受信等化特性  $S_m(f)$  を調べる。

相互情報量最大の系 (MI系) では受信等化特性  $S_m(f)$  は一意に定まらな

平均二乗誤差最小の系 (MS系) の受信等化特性  $S_m(f)$  は送信等化特性  $S_o(f)$  の場合と同様に次式のように分解される。

$$|S_m|^2 = \frac{1}{|T_m|} \sqrt{\frac{\lambda_{n-1}}{N_m}} \times \left[ \sqrt{M} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right] \quad (1.6.8)$$

各項は、第  $n$  段目の中継器とも云うべき項

$$\frac{1}{|T_m|} \sqrt{\frac{\lambda_{n-1}}{N_m}}$$

と、"伝送路系"の総合特性に対する"システム等化項"  $\sqrt{W_s(f)}$  からなっている (図 I.12)。

一方 相互情報量最大の系 (MI系) の最終段の中継器

$S_{m-1}(f)$  は 第  $n-1$  段目の"中継単位"に含まれる項と 残りの項

$$\frac{1}{|T_m|} \sqrt{\frac{N_m}{\lambda_{n-1}}} \quad (1.6.9)$$

に分解される。

受信等化器  $S_m(f)$  が任意であるから、この中継器  $S_{m-1}(f)$  以後に等化機能は何かおかれていない。従って式(1.6.9)の項は最終段の伝送路  $T_m(f)$  で相加する雑音  $N_m(f)$  に対する送信等化項とみることできる。しかし、受信等化器  $S_m(f)$  が任意関数であることを利用すると

$$|S_m(f)|^2 \cong \frac{1}{|T_m|} \sqrt{\frac{\lambda_{m-1}}{N_m}} \times |S'_m(f)|^2 \quad (1.6.10)$$

$S'_m(f)$ : 伝送帯域  $\Omega_E$  内で非零の任意関数

と定義することができ、この仮想的な項と式(1.6.9)により最終段の“中継単位”を構成することができ、次章にみるように解釈上都合が良い(図 I.12)。

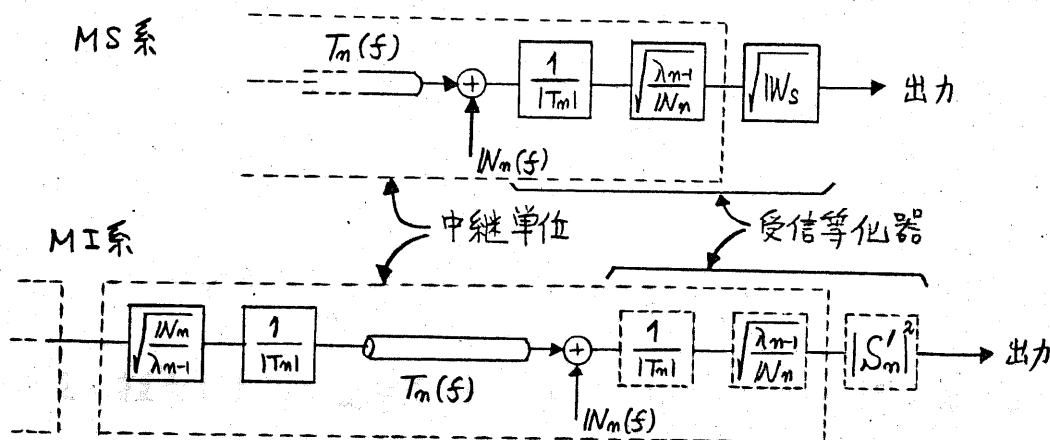


図 I.12 受信等化器の構造

§ 6.5 系の構成

ここまでに検討した、相互情報量最大の系(MI系)及び平均乗誤差最小の系(MS系)の最適解り構造を図I-13にまとめる。

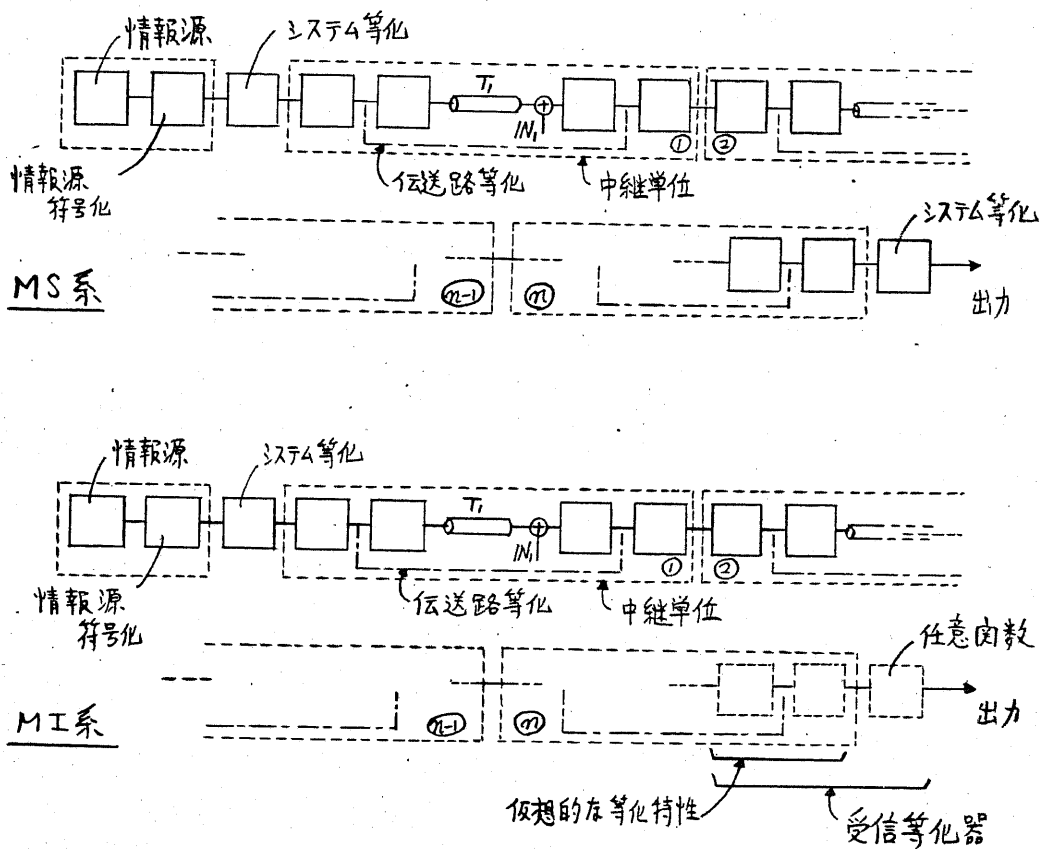


図 I-13 系の構成

“中継単位” (破線内) は 伝送路等化 (一点鎖線内) と各段の雑音に対する送受信等化からなっている。この構成は 2つの最適系 (MI系, MS系) に共通である。この中継単位を



$n$  段多段接続して得られる“伝送路系”は、いわば情報の性質に無関係に与えられた電力制限と伝送路のもとで総合伝達効率を部分的に最適化したものと考えられる。

平均二乗誤差最小の系(MS系)では、情報源の信号を白色化した後、この情報信号に“伝送路系”で加わる等価雑音に依じた荷重を掛けて伝送している。この荷重、すなわちシステム等化項は、“伝送路系”を一つの無損失伝送路とみなすと、この無損失伝送路に対する送信等化、受信等化となっていることがわかる。

要約すると、平均二乗誤差最小の系では、伝送路と雑音で決まり、情報に無関係な最適解である“伝送路系”を構成し、一方では情報信号を白色化し相関を取り除いた信号を作り、この両者の整合を“伝送路系”の前後に置かれたシステム等化器が受け持つ構成になっていることがわかる。この時、情報信号の白色化処理の逆処理はシステム等化器が受け持っている。

一方、MI系では、最終段で加わる雑音に対して受信等化が意味を持たない為、この雑音に対しては送信等化のみが行なわれる。従って、第 $n-1$ 段目までの“中継単位”

で“伝送路系”が構成され、最終段は“中継単位”を構成して  
 いると見ることが出来る。しかし、受信等化器  $S_m(f)$  の任意  
 性を用いると、I-864 で述べたように最終段の“中継単位”を  
 完成することができ、 $n$  段の中継単位からなる“伝送路系”  
 が構成されていると考えることができる。この“伝送路系”  
 の前に、平均二乗誤差最小の系(MS系)と同様に、情報を  
 この“伝送路系”に整合する為の“システム等化器”  $\sqrt{W_1(f)}$  が置  
 かれる。

尚 相互情報量最大の系(MI系)の受信等化特性  
 $S_m(f)$  は、相互情報量評価のもとでは任意であるから、  
 他の評価基準から決定することが出来る。

又、システム等化特性は、平均二乗誤差最小の系  
 (MS系)では、情報信号の電カスペクトル密度と雑音の電カ  
 スペクトル密度で決まる荷重関数となっているのに対して、  
 相互情報量最大の系(MI系)では雑音の電カスペクトル  
 密度のみで決まる関数となっている。これは、相  
 互情報量最大の系(MI系)では、その評価基準の性質から

情報信号を白色化した後は系の構成が雑音のみに依存することによる。従って、平均二乗誤差最小の系(MS系)では“伝送路系”のみが情報信号の電力スペクトル密度に無関係であるが、相互情報量最大の系(MI系)では、情報信号の白色化の為の情報源符号化部分のみが情報信号スペクトルに依存し、他の部分は任意の情報信号スペクトルに対して不変である。

## §7: 最適系の等価変換

前章までに検討してきた 2つの最適系 (MI系, MS系) の等価変換を行なう。これにより 各部の機能構成あるいは 等価伝送路としての "伝送路系" の意味を明確にすると共に、中継機能を持たない系との対応関係も明らかにする。

### §7.1 等価伝送路 (伝送路系)

相互情報量最大の系 (MI系) 及び平均二乗誤差最小の系 (MS系) と云う 2つの最適系において 中継機能が 図 I.14 (a) に示される 中継単位の 多段連続接続で構成されていることは I-§6.2, §6.5 で触れた。

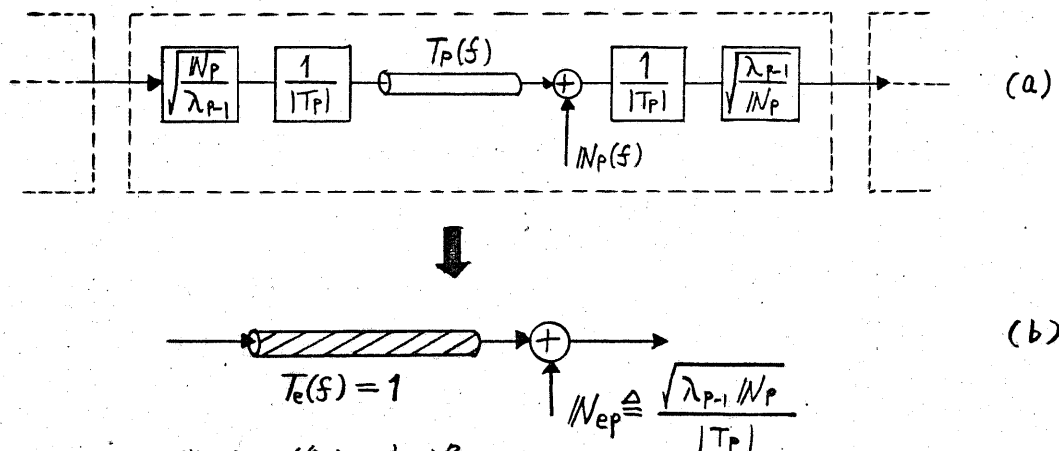


図 I.14 中継単位の等価変換

中継単位は 雑音相加点を移動することにより 同図 (b) に示すような、電カスハクトル密度

$$N_{eP} \cong \frac{\sqrt{\lambda_{P-1} N_P}}{|T_P|} \quad (1.7.1)$$

の雑音の相加する 無損失伝送路  $T_e(f) = 1$  と等価であることがわかる。

逆に云えば、中継器機能とは、最適化の結果として、等化により 現実の伝送路を この無損失伝送路に変換することであるとも云える。

この中継単位を  $k$  段 縦続に接続した“伝送路系” 図 I-15

(a) は、各雑音相加点を移動することにより 同図 (b) に示

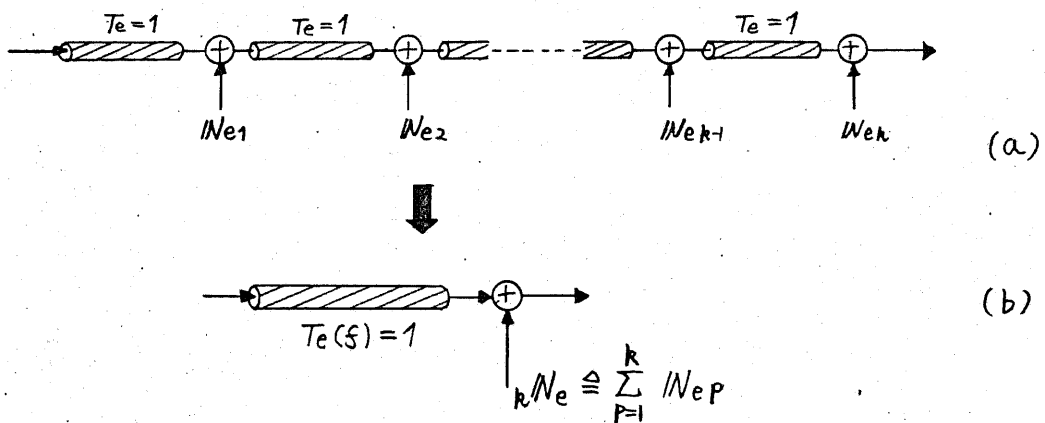


図 I-15 “伝送路系”

すような電カスペクトル密度

$$\begin{aligned} k N_e &\triangleq \sum_{p=1}^k N_{ep} = \sum_{p=0}^{k-1} N_{ep+1} \\ &= \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\sqrt{\lambda_p N_{p+1}}}{|T_{p+1}|} \end{aligned} \quad (17.2)$$

の雑音の相加する無損失伝送路と等価である。

すなわち“伝送路系”は情報信号の電カスペクトル密度  $M(f)$  あるいは系の最適化の為の二つの評価基準に依存せず、各段の伝送路、雑音の特性と平均電力制限により一意に決まる。いわば“最適な無損失等価伝送路”と云うべきものであることがわかる。

## § 7.2 相互情報量最大の系の等価構成

無損失等価伝送路としての“伝送路系”の表現を用いると図 I-13 で示される相互情報量最大の系 (MI系) は、送信等化器  $S_0(f)$  の一部及び中継器  $S_1(f) \sim S_{m-1}(f)$  及び、I-§ 6.4 で設定した受信等化器  $S_m(f)$  の内部の仮想的等化項により  $n$  段の中継単位からなる“伝送路系”が構成されてゐること

がわかる。

従って 相互情報量最大の系 (MI系) は 図 I.16 の系に等価  
変換される。

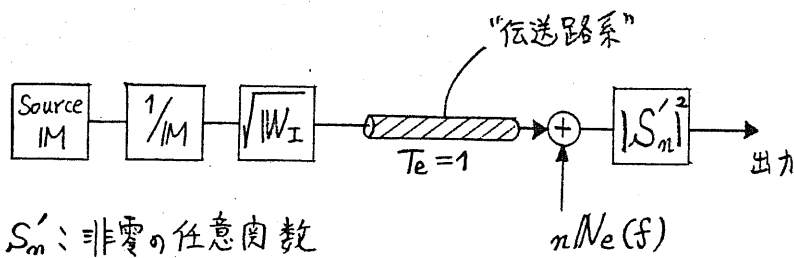


図 I.16 相互情報量最大の系

この系において “伝送路系”  $T_e(s)$  の部分は、外部の特性  
や条件の変化に対して不変で、その内部構造すなわち“中継  
単位”は局所的に他の部分と独立に定まっており、与えられた  
伝送路として扱うことができる。

すなわち、相互情報量最大の系 (MI系) は “伝送路系”、  
及び “この無損失等価伝送路で相加する雑音  $n/N_e(f)$  に応じて  
情報信号に荷重を掛ける “システム等化項”  $\sqrt{W_I(f)}$ 、及び “情報源の  
白色化の為の項” の 3つの機能から成り立っていることがわかる。

尚

$$\sqrt{W_I} = \frac{1}{n/N_e} - n/N_e \quad (1.7.3)$$

である。

### §7.3 平均=乗誤差最小の系の等価構成

平均=乗誤差最小の系は 送信等化器  $S_0(f)$  の一部、及び中継器  $S_1(f) \sim S_{m-1}(f)$  及び受信等化器  $S_m(f)$  の一部で  $m$  級の“中継単位”からなる“伝送路系”を構成していることがわかる。

従って、平均=乗誤差最小の系 (MS系) の等価系として 図 I.17 の系を得ることができる。

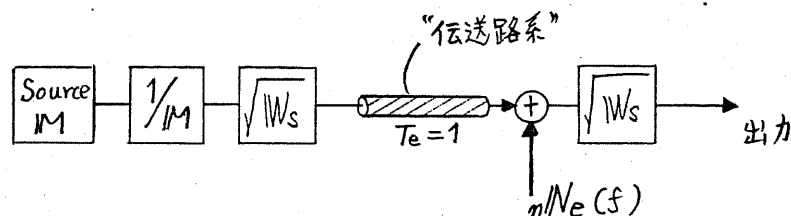


図 I.17 平均=乗誤差最小の系

この系は 無損失等価伝送路である“伝送路系”と白色化された信号との整合の為の“システム等化項”

$$\sqrt{W_s} = \sqrt{M} - n/N_e \quad (1.7.4)$$

が“伝送路系”の前後に置かれた構成になっている。これは、平均=乗誤差評価の場合一度白色化された情報信号の電カスペクトル密度を、系の出力信号とする時点で、もとの情報信号の電カスペクトル密度に近い形に戻すことが要請



されることに依る。この白色化の逆処理は 2つの“システム等化項”  $\sqrt{W_s(f)}$  が分担して受け持っている。

#### §7.4 中継機能を持たない系との対応

本節では、前節までに明らかとなった多段中継系の最適系である相互情報量最大の系 (MI系) 及び平均二乗誤差最小の系 (MS系) の等価系 (図 I.16, 17) と、中継機能を持たない 1段の系 (図 I.2) の最適系を比較し中継段が加わることによる最適系の変化を検討する。

中継の無い 1段の系 (図 I.18(a)) を平均二乗誤差により最

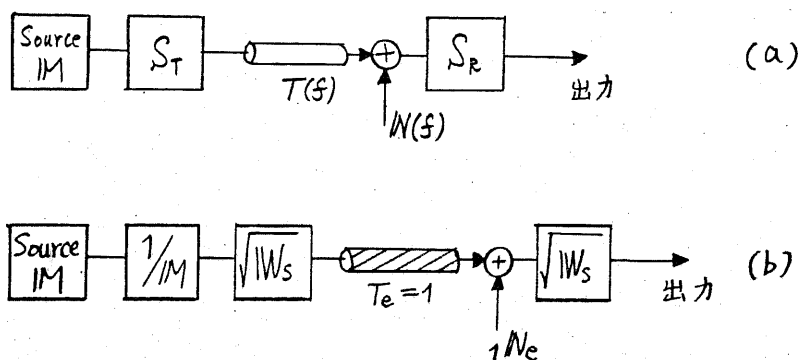


図 I.18 平均二乗誤差最小の系

適化を行なった解は、平均出力電力  $P_T$  により決まる未定乗数を  $\lambda$  として、伝送帯域内で

$$|S_T|^2 = \frac{1}{M} \left( \sqrt{M} - \frac{\sqrt{\lambda N}}{|T|} \right) \sqrt{\frac{N}{\lambda}} \frac{1}{|T|} \quad (1.7.5)$$

$$|S_R|^2 = \frac{1}{|T|} \left( \sqrt{M} - \frac{\sqrt{\lambda N}}{|T|} \right) \quad (1.7.6)$$

となる。ここで

$$\frac{\sqrt{\lambda N}}{|T|} = 1/N_e \quad (1.7.7)$$

の対応関係に注意して、“中継単位”の概念を用いて解(式(1.7.5), (1.7.6))を書きかえると 図 I.18(b) となる。

この時

$$\sqrt{W_s} = \sqrt{M} - 1/N_e \quad (1.7.8)$$

である。

この系と 多段の最適系 (MS系 図 I.17) を比較すると、両者の違いは、“伝送路系”が 多段の“中継単位”により構成されているか あるいは 1段で構成されているかの違いがあるのみで、多段の系は 一段の系を単に拡張した構造となっており、この際“伝送路系”が両者を結び 共通の概念となっていることがわかる。

又、この時 “システム等化項”  $\sqrt{W_s(f)}$  に含まれる雑

音項 (多段系では  $nN_e = \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{\lambda_k N_{k+1}} / |T_{k+1}|$ , 一段の系では  $N_e = \sqrt{\lambda N} / |T|$ ) は、この“伝送路系”の等価雑音に対応している。

“システム等化項”  $\sqrt{|W_s(f)|}$  が各段で相加する雑音の影響を一括して、“伝送路系”の等価雑音の形で含んでいる事実は、最適系が“伝送路系”と“システム等化項”及び情報源白色化の為の項の3つの機能で構成されているとする解釈の一つの裏づけとなっている。

一方、中継の無い一段の系(図 I-18(a))を相互情報量評価により最適化すると伝送帯域内で次式となる。

$$|S_T|^2 = \frac{1}{2\lambda} - \frac{N}{|T|^2} \quad (1.2.9)$$

但し、受信等化器  $S_R(f)$  は伝送帯域内で非零であれば任意であり、 $\lambda$  は電力制限で決まる未定乗数である。

この系(図 I-19(a))を多段の中継系の最適解(MI系)と対比して考えると、多段の系の最終段のみで構成された系に対応している。

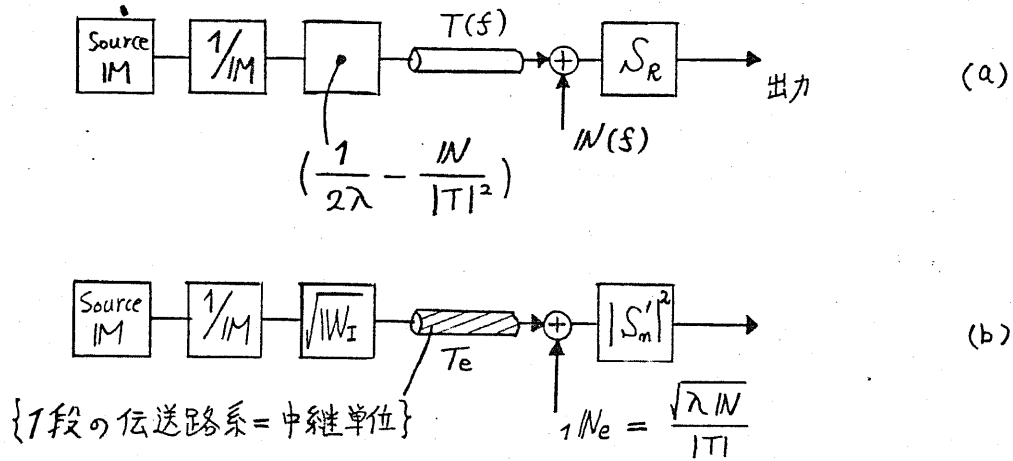


図 I.19 相互情報量最大の系

そこで、“中継単位”の概念を導入して

$$|S_T|^2 = \frac{1}{M} \left( \frac{1}{2 \frac{\sqrt{\lambda N}}{|T|}} - \frac{\sqrt{\lambda N}}{|T|} \right) \sqrt{\frac{N}{\lambda}} \frac{1}{|T|}$$

$$\triangleq \frac{1}{M} \cdot \sqrt{W_I} \cdot \sqrt{\frac{N}{\lambda}} \frac{1}{|T|} \quad (1.7.10)$$

と送信等化特性  $S_T(s)$  を分解し、一方受信等化器  $S_R(s)$  の任意性を用いて I-§6.4, §6.5 と同様に仮想等化項を設定すると任意関数  $S'_R(s)$  (伝送帯域内で非零) を用いて 図 I.19 (b) のように書きかえることができる。

従って 一般の系と多段の系の相異は、平均 = 乗誤差  
最小の系 (MS系) の場合と同様、“伝送路系”を構成して113

“中継単位”が一段か多段かの違いに帰着する。 “システム  
 等化項”  $\sqrt{W_E(f)}$  についてもこれを規定している肉数  $nN_e(f)$   
 又は  $nN_e(f)$  は伝送路系の等価雑音に対応し、いわば  
 “伝送路系”を一つの等価伝送路とみなして、この等価伝送  
 路と白色化された情報信号の整合の為の等化機能を“システム  
 等化項”

$$\sqrt{W_E} = \frac{1}{2nN_e} - nN_e \quad (1.7.11)$$

但し  $n$  は系の中継段数。

が果していることがわかる。

尚一段の系の場合 式(1.7.9) (図 I.19(a)) の特性から、

雑音と信号の電カスペクトル密度の総和が、電力制限を行なう  
 等化器出力端で白色 ( $1/2\lambda$ ) となるような等化特性が最適であ  
 る (図 I.20) という解釈が良く行なわれる。

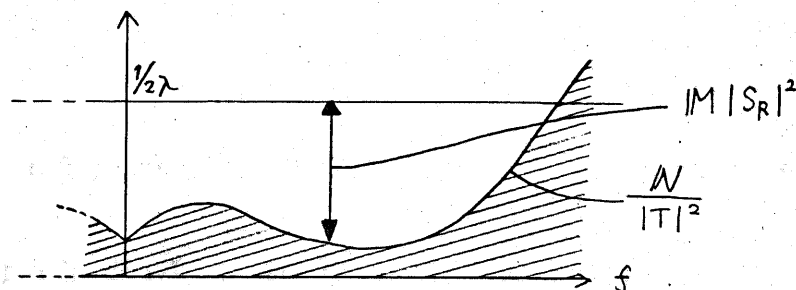


図 I.20 最適等化特性の解釈 (I)

しかしこの解釈は一段の系に対してのみ通用する概念である。  
 図 I.19(b) で示した多段系へ拡張し得る系の機能構造からは、<sup>□</sup> 等価伝送路である“伝送路系”の出力端に電カスパクトルの総和が  $1/\{2 \cdot m N_e\}$  ( $m$  は系の中継段数) となるような等化特性が最適である (図 I.21) <sup>□</sup> と表現するのが正しい解釈であることがわかる。<sup>(注)</sup> これに依れば“伝送路系”の等価雑音  $k N_e(f)$  と云う共通の概念で系の最適性が表現される。

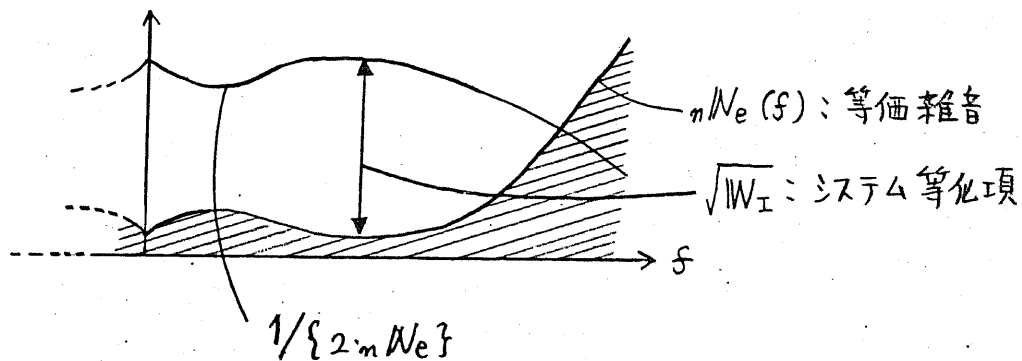


図 I.21 最適等化特性の解釈 (II)

(注) 一段の系の場合送信等化器  $S_o(f)$  の中継器機能である等化

特性  $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{W}{\lambda}}$  と  $1/\{2 \cdot n N_e\} = 1/\{2 \lambda \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{W}{\lambda}}\}$  が相殺

し  $\frac{1}{2\lambda}$  となり上記の解釈が生じる。もちろん多段の系

ではこのような単純な相殺の関係は生じない。

## § 8: 最適系の特性

本章では 相互情報量最大の系(MI系)、平均二乗誤差最小の系(MS系)の総合特性を検討し、数値例と合わせて両最適系の特性比較を行なう。この際 相互情報量最大の系(MI系)で一意に定めることのできなかった受信等化器  $S_m(f)$  の平均二乗誤差による最適化を行なっている。

### § 8.1 出力 SNR

図 I.16, 17 から 出力信号に含まれる 信号成分及び雑音成分の電カスペクトル密度  $Q(f)$ ,  $N_T(f)$  を両最適系について計算すると それぞれ

$$\begin{aligned} \text{(MI系)} \quad Q(f) &= M \cdot \frac{1}{M} \cdot \sqrt{W_I} |Te|^2 |S_m'|^2 \\ &= \sqrt{W_I} |S_m'|^2 \end{aligned} \quad (1.8.1)$$

$$N_T(f) = n N_e(f) |S_m'|^2 \quad (1.8.2)$$

$$\begin{aligned} \text{(MS系)} \quad Q(f) &= M \cdot \frac{1}{M} \sqrt{W_s} |Te|^2 \sqrt{W_s} \\ &= W_s \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

$$N_T(f) = n N_e(f) \sqrt{W_s} \quad (1.8.4)$$

となる。従って、それぞれの系の出力 SNR は

$$(MI系) \quad SNR_I = \frac{\sqrt{W_I}}{n/N_e} \quad (1.8.5)$$

$$(MS系) \quad SNR_S = \frac{\sqrt{W_s}}{n/N_e} \quad (1.8.6)$$

と表わせる。

尚 評価基準として SNR を用いて系を最適化するこ

ともできる。一例として 正規化条件

$$\prod_{\lambda=0}^m T_\lambda S_\lambda = 1 \quad (1.8.7)$$

のもとで、このような最適化を行なう場合を考えると、I-8.5と

同様にして SNR 最大の系を求めることができる。この際

条件式 L0 (式 (1.5.5)) の代わりに 正規化条件 (式 (1.8.7)) を

用いれば良い。その結果は、平均二乗誤差最小の系

(MS系) において “システム等化項”  $\sqrt{W_s(f)}$  を

$$\sqrt{1M} - n/N_e \longrightarrow \sqrt{1M} \quad (1.8.8)$$

と置きかえれば良く SNR  $\gg 1$  の場合には、平均二



乗誤差最小の系(MS系)と特性上も構造上も大差ない。

## § 8.2 相互情報量

2つの最適系(MI系, MS系)の相互情報量を算出する。  
 図 I-4 のアナログ中継系モデルの入出力端末間の相互情報量は 出力信号及びそれに含まれる雑音の電力スペクトル密度をそれぞれ  $R(f)$ ,  $N_T(f)$  として

$$I(r, m) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\log R - \log N_T) df \quad (1.8.9)$$

と表わせば<sup>(註)</sup>

### § 8.2.1 MI系の相互情報量

図 I-16 の相互情報量最大の系(MI系)について 出力信号の電力スペクトル密度  $R(f)$  は 式(1.8.1), (1.8.2) より

$$R = |S_m|^2 (\sqrt{W_I} + n/N_e) \quad (1.8.10)$$

となる。従って 式(1.8.2), (1.8.10) を式(1.8.9)に代入すると

伝送帯域  $\Omega_I$  を用いて、MI系の相互情報量は

(註) I-§ 3.2 参照

$$\begin{aligned}
 I_I &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_I} \log \left( 1 + \frac{\sqrt{W_I}}{nN_e} \right) d\mathcal{F} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_I} \log \left( \frac{1}{2 \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_R W_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right)^2} \right) d\mathcal{F} \quad (1.8.11)
 \end{aligned}$$

と表わされること<sup>(註)</sup>がわかる。

### § 8.2.2 MS系の相互情報量

相互情報量最大の系の場合と同様にして、出力信号の電力スペクトル密度  $R(\mathcal{F})$  は 式(1.8.3), (1.8.4)より

$$R = W_s + nN_e \sqrt{W_s} \quad (1.8.12)$$

となる。従って 式(1.8.12), (1.8.4) を式(1.8.9)に代入すると 伝送帯

域  $\Omega_s$  を用いて、平均二乗誤差最小の系(MS系, 図 I.17)の相互

情報量は

$$\begin{aligned}
 I_s &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \log \left( 1 + \frac{\sqrt{W_s}}{nN_e} \right) d\mathcal{F} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \log \left( \frac{\sqrt{M}}{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_R W_{k+1}}}{|T_{k+1}|}} \right) d\mathcal{F} \quad (1.8.13)
 \end{aligned}$$

と表わされる。<sup>(註)</sup>

---

(註) 式(1.6.6), (1.6.7), (1.7.2) を代入して整理した。

## § 8.3 平均 = 乗誤差

両最適系の平均 = 乗誤差  $D$  は、系の出力信号  $r(t)$  と情報信号  $m(t)$  により

$$D = E_{mm} \{ [r(t) - m(t)]^2 \} \quad (1.8.14)$$

と表わされ、図 I.4 の アナログ中継系のモデルについて計算す

ると、周波数領域で

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} |M|^2 \left| \prod_{i=0}^m T_i S_i - 1 \right|^2 df + \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_i}{|T_i|^2} \left| \prod_{l=i}^m T_l S_l \right|^2 df \quad (1.8.15)$$

と表わすことができる。<sup>(注)</sup>

§ 8.3.1 MI系の平均 = 乗誤差

相互情報量最大の系 (MI系, 図 I.16) の受信等化器

$S_m(f)$  の特性は 伝送帯域内で

$$S_m(f) \neq 0 \quad (1.8.16)$$

を満足すれば、任意に選んでも系の相互情報量に無関係で

ある。従って、相互情報量最大の系 (MI系) の平均 = 乗

誤差の算出に先立って、受信等化特性  $S_m(f)$  を、出力信

(注) I-§ 3.4 参照

号の平均乗誤差が最小となるように決定する。

図 I-16 の等価系で扱い  $S'_m(f)$  を最適化する。

等化特性  $S'_m(f)$  は

$$S'_m(f) = |S'_m(f)| \cdot \exp(j\varphi_m(f)) \quad (1.8.17)$$

と、振幅成分と位相成分に分離して表現できる。<sup>(注)</sup>

平均乗誤差  $D$  (式(1.8.15)) の内、各伝送路で相加する雑音による成分 (式(1.8.15) の第2項) は、図 I-16 から

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_i}{|T_i|^2} \left| \prod_{l=1}^m T_l S_l \right|^2 df \\ = \int_{\Omega_I} n N_e |S'_m|^2 df \end{aligned} \quad (1.8.18)$$

となり、等化器  $S'_m(f)$  の位相特性  $\varphi_m(f)$  には無関係である。

従って 位相特性  $\varphi_m(f)$  は 平均乗誤差  $D$  の内 情報信号の歪による成分 (式(1.8.15) の第1項) を最小にするように選ぶがよい。すなわち 平均乗誤差最小の系 (MS系) の位相条件 (式(1.5.21)) と同じく

$$\varphi_m(f) = - \left( \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_i + \sum_{j=1}^m \arg T_j \right) + 2L\pi \quad (L: \text{整数}) \quad (1.8.19)$$

(注)  $S_m(f) \cong \sqrt{\frac{1}{|T_m|} \sqrt{\frac{\lambda_{m+1}}{N_m}}} \cdot S'_m(f)$  とする。従って  $\arg S_m = \arg S'_m = \varphi_m$

と決定すれば良い。

従って 伝送帯域  $\Omega_I$  の 平均乗誤差は

$$\begin{aligned}
 D_\Omega &= \int_{\Omega_I} |M| \left| \prod_{i=0}^n T_i S_i - 1 \right|^2 d\Omega \\
 &\quad + \int_{\Omega_I} m N_e |S'_m|^2 d\Omega \\
 &= \int_{\Omega_I} \left[ \left( \sqrt[4]{W_I} |S'_m| - \sqrt{|M|} \right)^2 + m N_e |S'_m|^2 \right] d\Omega \quad (1.8.20)
 \end{aligned}$$

となる。

この時被積分関数は  $|S'_m|$  に関する二次関数であるから

よから

$$\begin{aligned}
 |S'_m| &= \frac{\sqrt{|M|} \sqrt[4]{W_I}}{\sqrt[4]{W_I} + m N_e} = \sqrt{2 |M| m N_e} \sqrt{1 - 2 m N_e^2} \\
 &= \sqrt{2 |M|} \sqrt{\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k N_{k+1}}{|T_{k+1}|}} \cdot \sqrt{1 - 2 \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right)^2} \quad (1.8.21)
 \end{aligned}$$

よした時 平均乗誤差  $D_\Omega$  は最小となる。この時

$$D_\Omega = \int_{\Omega_I} 2 |M| N_e^2 d\Omega \quad (1.8.22)$$

となることがわかる。

一方、阻止域  $\Omega_I^c$  の 平均乗誤差  $D_\Omega^c$  は

$$D_{\Omega}^c = \int_{\Omega_I^c} M df \quad (1.8.23)$$

であるから、受信等化器  $S_m(f)$  (又は  $S_m'(f)$ ) を最適に選んだ場

合の相互情報量最大の系(MI系)の平均=乗誤差は

$$\begin{aligned} D_I &= D_{\Omega} + D_{\Omega}^c \\ &= \int_{\Omega_I} 2M_n N_e^2 df + \int_{\Omega_I^c} M df \\ &= \int_{\Omega_I} 2M \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_R N_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right)^2 df + \int_{\Omega_I^c} M df \end{aligned} \quad (1.8.24)$$

となる。

### § 8.3.2 MS系の平均=乗誤差

平均=乗誤差最小の系(MS系 図I-17)の平均=乗誤差は、式(1.5.21)の位相関係を用いるとI-§8.3.1と同様に求めることができる。伝送帯域  $\Omega_s$  の平均=乗誤差  $D_{\Omega}$  は、(図I-17より)

$$\begin{aligned} D_{\Omega} &= \int_{\Omega_s} (\sqrt{W_s} - \sqrt{M})^2 + n/N_e \sqrt{W_s} df \\ &= \int_{\Omega_s} \sqrt{M} n/N_e df \end{aligned} \quad (1.8.25)$$

となる。

帯域外  $\Omega_s^c$  の平均乗誤差  $D_{\Omega}^c$  は

$$D_{\Omega}^c = \int_{\Omega_s^c} |M| d\Omega \quad (1.8.26)$$

であるから MS 系の平均乗誤差  $D_S$  は

$$\begin{aligned} D_S &= D_{\Omega} + D_{\Omega}^c \\ &= \int_{\Omega_s} \sqrt{|M|} \prod_{k=1}^m N_k d\Omega + \int_{\Omega_s^c} |M| d\Omega \\ &= \int_{\Omega_s} \sqrt{|M|} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}}}{|T_{k+1}|} d\Omega + \int_{\Omega_s^c} |M| d\Omega \end{aligned} \quad (1.8.27)$$

と表わされる。

#### § 8.4 数値例

本節では 2 つの最適系の特性の比較を行なう為の数値例を示す。

伝送路特性、雑音電力スペクトル密度及び平均電

力制限が各段で等しいとする。

すなわち

$$T_1 = T_2 = \dots = T_n = T \quad (1.8.28)$$

$$N_1 = N_2 = \dots = N_n = N_0 \quad (1.8.29)$$

$$P_0 = P_1 = \dots = P_{m-1} = P \quad (1.8.30)$$

とすると、I-§ 8.2, § 8.3 の結果は

$$I_I = \frac{1}{2} \int_{\Omega_I} \log \left( \frac{|T|^2}{2n^2 \lambda_I N_0} \right) d\mathcal{F} \quad (1.8.31)$$

$$I_S = \frac{1}{2} \int_{\Omega_S} \log \left( \frac{\sqrt{M} |T|}{n \sqrt{\lambda_S N_0}} \right) d\mathcal{F} \quad (1.8.32)$$

$$D_I = \int_{\Omega_I} 2M n^2 \frac{\lambda_I N_0}{|T|^2} d\mathcal{F} + \int_{\Omega_I^c} M d\mathcal{F} \quad (1.8.33)$$

$$D_S = \int_{\Omega_S} n \sqrt{M} \frac{\sqrt{\lambda_S N_0}}{|T|} d\mathcal{F} + \int_{\Omega_S^c} M d\mathcal{F} \quad (1.8.34)$$

但し

$$\lambda_I \simeq \int_{\Omega_I} \frac{d\mathcal{F}}{2nP} \quad (1.8.35)$$

$$\lambda_S \simeq \left( \int_{\Omega_S} \frac{\sqrt{M N_0}}{P |T|} d\mathcal{F} \right)^2 \quad (1.8.36)$$

$$|S'_m| = \sqrt{2nM} \sqrt{\frac{\lambda_I N_0}{|T|}} \sqrt{1 - 2m^2 \frac{\lambda_I N_0}{|T|^2}} \quad (1.8.37)$$

と簡略化する。

伝送路  $T(\mathcal{F})$  として標準同軸ケーブルを用い、雑音を

白色  $N(\mathcal{F}) = N_0$  とし、中継段数  $m = 10$ 、中継器間



隔  $S = 1.5 \text{ km}$  とした場合の数値例を 図 I.22 ~ 28 に示す。

図 I.22 は 情報信号の電カスペクトル密度が白色の場合及び 図 I.23 は *Butterworth* 特性の場合について両系の相互情報量を比較したものである。 図 I.24 ~ 26 は 情報信号の電カスペクトル密度が *Butterworth* 特性の場合について両系の信号電力で正規化した平均二乗誤差を比較したものである。

各図は、伝送帯域を変数としているが、図中の黒点は、それぞれ MI系, MS系の最適点を表わす。これより広い帯域は同一の電力制限のもとでは実現できない。

当然のことながら、MI系は相互情報量においてMS系より優れ、MS系は平均二乗誤差においてMI系より優れている。又、伝送帯域が最適値を大きく下まわす場合は相互情報量、平均二乗誤差共に両系の差は小さいが、伝送帯域が最適値に近くなり、伝送帯域の端点付近にSNRの悪い部分が生じ始めると両系の特徴が現われてくることがわかる。

図I.27は 等化器の平均出力電力が MI系の相互情報量に及ぼす影響を示し、図I.28は MS系の平均二乗誤差に及ぼす影響を示したものである。

図 I.22 相互情報量の比較(I)

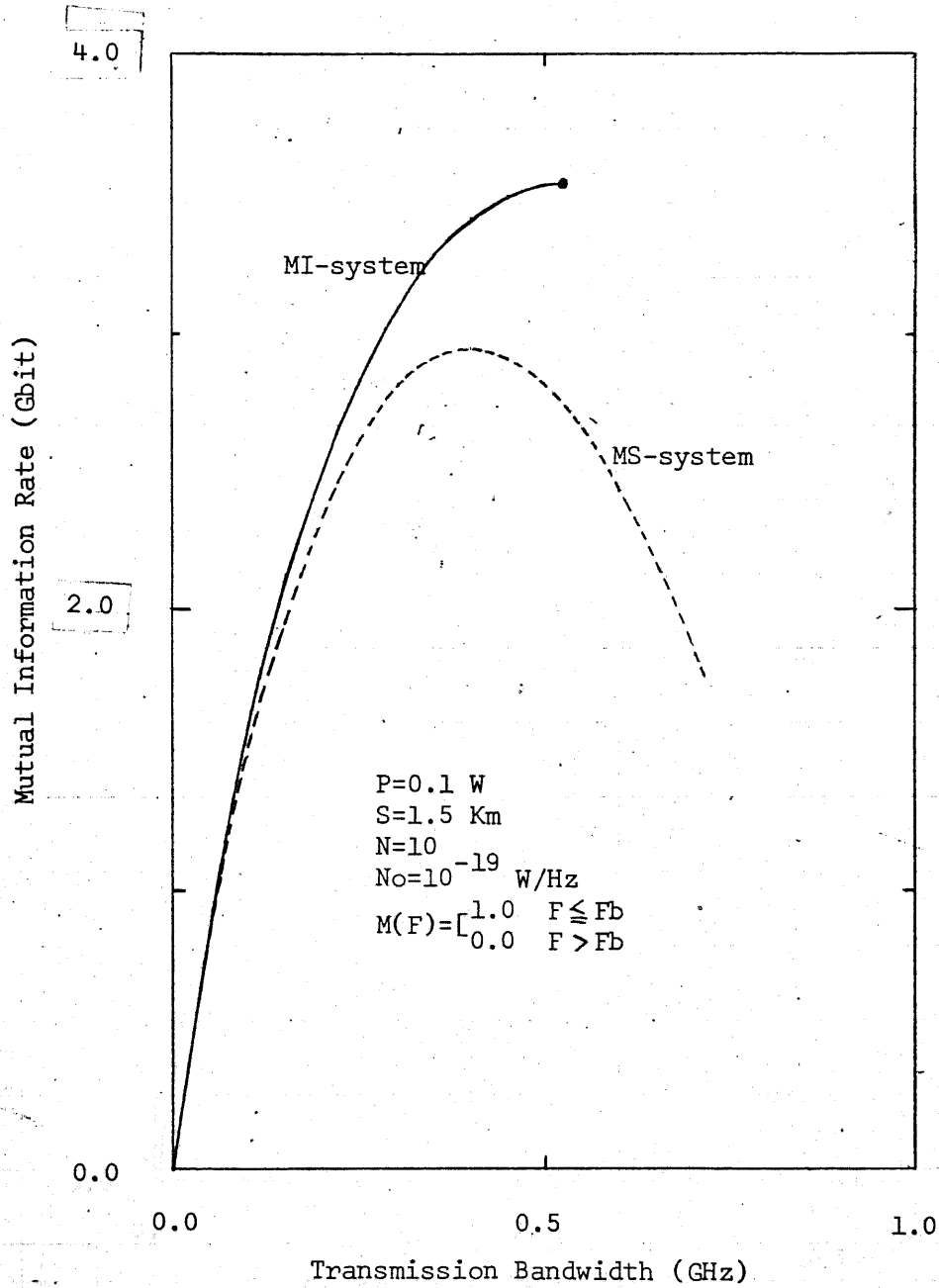


図 I.23 相互情報量の比較 (II)

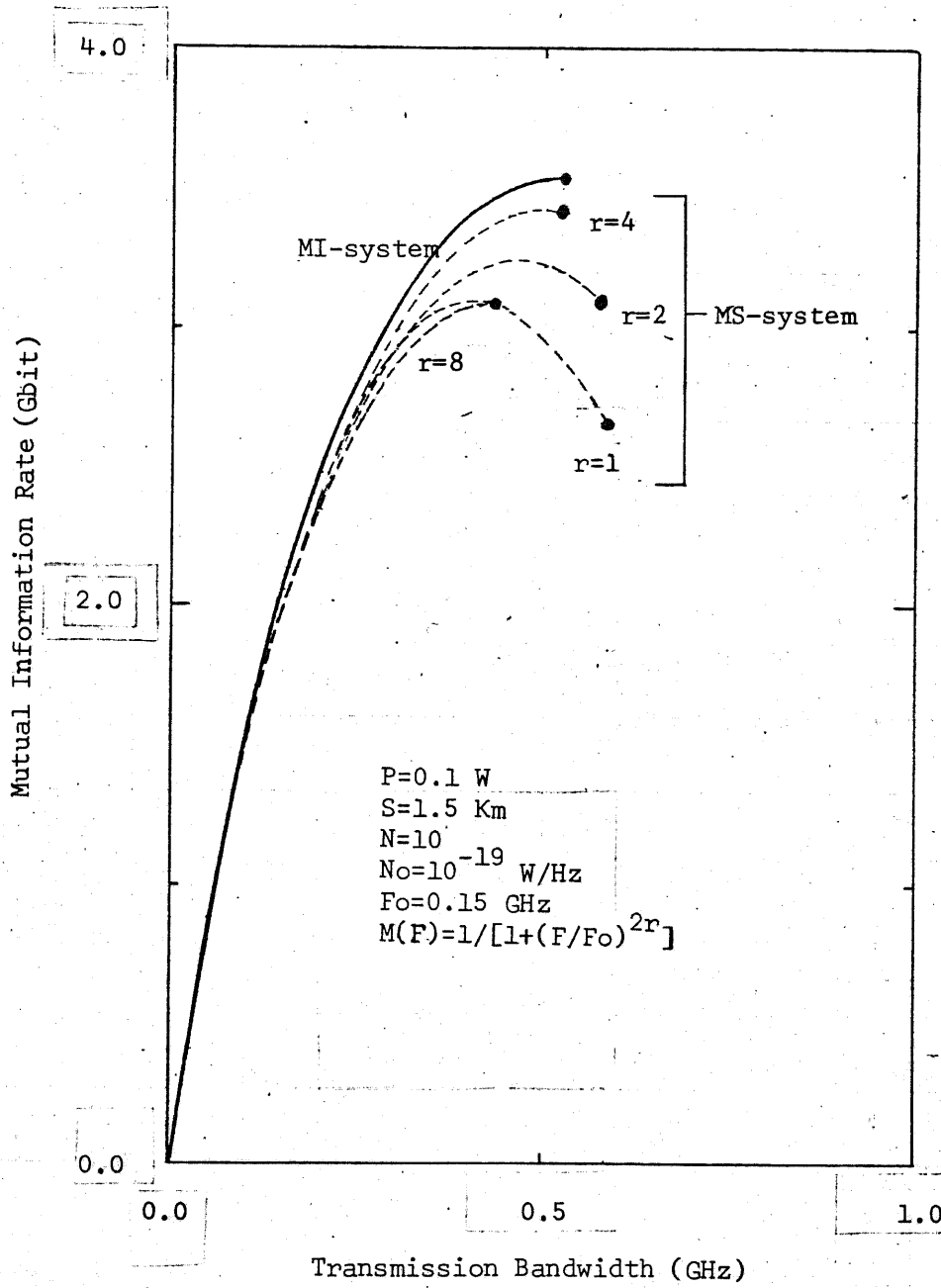
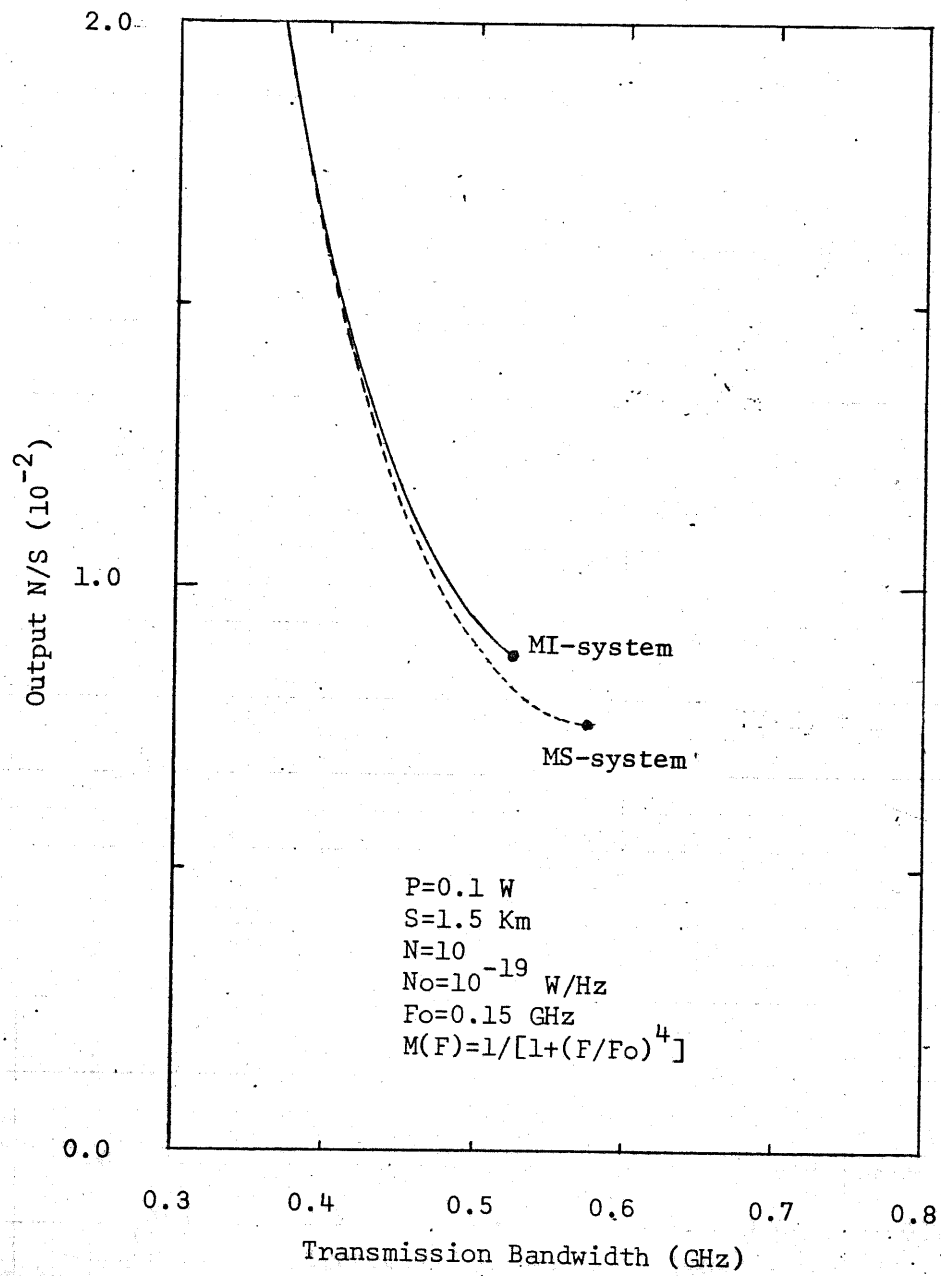


図 I.24 平均乗誤差の比較 (I)



㊦ I.25 平均二乗誤差の比較 (II)

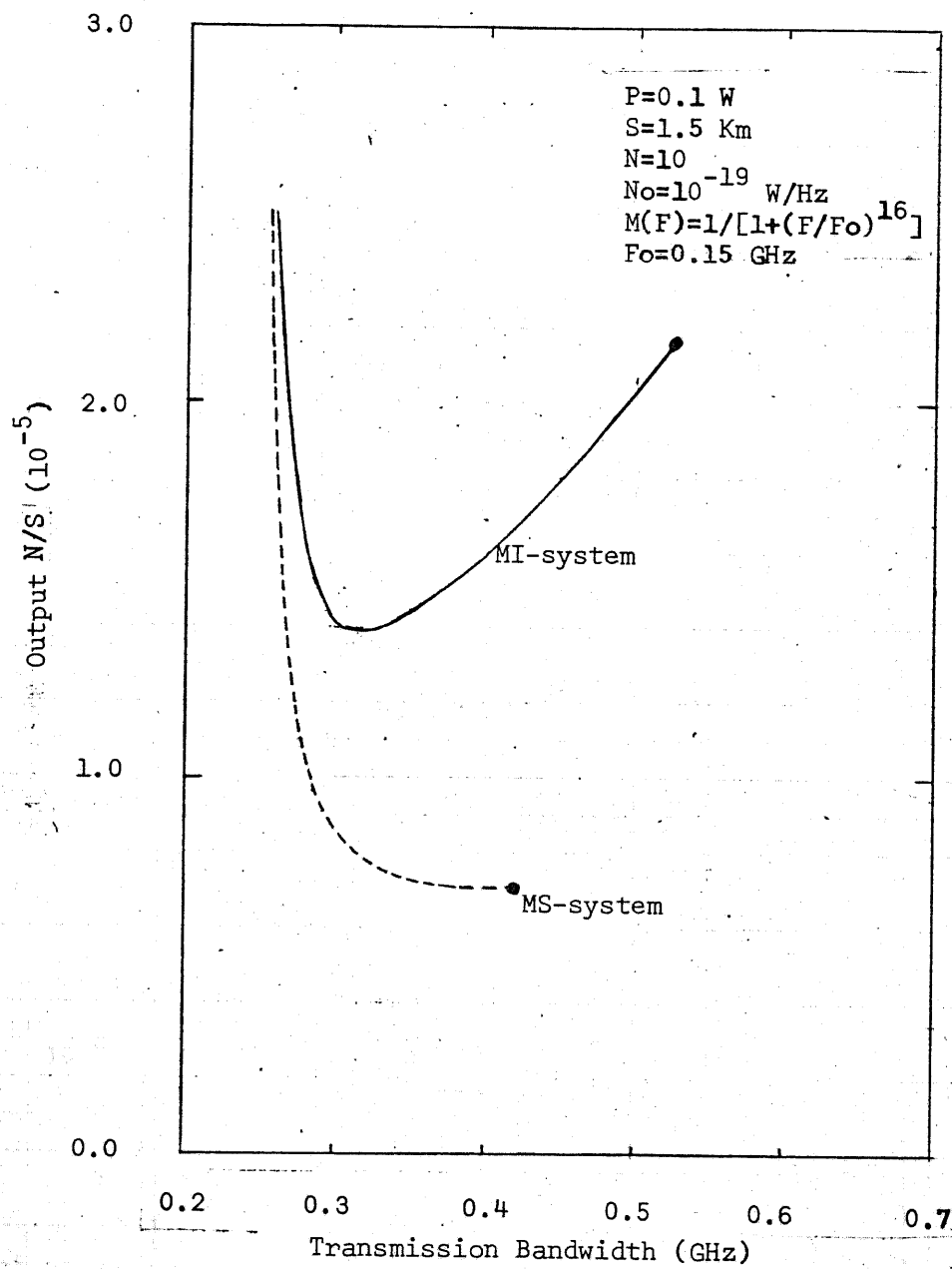


図 I.26. 平均二乗誤差の比較(Ⅲ)

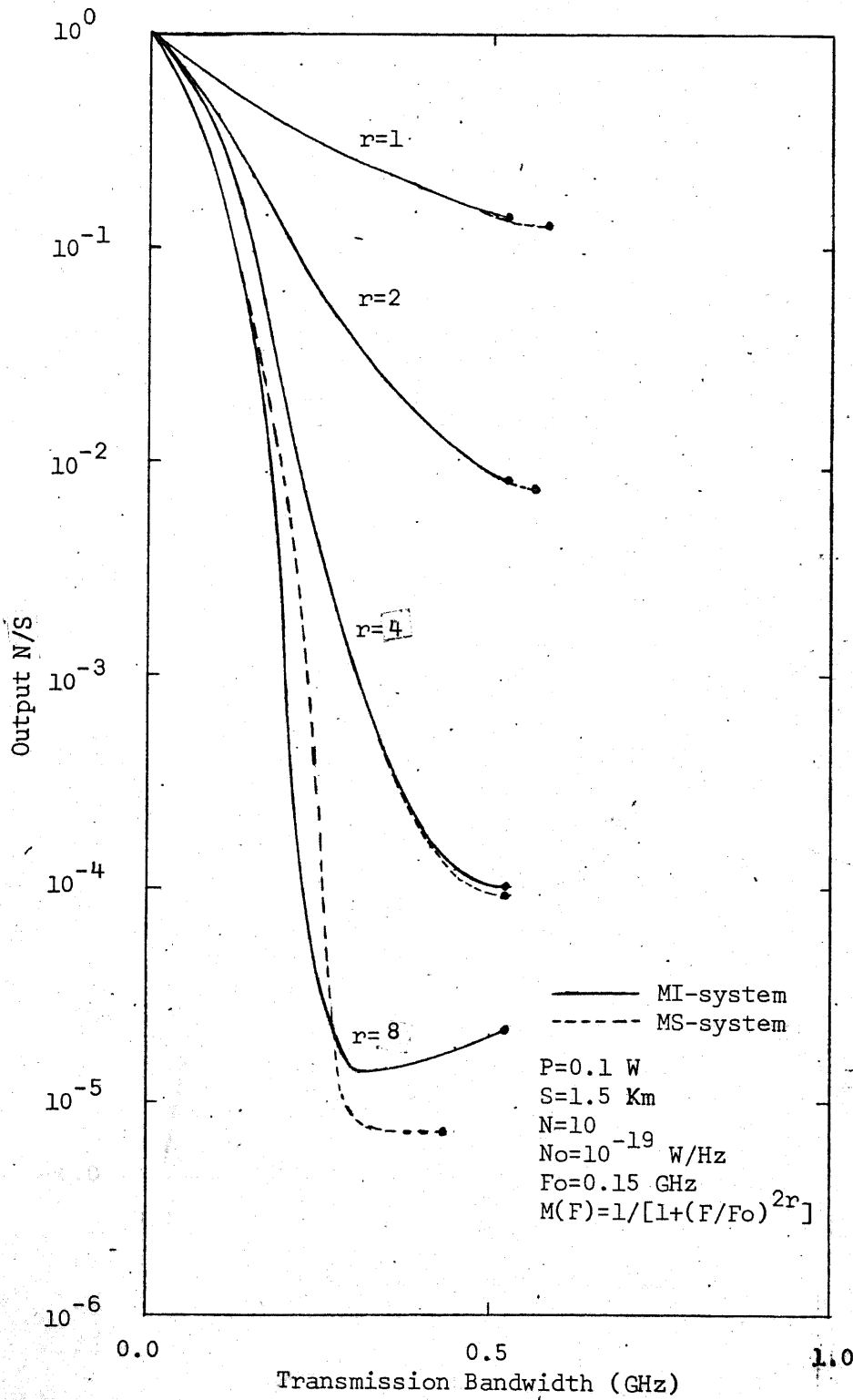
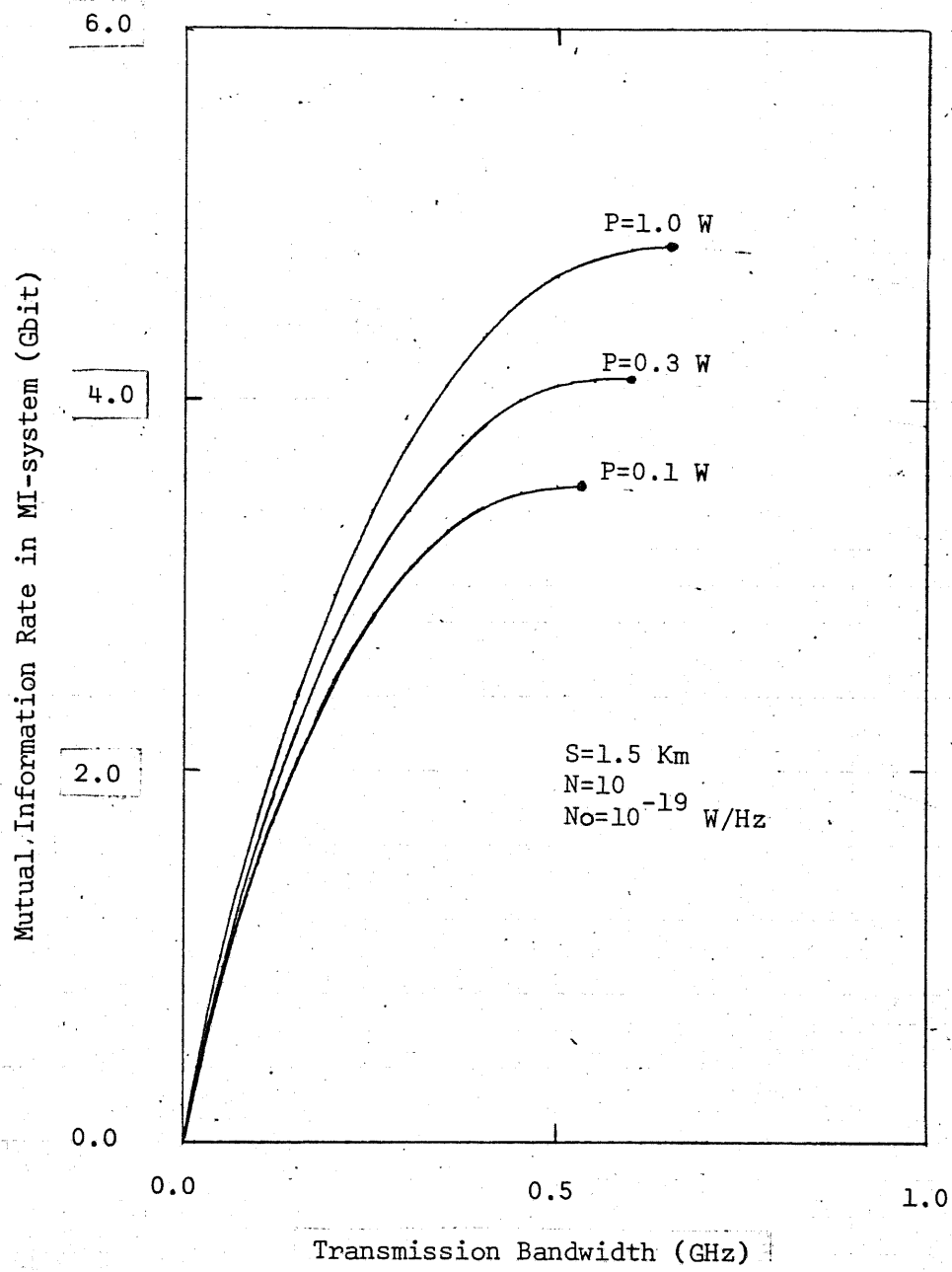
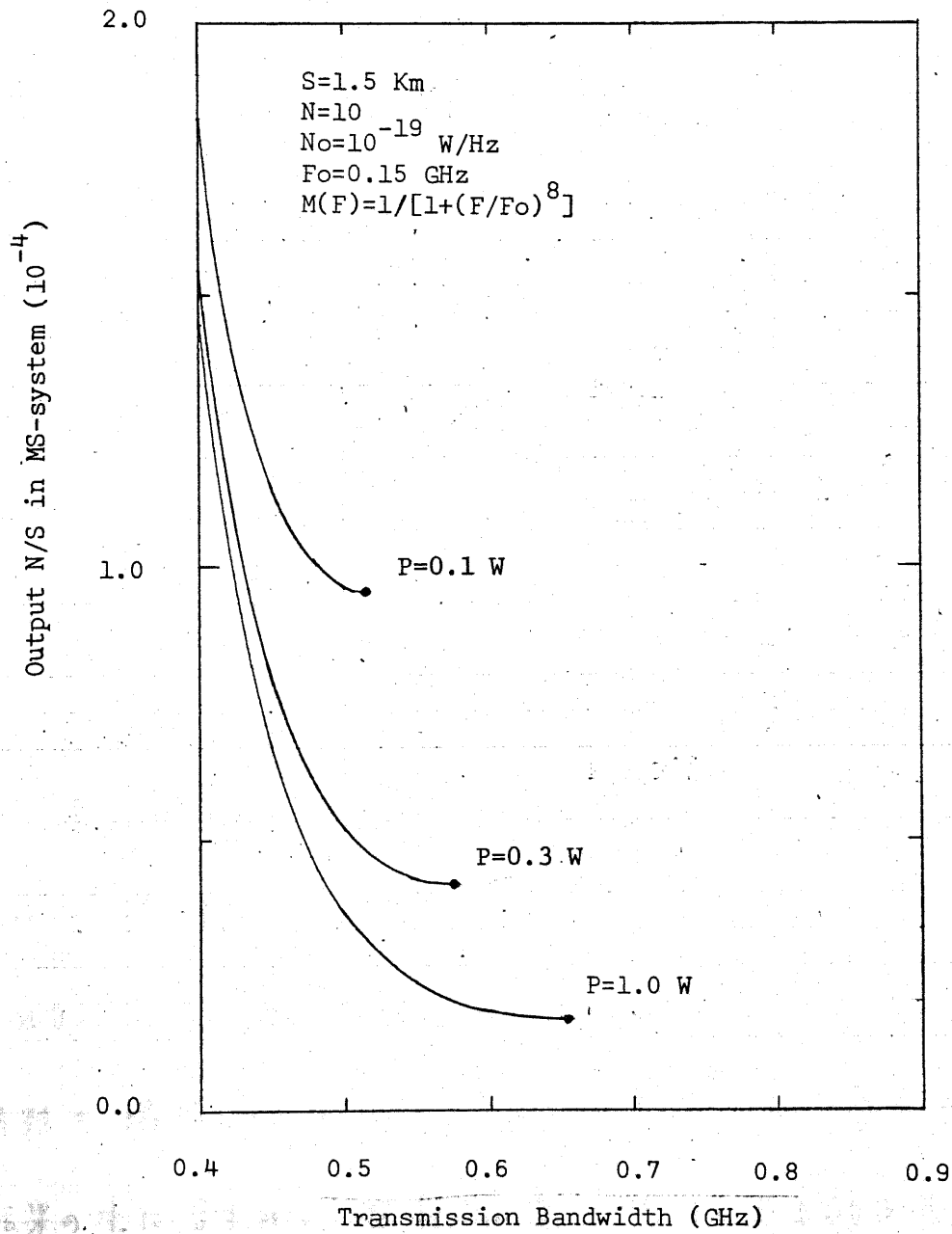


図 I.27 平均出力電力の影響 (I)





四 I.28 平均出力電力の影響 (I)



## § 9 結 論

アナログ中継システムの内、等化器と伝送路の直列構成で情報源と受信者を結ぶ系が、中継系として考えられる最も標準的なものである。

前章までの議論で、この中継系の各段で相加する雑音相互及び雑音と情報信号の間に相関の存在しない場合について最適化を行ない、得られた最適系に対する検討から、最適系の持つ機能構造種々の特性が明らかとなった。

雑音相互に相関が存在する場合、あるいは系の構成が単純な直列接続でなしに、一般的な網構造を持つ場合についての検討はそれぞれ II-§1~§5, III-§1~§11 で扱われる。従って前章までの結果は III-§1~§11 の特殊な場合として扱うこともできる。しかし前章までの結果の中に含まれる機能構造に関する基本的な考え方は、構成が単純な直列系である為に III-§1~§11 における場合より明確な形であらわれ、更に III-§1~§11 の

網構成を持つ構成の場合にまで共通する考え方となっている。

この事実は III-§3 における“単一径路の定理”により、網構成を持つ場合にもその構造が実質的には単純な直列構成の系に帰着させて考え得る点に起因する。

この点については III-§1~§11 であらためて触れるが、結局網構成を持つ場合にも、“合流点”における電力制限のような単純な直列構成の場合には生じ得ない網構成固有の特徴となるべき部分を除くと、単純な直列系の最適解と基本的な構造において同一と考え得る。

この意味で、III-§1~§11 で扱う場合の方がより一般的ではあるが、“アナログ”中継系の最適系においては前章までに扱った単純な直列系の最適解が最も基本的な解となっている。

章ごとにみると、相互情報量評価による最適系(MI系)及び平均二乗誤差評価による最適系(MS系)がそれぞれ I-§4, §5 の結果として与えられ、I-§6 でこの両系の最適構造の比較を行なっている。

その結果 以下の事実が明らかとなった。最適化基準の異なる両系において、中継器機能と考えるべき部分の機能上の単位である“中継単位”は伝送路等の局所的な条件により決定され両系に共通の構造を持つ。この中継単位を縦続に接続して得られる無損失の等価伝送路である“伝送路系”も両系に共通である。

2つの最適系において中継段数 $n$ の増加は単に“伝送路系”の“中継単位”の増加を引き起すのみで、“伝送路系”を雑音相加のある無損失等価伝送路とみなせば、他の部分の機能的構成は中継段数に依存しない。云々は“伝送路系”と云う中継器機能の集りと、端末機能で系が構成されている。この時、中継器機能とは、局所的に最適な無損失等価伝送路を構成する機能であり、端末機能とはこの等価伝送路と情報信号を系の評価基準のもとで整合させる為の機能である。従って端末機能は評価基準によりその構造に大きな差が生じる。

I-87 では 上記の比較結果を更に明確にし、  
 端末機能の持つ構造と“伝送路系”等の概念を明らか  
 かにする為、最適系の等価変換及び中継機能の無  
 い 1 段の系との比較を行ない、最適構成に対する  
 統一的解釈を行なうことができた。これに付随し  
 て相互情報量評価による 1 段の系に対し一般に行なわ  
 れる解釈が必ずしも一般性を持つものでないことを示  
 した。

更に I-88 では 解析された両最適系の特性の  
 具体的な表現とその数値例により、両系の特性上の  
 差異特徴を示した。

以上の各章の結果により 直列構成のアナログ中  
 継系についての最適化及びその解析をあらまし完了する  
 ことができた。最適化基準としては この他に  
 SNR その他種々のものが考えられるが、I-83 で  
 述べたように 相互情報量、平均二乗誤差は、種々の評  
 価基準の中では基本となるべき代表的なものであり、

他の評価基準は、限界としての“相互情報量評価”に対して、個々の具体的条件に対応した評価基準としての意味しかなく、これらの中で平均二乗誤差評価以上に一般的でなじみ深いものは無い。

従って I-§1~§9. で扱った内題として残されたものは I-§2.1, §3.5 で触れたような最適系を利用する立場での議論、いわば“受信者側の情報信号に対する個々の評価基準と前章までに得られた最適系との整合の為の個別的議論である。この内題は個々の場合の系固有の目的に対応した議論であり、もとより一般的に論じられるものではない。

## II 中継系の最適構成と雑音相関

## § 1 序

I-§1~§9 では 情報源と受信者を結ぶ、伝送路及び等化器の接続が最も単純な直列構成の場合 (図 I-1, 4) のうち、各中継段で加わる雑音相互及び雑音と信号の間に相関の無い場合について種々の検討を行なった。

以下の章 (II-§1~§5) では、I-§1~§9 で得られた最適系の構成に対して、雑音相互の相関が及ぼす影響を中心に検討を加える。アナログ中継系において、各段で加わる雑音相互に特に強い相関が存在すると云う場合は、実際的な意味からは考えにくい。雑音相互に相関が存在すると云うような状況が生じるのは、各中継段に共通にかかわる自然現象に基づく雑音あるいは電源供給系統から発生すると云った性質の雑音、伝送路あるいは各中継器内部で発生する雑音に相加するような場合であり、この場合にも雑音相互の相関はあまり大きなものではない。



しかし 雑音に相関の無い場合の最適解には、各等化器の位相特性が個別には規定されない等の自由度が存在している。従って、雑音相関の存在が系の最適解に及ぼす影響や変化あるいは雑音相関により規定される特性を検討することにより、位相特性のように従来決定し得なかつた特性を規定する指標を与えることができる。

更に一般的には、雑音相関の存在する場合の最適解と、存在しない場合の最適解を比較することにより、最適解の持つ構造的特徴のうち、雑音相関が存在しないと云う条件のもとで成立する特徴と、雑音の相関の有無にかかわらず成立する特徴とを明確にし、より一般的に最適解の特殊な場合として雑音相関の無い場合の最適解をとらえ、その機能構成に対すより深い解釈を可能にすることができると。

雑音相互に相関の存在する場合の最適解を一般的に求めることは難しい。そこで以下の章(I-§1~§9)では各中継段で相加する雑音が相互に完全相関の関係にある場

合についての解を求め、この解のうち、完全相関の場合にのみ成立する解と一般的な相関を持つ場合の解の極限と考えられる解を分離し、後者の解を I-§1~§9 で得た解と比較すること、雑音相関の影響について検討を加える。

## § 2 中継系のモデル

解析の対象となる中継系のモデルを設定する。

図14の  $n$  段中継系を考える。この時、I-§2で定義したモデルと、雑音が相互に相関を持つ点のみが異なり、情報源等に対する他の条件は同一である。従って本章ではこの条件の違いに基づき相関点を中心に述べる。

### § 2.1 雑音

雑音  $n_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) は電力スペクトル密度  $N_{ii}(f)$  を持ち、各伝送路  $T_i(f)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n; T_0=1$ ) で相加する定常なアナログ雑音とする。

すなわち

$$N_{ii}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} E_m [n_i(\tau), n_i(\tau')] e^{-j2\pi f(\tau'-\tau)} d(\tau'-\tau) \quad (2.2.1)$$

である。

一方、以下の章 (II-§1~§5) で扱う雑音は I-§1~§9 の場合と異なり、雑音相互に相関が存在する。 >

の相関関数  $R_{ii}$  に対応する相互電力スペクトル密度  $E_{ii}$  と

それぞれ  $R_{ij}(\tau)$ ,  $N_{ij}(f)$  と表わすと次式となる。

$$R_{ij}(\tau) \triangleq E_m [m_i(t), m_j(t+\tau)] \quad (2.2.2)$$

$$N_{ij}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.2.3)$$

尚 雑音と情報の間に相関は無いものとする。従って

$$E_{mm} [m_i(t), m_j(t')] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.2.4)$$

である。

## § 2.2 等化特性

I-§ 2.3 の場合と同様に 各伝送路  $T_i(f)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n+1$ ) の出力を線型変換して次段の伝送路  $T_{i+1}(f)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n-1$ ) に送り込む中継器  $S_i(f)$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) 及び情報源の信号を線型変換して伝送路に送り込む送信等化器  $S_0(f)$  及び最終段の伝送路  $T_n(f)$  の出力を線型変換して受信者に伝達する受信等化器  $S_n(f)$  の計  $n+1$  個の線型等化器を考える。

これらの等化器は I-§ 2.3 で述べたように、12.1°

ルス応答  $\rho_i(t)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) あるいは周波数領域の伝達関数

$$S_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_i(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.2.5)$$

により、一意に表わされる。

雑音相互に相関の存在する場合を扱う以下の章(II-§1~§5)で

は、各等化器の振幅特性  $|S_i(f)|$  及び位相特性

$$\varphi_i(f) = \arg S_i(f) \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.2.6)$$

がそれぞれ意味を持つ為、等化器特性  $S_i(f)$  を

$$S_i(f) = |S_i(f)| \exp(j\varphi_i(f)) \quad (2.2.7)$$

のように、振幅成分と位相成分に分離して表現する。

### §2.3 平均電力制限

受信等化器  $S_m(f)$  を除く、各等化器の出力は平均電力制限を受けず。

各等化器  $S_k(f)$  ( $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) の平均出力電力  $P_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) とすると、各等化器の出力を  $u_k(t)$  ( $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ ) として

$$P_k = E_{m,m} [u_k^2(t)] \quad (2.2.8)$$

と表わすことができる。

I-§2.4 と同様にして、式(1.2.8)を代入し、積分と期待

値の演算の入れかえを行ない整理すると周波数領域の表現として

$$P_k = \int_{-\infty}^{\infty} M(f) W_0(f) W_0^*(f) df$$

$$+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} N_{ij}(f) W_i(f) W_j^*(f) df \quad (2.2.9)$$

但し

$$W_i(f) = \prod_{l=i}^k S_l(f) \prod_{m=i+1}^k T_m(f) \quad (2.2.10)$$

を得ることができる。

I-§2.4 と異なり 雑音相互に相関が存在する為 式(2.2.9)

で

$$N_{ij}(f) \neq 0 \quad (i \neq j) \quad (2.2.11)$$

であり、第2項目に 雑音相関に起因する相互電力スペクトル密度の項が加わっている。

一般に 等化器出力における SNR は 充分大きいと考え

られるから 式(2.2.9)の 第2項は 通常無視することができる。

従って

$$P_k \approx \int_{-\infty}^{\infty} M(f) W_0(f) W_0^*(f) df \quad (2.2.12)$$

として良く、等化器出力端において SNR  $\gg 1$  であれば 雑音

の相関は、實際上 平均電力制限に影響を及ぼさない。

## § 2.4 最適化基準

系の最適化基準として 平均二乗誤差を用いる。これは

相互情報量評価に較べて 解析が容易なことと、I-§5 でも

触れるように、II-§1~§5 で 明らかにする 雑音相関の最適解

に及ぼす影響は、相互情報量評価の最適解に対しても同様

に云えることが容易に理解されることによる。

平均二乗誤差  $D$  は 情報信号  $m(t)$  と系の出力信号  $r(t)$

(により)

$$D = E_{mm} [ \{ r(t) - m(t) \}^2 ] \quad (2.2.13)$$

と定義される。

系の出力信号  $r(t)$  は I-§3.4 より次式で表現される。

$$\begin{aligned} r(t) = u_m(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} m(t - \tau_0) v_0(\tau_0 - \tau_1) v_1(\tau_1 - \tau_2) \dots v_{m-1}(\tau_{m-1} - \tau_m) \\ & \times \rho_m(\tau_m) d\tau_m d\tau_{m-1} \dots d\tau_1 d\tau_0 \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \pi_j(t - \tau_j) v_j(\tau_j - \tau_{j+1}) v_{j+1}(\tau_{j+1} - \tau_{j+2}) \dots v_{m-1}(\tau_{m-1} - \tau_m) \\ & \times \rho_m(\tau_m) d\tau_m d\tau_{m-1} \dots d\tau_{j+1} d\tau_j \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

従って、(2.2.13)の式を式(2.2.13)に代入し、積分と期待値の演算を入れかえて整理すると、I-§3.4と同様にして、平均二乗誤差  $D$  の周波数領域の表現として次式が得られる。

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} M(f) \left| \prod_{j=0}^m T_j(f) S_j(f) - 1 \right|^2 df$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_{ij}(f)}{T_i(f) T_j^*(f)} \left\{ \prod_{l=i}^m T_l(f) S_l(f) \right\} \left\{ \prod_{m=j}^m T_m(f) S_m(f) \right\}^* df$$

(2.2.15)

第1項は信号の歪による平均二乗誤差を表わし、第2項のうち“ $i=j$ ”の項が、各段で相加する雑音の電力スペクトル密度による平均二乗誤差を表わし“ $i \neq j$ ”の項が雑音  $n_i(t)$  と  $n_j(t)$  の間の相関による平均二乗誤差への寄与を表わしている。

尚、一般に電力スペクトル密度の間には

$$N_{ij}(f) = N_{ji}^*(f) \quad (2.2.16)$$

の関係がある。従って式(2.2.15)の第2項のうち“ $i \neq j$ ”

の項は

$$\frac{N_{ij}(f)}{T_i(f) T_j^*(f)} \left\{ \prod_{l=i}^m T_l(f) S_l(f) \right\} \left\{ \prod_{m=j}^m T_m(f) S_m(f) \right\}^* \quad (\text{2項})$$



$$+ \frac{N_{ji}(s)}{T_j(s)T_i^*(s)} \left\{ \prod_{l=j}^n T_l(s) S_l(s) \right\} \left\{ \prod_{m=i}^n T_m(s) S_m(s) \right\}^* \quad (2.2.17)$$

のように複素共役項の和にまとめることができ、その総和は実数となる。更に“ $i=j$ ”の項も含めた総和は定義からも容易にわかるように負になることはない。

しかし、雑音相互に相関のない場合には、伝送路及“ $n$ ”等化器の振巾特性のみで表現されていた雑音の電力スペクトル密度(式1.3.20の第2項)が、本節の式(式(2.2.15))では位相項 $\varphi_l(s)$  ( $l=1, 2, \dots, n$ )を含み、この項が総和に大きな影響を持つ。以下の章(II-§3~§5)でみる、雑音相互の相関による最適解への種々の影響はこの項に起因して生じてくる。

### § 3: 平均二乗誤差による最適系

雑音相関の存在する場合の最適系を、平均二乗誤差評価のもとで、前章までに設定されたモデルについて求め、特解と一般解を示す。特解についてはその物理的意味を明らかにし、一方一般解については、各等化器特性の構造を検討する。

各中継段のうち、いくつかの中継段を除いた残りの雑音が相関を持つ場合の最適解を示す。

#### § 3.1 方程式系

図 I-4 のモデルにおいて 情報信号の電カスペクトル密度  $M(s)$ 、各伝送路特性  $T_i(s)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n; T_0=1$ )、雑音電カスペクトル密度  $N_{ij}(s)$  ( $i, j=1, 2, \dots, m$ ) が与えられた時、各等化器の平均電力制限

$$P_k = E_{mm} [u_k^2(t)] \quad (k=0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (2.3.1)$$

のもとで 平均二乗誤差  $D$

$$D = E_{mm} [\{r(t) - m(t)\}^2] \quad (2.3.2)$$

を最小とするように、各等化器の振巾特性  $|S_i(s)|$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) 及  $n$  位相特性  $\varphi_i(s)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) を決定すれば良い。

そこで Lagrange の 未定乗数を  $\lambda_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ ) として

$$D + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k \quad (2.3.3)$$

の、等化器振巾特性 及  $n$  位相特性に因する変分をとることで、最適解の満たすべき方程式

$$\delta [D + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k]_{|S_p|} = 0 \quad (p=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.3.4)$$

$$\delta [D + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k]_{\varphi_p} = 0 \quad (p=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.3.5)$$

が得られる。

これらの式と電力制限の式(式 2.3.1) と合わせて、計  $(3n+2)$

個の式から 未定乗数  $\lambda_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ )、等化器の振巾特性  $|S_p(s)|$  ( $p=0, 1, 2, \dots, n$ ) 及  $n$  位相特性  $\varphi_p(s)$  ( $p=0, 1, 2, \dots, n$ ) を定めれば良い。

各等化器の出力端で  $SNR \gg 1$  とし、式 (2.2.12) を用いて

等化器の振巾特性  $|S_p(s)|$  ( $p=0, 1, 2, \dots, n$ ) に因する変分を式(式 (2.3.4)) を計算し整理すると

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im} \left\{ 2 \left| \prod_{i=0}^m T_i S_i \right|^2 - \left( \prod_{i=0}^m T_i S_i \right) - \left( \prod_{j=0}^m T_j S_j \right)^* \right\} \\
& + \sum_{k=p}^{m-1} 2 \lambda_k \operatorname{Im} \left| \prod_{i=0}^k T_i S_i \right|^2 \\
& + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^m \frac{N_{ij}}{T_i T_j^*} \left\{ \prod_{\ell=j}^m T_\ell S_\ell \right\} \left\{ \prod_{m=j}^m T_m S_m \right\}^* \\
& + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \frac{N_{ij}}{T_i T_j^*} \left\{ \prod_{\ell=j}^m T_\ell S_\ell \right\} \left\{ \prod_{m=j}^m T_m S_m \right\}^* = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad (p=0, 1, 2, \dots, m) \qquad (2.3.6)
\end{aligned}$$

と存在。

この方程式系の添字“ $p$ ”に無関係な共通項を消去す。各々の辺々引き算を行なうと、方程式系の  $m+1$  個の独立な式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im} \left\{ 2 \left| \prod_{i=0}^m T_i S_i \right|^2 - \left( \prod_{i=0}^m T_i S_i \right) - \left( \prod_{j=0}^m T_j S_j \right)^* \right\} \\
& + \sum_{k=0}^{m-1} 2 \lambda_k \operatorname{Im} \left| \prod_{i=0}^k T_i S_i \right|^2 = 0 \qquad (2.3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m \frac{N_{pj}}{T_p T_j^*} \left( \prod_{\ell=p}^m T_\ell S_\ell \right) \left( \prod_{m=j}^m T_m S_m \right)^* + \sum_{i=1}^m \frac{N_{ip}}{T_i T_p^*} \left( \prod_{\ell=i}^m T_\ell S_\ell \right) \left( \prod_{m=p}^m T_m S_m \right)^* \\
& = 2 \lambda_{p-1} \operatorname{Im} \left| \prod_{i=0}^{p-1} T_i S_i \right|^2 \qquad (p=1, 2, \dots, m) \\
& \qquad \qquad \qquad (2.3.8)
\end{aligned}$$

この方程式系を雑音相互に相関の無い場合の方程式系

(式(1.5.6), (1.5.7)) と比較する。式(2.3.7)は 一見すると

雑相互に相関の無い場合の方程式(式(1.5.6))と異なるように見え

る。しかし 次のように考えることができる。受信等化器  $S_m(f)$

の位相特性  $\varphi_m(f)$  は 雑音相関の有無にかかわらず、出力

信号に含まれる雑音電力スペクトル密度に影響を及ぼさない。

従って この位相特性を 情報信号の歪(式(2.2.15)第1項)が

最小となるように決定すると考えると、系の総合伝達関数

$\prod_{i=0}^m T_i(f) S_i(f)$  の位相特性に対する条件

$$\sum_{i=0}^m \varphi_i(f) + \sum_{j=1}^m \arg T_j(f) = 2L\pi \quad (L: \text{整数}) \quad (2.3.9)$$

が 雑音相関の有無にかかわらず、最適解の必要条件として

現われることが予想される。<sup>(注)</sup> この式が成立したもので

として 式(2.3.7)をながめると これは 雑音相関の無い場合

の式(1.5.6)と同値であることがわかる。

一方、式(2.3.8)は 左辺の“ $\lambda_{ij}$ ”の項が 雑音相

関の無い場合の条件式と異なるのみである。従って 雑音の相

関の方程式系への影響は、式(2.3.8)の“ $\lambda_{ij}$ ”の項が新

(注) II-54.1 で この事実が示される。

たに加わりの点に限られる。

### §3.2 完全相関

前節で与えられた方程式系を一般的に解くのは難しい。

そこで各中継段で相加する雑音が完全相関となる場合について考える。

各中継段で相加する雑音  $n_p(t)$  ( $p=1, 2, \dots, m$ ) が相互に完全相関であれば、各雑音は白色雑音  $n_s(t)$  と可逆フィル  $F_p$  ( $p=1, 2, \dots, m$ ) により図 II-1 のように表わすことができる。

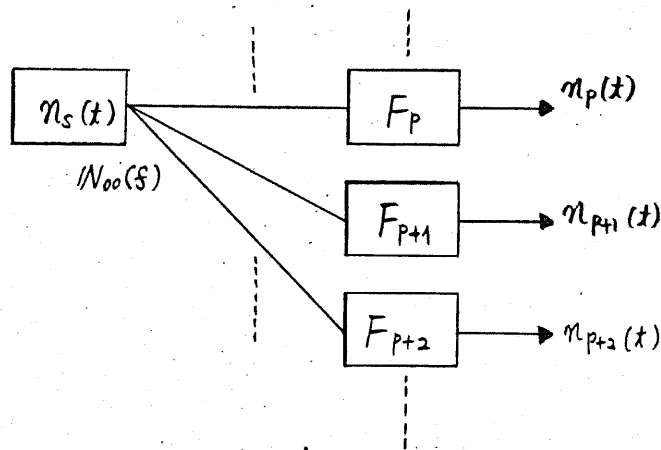


図 II-1 完全相関

この時、雑音の電力スペクトル密度の間には

$$\frac{N_{p+1, j}}{N_{p, i}} = \frac{N_{00} F_{p+1} F_i^*}{N_{00} F_p F_i^*} = \frac{N_{00} F_{p+1} F_j^*}{N_{00} F_p F_j^*} = \frac{N_{p+1, j}}{N_{p, j}}$$

( $i, j=1, 2, \dots, m$ ) (2.3.10)

の関係が成立する。

逆に

$$\frac{N_{P+1, \lambda}}{N_{P, \lambda}} = \frac{N_{P+1, \delta}}{N_{P, \delta}} \quad (\lambda, \delta = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3.11)$$

が成立すれば、この電カスペクトル密度を持つ各雑音  $n_p(t)$

( $p=1, 2, \dots, n$ ) は 図 II-1 で表わされること示される。

電カスペクトル密度の定義

$$N_{\lambda, \delta} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [N_{\lambda}(T), N_{\delta}^*(T)] \quad (2.3.12)$$

$$\text{但し } N_k(T) = \int_{-T/2}^{T/2} n_k(t) e^{-j2\pi s t} dt \quad (2.3.13)$$

により、可逆なフィルタ  $F_p(s)$  と 振中スペクトル

$N_p(T)$  を用いると、電カスペクトル密度  $N_{P+1}(s)$  は一般

に

$$\begin{aligned} N_{P+1} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [F_P N_P(T), F_{P+1}^* N_{P+1}(T)] \\ &= F_P F_{P+1}^* \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [N_P(T), N_{P+1}^*(T)] \\ &= F_P F_{P+1}^* N_{P+1}^w \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

と変型でき、 $N_{P+1}^w(s)$  が白色となるように  $F_P(s)$ ,

$F_{P+1}(s)$  を定めることができる。

白色化された電力スペクトル密度  $N_{\lambda_j}^W(s)$  は

$$|N_{\lambda_j}^W|^2 = 1 \quad (2.3.15)$$

が成立するから 少なくとも

$$N_{\lambda_j}^W = \pm \pi \frac{s + \{S_e^{(i,j)}\}^*}{s - S_e^{(i,j)}} \quad (2.3.16)$$

$$\text{但し } \operatorname{Re} \{S_e^{(i,j)}\} < 0 \quad (2.3.17)$$

と表わせる。

一方、条件式 (2.3.11) を用いると

$$\begin{aligned} N_{P+1j}^W &= \frac{1}{F_{P+1} F_j^*} N_{P+1j} = N_{Pj} \frac{N_{P+1j}}{N_{Pj}} \cdot \frac{1}{F_{P+1} F_j^*} \\ &= N_{Pj}^W F_P F_j^* \cdot \frac{N_{P+1j} F_{P+1} F_j^*}{N_{Pj}^W F_P F_j^*} \cdot \frac{1}{F_{P+1} F_j^*} \\ &= N_{Pj}^W \frac{N_{P+1j}^W}{N_{Pj}^W} \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

の関係がある。ここで  $i=P$  とおくと

$$\frac{N_{P+1j}^W}{N_{Pj}^W} = \frac{N_{P+1P}^W}{N_{PP}^W} = N_{P+1P}^W \quad (2.3.19)$$

換わち

$$N_{\lambda_{i+1}j}^W = N_{\lambda_{i+1}i}^W \cdot N_{\lambda_{ij}}^W \quad (2.3.20)$$



の関係がある。但し ( $j=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, m-1$ )

従って式(2.3.16)で表わされる相互電力スペクトル密度  $N_{ij}(f)$

の持つ極点  $S_{\ell}^{(i,j)}$  の集合

$$S_{ij} \equiv \{ S_{\ell}^{(i,j)} \mid \ell=1, 2, \dots \} \quad (2.3.21)$$

の間には式(2.3.20)から

$$S_{j+1, j} = S_{j+1, j} \cup S_{j, j} \quad (2.3.22)$$

の関係が成立する。<sup>(注)</sup>

又明らかに

$$S_{ii} = \phi \quad (2.3.23)$$

である。従って式(2.3.22)で " $j=j+1$ ." とおくと

$$S_{j+1, j} \cup S_{j, j+1} = \phi \quad (2.3.24)$$

となる。この関係を考慮して、式(2.3.22)を繰返し用いることにより

$$S_{ij} = \phi \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3.25)$$

従って

$$N_{ij}^w = N_{ji}^w = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ \pm 1 & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.3.26)$$

(注) 式(2.3.16)の形から  $N_{j+1, j}^w(f)$  と  $N_{j, j}^w(f)$  の極点と零点が相

殺することはない。従って等号が成立する。

となる。この式は白色化された各雑音  $N_{PP}^W(f)$  ( $P=1, 2, \dots, m$ ) が同一又は互いに正負を反転した同一の信号であることを意味しているから、雑音  $n_P(t)$  ( $P=1, 2, \dots, m$ ) が図 II.1 で表わされることかわかる。

以上で式 (2.3.11) の条件と図 II.1 が同値であることが示された。

### § 3.3 特解

前節に示された完全相関の条件のもとで方程式系 (式 (2.3.7), (2.3.8)) の解を求める。

図 I.4 の関係を用いて方程式 (式 (2.3.8)) を整理すると

$$\begin{aligned}
 & 2\lambda_{P-1} \text{IM} \left| \prod_{\lambda=0}^{P-1} T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2 \\
 &= \frac{N_{00} F_P}{T_P} \left( \prod_{\ell=P}^m T_{\ell} S_{\ell} \right) \sum_{j=1}^m \frac{F_j^*}{T_j^*} \left( \prod_{m=j}^n T_m S_m \right)^* \\
 & \quad + \frac{N_{00} F_P^*}{T_P^*} \left( \prod_{m=P}^n T_m S_m \right)^* \sum_{\lambda=1}^m \frac{F_{\lambda}}{T_{\lambda}} \left( \prod_{\ell=\lambda}^m T_{\ell} S_{\ell} \right) \\
 &= 2 \text{Re} \left[ \frac{N_{00} F_P}{T_P} \left( \prod_{\ell=P}^m T_{\ell} S_{\ell} \right) S_m^* \left[ F_m^* + S_{m-1}^* T_m^* (F_{m-1}^* + S_{m-2}^* T_{m-1}^* (\dots \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \dots (F_1^* + S_0^* T_1^*) \dots \dots \right) \dots \right] \quad (P=1, 2, \dots, m) \quad (2.3.27)
 \end{aligned}$$

となる。

雑音に相関の存在しない場合の解法に於いて、これらの式の  
 辺々割り算を行ない、解を求めるには、次式が成立する必要が  
 ある。

$$[F_n^* + S_{n-1}^* T_n^* (F_{n-1}^* + S_{n-2}^* T_{n-1}^* (\dots (F_1^* + S_0^* T_1^*) \dots))] \neq 0 \quad (2.3.28)$$

本節では、上式が不成立の場合の解を求め検討する。

上式に等号が成立する場合、変形により

$$S_{n-1} = -F_n / \{ T_n \cdot \sum_{j=1}^{n-1} (F_j \prod_{l=j}^{n-2} S_l T_{l+1}) \} \quad (2.3.29)$$

となる。最終段の中継器  $S_{n-1}(f)$  の特性を上式が成立する

ように選ぶと、式 (2.3.8), (2.3.27) より

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{N_{ij}}{T_i T_j^*} \left( \prod_{l=i}^m T_l S_l \right) \left( \prod_{m=j}^m T_m S_m \right)^* = 0 \quad (2.3.30)$$

の関係を導くことができる。この式の左辺は系の出力に

含まれる全雑音の電力スペクトル密度を表わすから、系の出

力が雑音を含まないことを意味している。

この条件は、式 (2.3.29) を満足するように中継器特性

$S_{n-1}(f)$  を定めれば満たされるから、他の等化器特性を

無歪条件:

$$\sum_{\lambda=0}^m T_{\lambda} S_{\lambda} = 1 \quad (2.3.31)$$

と電力制限を満足するように設定すれば

$$D = E_{m,m} [\{r(t) - m(t)\}^2] = 0 \quad (2.3.32)$$

とすることが出来る。

ここで得た解の意味は 図 II.2 の点 "A" から点 "B"

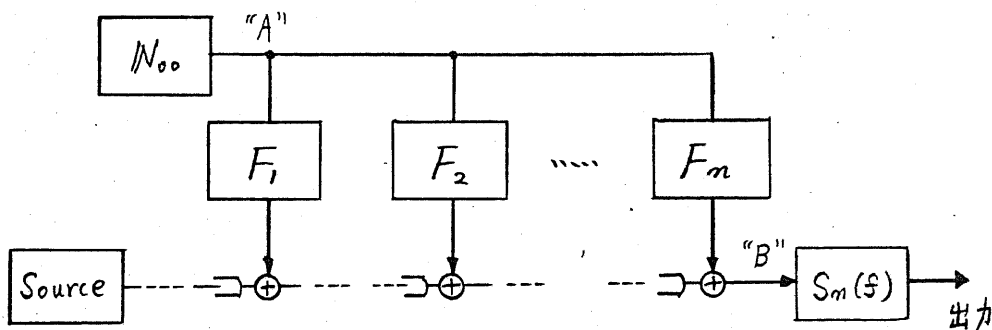


図 II.2 特解の意味

の伝達関数を零とするように 最終段の中継器  $S_{m+1}(f)$  の特性を決定し、雑音  $N_{00}(f)$  の相加を零とする一方、系の総合伝達関数も無歪条件(式(2.3.31))を満足するように設定し、平均二乗誤差を零としている。

これは 雑音が相互に完全相関である場合にのみ成立する (いわば特解であり 一般的の意味はない)。

更に 雑音が相互に完全相関であっても 中継器の電力制限  
 によっては 式(2.3.29)の解が存在しない場合もある。

### §3.4 中継器特性

前節の議論から

$$\sum_{j=1}^n \frac{F_j}{T_j} \left( \prod_{m=j}^n T_m S_m \right) \neq 0 \quad (2.3.33)$$

の場合の解を求めれば良きことがわかる。

完全相関の条件(式(2.3.11))を用いて 最適解の満たすべき方

程式(式(2.3.8))を変型すると

$$\begin{aligned} & \lambda_{p-1} \operatorname{Im} \left| \prod_{i=0}^{p-1} T_i S_i \right|^2 \\ &= \operatorname{Re} \left[ T_{p+1} S_p \frac{N_{p+1}}{N_{p+1}} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{N_{p+1,j}}{T_{p+1} T_j^*} \left( \prod_{l=p+1}^n T_l S_l \right) \left( \prod_{m=j}^n T_m S_m \right)^* \right\} \right] \\ & \quad (p=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

となる。

従って

$$\begin{aligned} \lambda_p e^{j\theta_p} &\triangleq \sum_{j=1}^n \frac{N_{p+1,j}}{T_p T_j^*} \left( \prod_{l=p}^n T_l S_l \right) \left( \prod_{m=j}^n T_m S_m \right)^* \\ & \quad (p=1, 2, \dots, n; \lambda_p: \text{実数}) \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

と定義すると、

$$\begin{aligned}
 \lambda_{p-1} M \left| \prod_{\lambda=0}^{p-1} T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2 &= \operatorname{Re} [W_p \cdot e^{j\theta_p}] \\
 &= \operatorname{Re} \left[ T_{p+1} S_p \frac{N_{pj}}{N_{p+1j}} W_{p+1} e^{j\theta_{p+1}} \right] \\
 &\quad (p=1, 2, \dots, n-1) \qquad (2.3.36)
 \end{aligned}$$

と表わせる。

そこで上式の辺々割り算を行なうと

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_{p-1} M \left| \prod_{\lambda=0}^{p-1} T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2}{\lambda_p M \left| \prod_{\lambda=0}^p T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2} &= \frac{\operatorname{Re} [W_p e^{j\theta_p}]}{\operatorname{Re} [W_{p+1} e^{j\theta_{p+1}}]} = \frac{W_p \cos \theta_p}{W_{p+1} \cos \theta_{p+1}} \\
 &= \left| T_{p+1} S_p \frac{N_{pj}}{N_{p+1j}} \right| \frac{\cos \theta_p}{\cos \theta_{p+1}} \quad (p=1, 2, \dots, n-1) \qquad (2.3.37)
 \end{aligned}$$

となり、中継器の振巾特性  $|S_p(s)|$  について整理すると

最適解として次式が得られる。

$$|S_p|^3 = \sqrt{\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} \frac{\cos \theta_{p+1}}{\cos \theta_p} \left| \frac{N_{p+1j}}{N_{pj}} \right| \frac{1}{|T_p|^2 |T_{p+1}|}} \quad (p=1, 2, \dots, n-1) \qquad (2.3.38)$$

### § 3.5 受信等化特性

前節で得られた中継器の振巾特性  $|S_p(s)|$  を、

最適解の満たすべき方程式(式(2.3.8))に代入し整理すると、

受信等化器  $S_m(f)$  の振巾特性を

$$|S_m|^2 = \frac{\lambda_{m-1} M \sqrt[3]{\frac{\lambda_0^2 \cos^2 \theta_m |N_{m1}|^2 |T_1|^2}{\lambda_{m-1}^2 \cos^2 \theta_1 |N_{11}|^2 |T_m|^2}}}{|T_m| \sum_{j=1}^m \sqrt[3]{\frac{\lambda_{j-1} \cos \theta_m |N_{mj}|^4}{\lambda_{m-1} \cos \theta_j |N_{j1}|^2 |T_j|^2}} \cos \left\{ \sum_{m=j}^{m-1} (\varphi_j + \arg T_j) + \arg \frac{N_{mj} T_j}{T_m} \right\}} |S_0|^2 \quad (2.3.39)$$

と得ることを示す。

従つて、送信等化器  $S_0(f)$  の振巾特性が定まれば、上記の等化器の振巾特性が定まる。

### § 3.6 送信等化特性

前節までに得られた結果 (式 (2.3.38), (2.3.39)) を方程式

$$\begin{aligned} M \left\{ 2 \sum_{i=0}^m \left| \frac{\pi}{\lambda} T_i S_i \right|^2 - \left( \sum_{i=0}^m \frac{\pi}{\lambda} T_i S_i \right) - \left( \sum_{i=0}^m \frac{\pi}{\lambda} T_i S_i \right)^* \right\} \\ = - \sum_{k=0}^{m-1} 2 \lambda_k M \sum_{i=0}^k \left| \frac{\pi}{\lambda} T_i S_i \right|^2 \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

に代入すると  $|S_0(f)|^2$  に関する二次方程式

$$\begin{aligned} |S_0|^4 A \sum_{j=1}^{m-1} \left| \frac{\pi}{\lambda} T_j S_j \right|^2 \\ - |S_0|^2 \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \sum_{i=1}^k \left| \frac{\pi}{\lambda} T_i S_i \right|^2 - \sqrt{A} \sum_{i=1}^{m-1} \left| \frac{\pi}{\lambda} T_i S_i \right| \cos \left[ \sum_{m=0}^m (\varphi_m + \arg T_m) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

但し

$$A \triangleq \frac{\lambda_{m-1} M \sqrt[3]{\frac{\lambda_0^2 \cdot \cos^2 \theta_m \cdot |N_{m1}|^2 |T_1|^2}{\lambda_{m-1}^2 \cdot \cos^2 \theta_1 \cdot |N_{11}|^2 |T_m|^2}}}{\sum_{j=1}^m \left\{ \sqrt[3]{\frac{\lambda_{j-1} \cos \theta_m |N_{mj}|^4}{\lambda_{m-1} \cos \theta_j |N_{j1}|^2 |T_j|^2}} \cos \left[ \sum_{m=j}^{m-1} (\varphi_m + \arg T_m) + \arg \frac{N_{mj} T_j}{T_m} \right] \right\}} \quad (2.3.42)$$

を得ることが出来る。これを  $|S_0(f)|^2$  について解くことによ

り) 振中特性の最適解は

$$|S_0| = \frac{\sqrt{A} \left| \prod_{i=1}^{m-1} T_i S_i \right|^2 \cos \left\{ \sum_{m=0}^m (\varphi_m + \arg T_m) \right\} - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \left| \prod_{i=1}^k T_i S_i \right|^2}{A \left| \prod_{i=1}^{m-1} T_i S_i \right|^2} \quad (2.3.39)$$

と定まる。従って II-§3.5 の結果(式(2.3.39))に上式を代入すること

で、各等化器の最適振中特性がすべて定まったことになる。

### §3.7 部分無相関

この節では 各中継段で加わる雑音の中に、他の中継段の雑音と無相関となるものが混じり合っている場合を検討する。

すなわち 他と無相関な雑音を  $n_g(t)$  とすると

$$W_{g,j}(f) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, g-1, g+1, \dots, n) \quad (2.3.44)$$

である(図 II.3)。

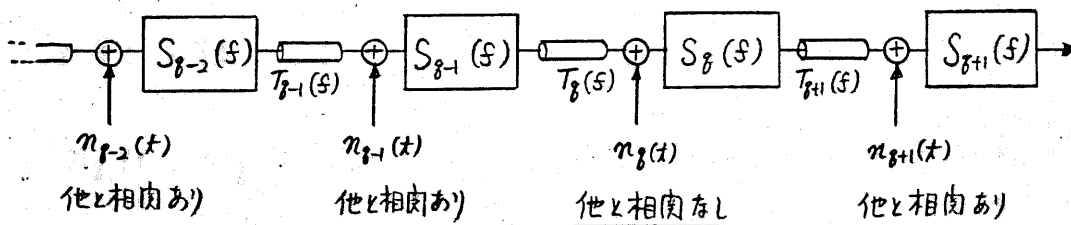


図 II.3 部分無相関



この時無相関な雑音  $n_g(t)$  は 1つに限定する必要はなく、  
 複数の無相関な雑音がいくつかの中継段に連続して相  
 加しても、数段おきに1つずつ相加しても良い。

I-§ 3.3 に示された完全相関の特解の場合には、

無相関の雑音 (図 II.3 では  $n_g(t)$ ) を除いて考え、雑音出力を零と  
 するように最終段の中継器  $S_{n+1}(f)$  を決定し、相加する雑音  
 が相互に無相関なものに限られたモデルに帰着させ I-§ 1~§ 9  
 の結論を適用すれば良い。

以下では 雑音が相互に完全相関であるが、そのうちのいく  
 つかの中継段で相加する雑音  $n_{g_1}(t), n_{g_2}(t), \dots, n_{g_r}(t)$  は  
 他と相関を持たない場合 (部分無相関) について一般解を求  
 める。

I-§ 3.1 の方程式系の設定に続く議論を完全相関の場合  
 と全く同様にしてすめる。  $r$  個の他と無相関の雑音  
 $n_{g_1}(t), n_{g_2}(t), \dots, n_{g_r}(t)$  が連続した中継段に加わった  
 場合を考える。 すなわち

$$\delta_1 = \delta_2 - 1 = \delta_3 - 2 = \delta_4 - 3 = \dots = \delta_r - (r-1) \quad (2.3.45)$$

である。

この時 他の雑音と相関を持たない雑音の影響により、

I-53.7の式(2.3.34)は 次式のようになる。

$$\lambda_{p-1} M \left| \prod_{\lambda=0}^{p-1} T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2 = \operatorname{Re} \left[ T_{p+1} S_p \frac{W_{p+1}}{W_{p+1}} \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{W_{p+1}}{T_{p+1} T_j^*} \left( \prod_{\ell=p+1}^m T_{\ell} S_{\ell} \right) \left( \prod_{m=j}^m T_m S_m \right)^* \right\} \right] \quad (2.3.46)$$

( $1 \leq p \leq m-1; p \neq \delta_1-1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ )

$$\lambda_{\delta_1-2} M \left| \prod_{\lambda=0}^{\delta_1-2} T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2 = \operatorname{Re} \left[ S_{\delta_1-1} T_{\delta_1} S_{\delta_1} T_{\delta_1+1} \dots S_{\delta_r} T_{\delta_r+1} \frac{W_{\delta_1-1}}{W_{\delta_r+1}} \right. \\ \left. \times \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{W_{\delta_r+1}}{T_{\delta_r+1} T_j^*} \left( \prod_{\ell=\delta_r+1}^m T_{\ell} S_{\ell} \right) \left( \prod_{m=j}^m T_m S_m \right)^* \right\} \right] \quad (2.3.47)$$

$j \neq \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$

$$\lambda_m M \left| \prod_{\lambda=0}^m T_{\lambda} S_{\lambda} \right|^2 = \frac{W_{m+1}}{|T_{m+1}|^2} \left| \prod_{\ell=m+1}^m T_{\ell} S_{\ell} \right|^2 \quad (\delta_1-1 \leq m \leq \delta_r-1) \quad (2.3.48)$$

すなわち 雑音  $n_{\delta_1}(t), n_{\delta_2}(t), \dots, n_{\delta_r}(t)$  は 他の雑音と

無相関 (式(2.3.44)) の為 式(2.3.6) を 辺々 引き算して 式(2.3.8)

を 導出する 際 式(2.3.6) のうち ( $p = \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ ) の式を取り

除いて考えれば ( $p = 1, 2, \dots, \delta_1-2, \delta_r+1, \dots, m$ ) については 式

(2.3.8) と全く同一の表現 (式(2.3.46)) を得ることが出来る。この

時 ( $p = \delta_1-1$ ) の式は 同じ構造の式と存在が  $r$  個の式を取

り除いた影響が右辺に現われる(式(2.3.47))

一方 取り除いた  $r$  個の式は I-§5.1 と全く同様にして 式(2.3.48) に変型することができる。

ここで 式(2.3.46), (2.3.47) について II-§3.4 と同様の計算を行なうと  $S_1(s), S_2(s), \dots, S_{\delta_r-2}(s), S_{\delta_r+1}(s) \dots, S_{m-1}(s)$  については II-§3.3 と同様

$$|S_p| = \sqrt[3]{\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} \frac{\cos \theta_{p+1}}{\cos \theta_p} \frac{N_{p+1} j}{N_p j} \frac{1}{|T_p|^2 |T_{p+1}|}}$$

( $p=1, 2, \dots, \delta_r-2, \delta_r+1, \dots, m-1$ ) (2.3.49)

を得ることができる。

一方 式(2.3.46)  $p=\delta_r+1$  と 式(2.3.47) の辺々割り算を行なう

と

$$\frac{\lambda_{\delta_r}}{\lambda_{\delta_r-2}} |T_{\delta_r-1} S_{\delta_r-1} T_{\delta_r} S_{\delta_r} \dots T_{\delta_r} S_{\delta_r}|^2$$

$$= \frac{1}{|S_{\delta_r-1} T_{\delta_r} S_{\delta_r} T_{\delta_r} S_{\delta_r} \dots T_{\delta_r} S_{\delta_r}|} \left| \frac{N_{\delta_r+1} j}{N_{\delta_r-1} j} \right| \frac{\cos \theta_{\delta_r+1}}{\cos \theta_{\delta_r-1}} \quad (2.3.50)$$

従って

$$|S_{\delta_r-1} T_{\delta_r} S_{\delta_r} T_{\delta_r} \dots T_{\delta_r} S_{\delta_r}| = \sqrt[3]{\frac{\lambda_{\delta_r-2}}{\lambda_{\delta_r}} \frac{\cos \theta_{\delta_r+1}}{\cos \theta_{\delta_r-1}} \left| \frac{N_{\delta_r+1} j}{N_{\delta_r-1} j} \right| \frac{1}{|T_{\delta_r-1}|^2 |T_{\delta_r+1}|}}$$

(2.3.51)

となる。この結果を II-§ 3.4 の結果(式(2.3.38))と比較すると

図 II.4 に示すように

$$S_e(S) = S_{\delta_{i-1}} T_{\delta_i} S_{\delta_i} T_{\delta_{i+1}} S_{\delta_{i+1}} \dots T_{\delta_r} S_{\delta_r} \quad (2.3.52)$$

を単一の中継器として扱えば式(2.3.51)は式(2.3.38)と同一の形であり II-§ 3.5 以下の議論をそのまま適用することができ、

等化器特性  $S_0(f), S_1(f), \dots, S_{\delta_{i-2}}(f), S_{\delta_{r+1}}, \dots, S_m(f)$  及び

$S_e(f)$  が定まる。

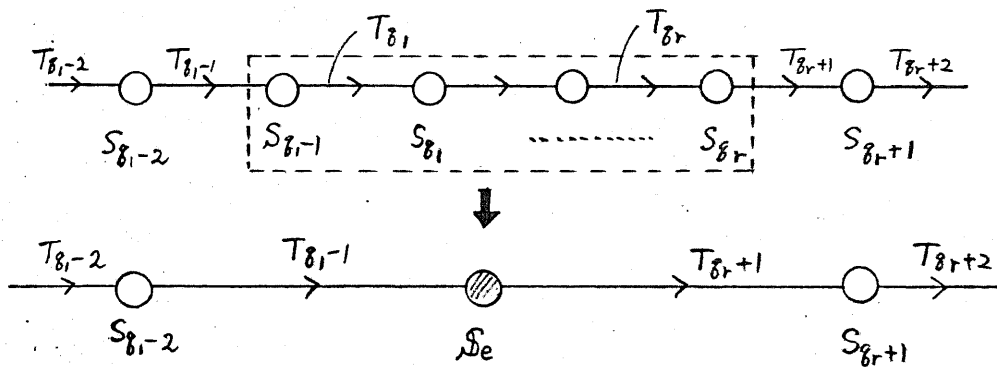


図 II.4 等価中継器

従って問題は等価中継器  $S_e(f)$  の内部構造を定めれば良い。

ここで式(2.3.48)を用いると I-§ 5.2 と同様

にして

$$|S_p|^2 = \sqrt{\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} \frac{N_{p+1}}{N_p}} \cdot \frac{1}{|T_p| |T_{p+1}|} \quad (p = \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{r-1}) \quad (2.3.53)$$

と定まる。

更に式 (2.3.48) “ $m = \beta_r - 1$ ” より

$$\lambda_{\beta_r - 1} M \left| \prod_{i=0}^{\beta_r - 1} T_i S_i \right|^2 = \frac{N_{\beta_r} \beta_r}{|T_{\beta_r}|^2} \left| \prod_{\ell=\beta_r}^m T_\ell S_\ell \right|^2 \quad (2.3.54)$$

従って、残った等化器特性  $S_{\beta_r}(f), S_{\beta_r - 1}(f)$  に因る式

$$\frac{|S_{\beta_r}|^2}{|S_{\beta_r - 1}|^2} = \frac{\lambda_{\beta_r - 1} M |T_{\beta_r - 1}|^2 \left| \prod_{i=0, i \neq \beta_r - 1}^{\beta_r - 1} T_i S_i \right|^2}{N_{\beta_r} \beta_r \left| \prod_{\ell=\beta_r + 1}^m T_\ell S_\ell \right|^2} \quad (2.3.55)$$

を得る。右辺はすべて既知であるから式 (2.3.51) と合わせて

$S_{\beta_r - 1}(f), S_{\beta_r}(f)$  が定まり、すべての等化器の振幅特性

が決まる。

この時、位相特性は等価中継器  $S_e(f)$  の位相特性が条件を満足すれば良く、これを構成してなる等化器  $S_{\beta_r - 1}(f), S_{\beta_r}(f), S_{\beta_r + 1}(f), \dots, S_{\beta_r}(f)$  個々の位相特性への配分は任意である。

以上を要約すると、無相関の雑音を加わった場合、無相関の雑音の相加する中継器のみを向にはさむ2つの中継器とその中継器にはさまれた部分、すなわち図 II.5 の例では無相関の雑音を  $n_4(x), n_5(x), n_6(x)$  とすると

$$S_3 T_4 S_4 T_5 S_5 T_6 S_6 \quad (2.3.56)$$

を1つの等価中継器とみなして全体の最適化を行なう。

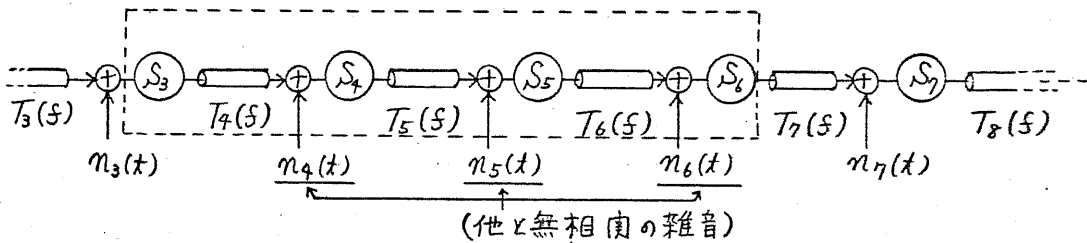


図 II.5 部分無相関の例

一方 無相関の雑音にはさまれた中継器 (図 II.5 では  $S_4(s)$ ,  $S_5(s)$ ) は 雑音相関の無い場合の手法 (I-§5.2) により決定し、残りの、等価中継器の中の両端の中継器特性 (図 II.5 では  $S_3(s)$ ,  $S_6(s)$ ) は、等価中継器特性式 (2.3.51) のうち  $T_4(s) S_4(s) T_5(s) S_5(s) T_6(s)$  の特性を除いた残りの特性を式 (2.3.55) により分離することによって決定されることになる。

いわば無相関な雑音が混じると、局所的に無相関の場合の解が混入し、その前後の中継器は、無相関部分の総合特性が雑音に相関のある系の中継器として機能するように決定される。この結果総合特性 (図 II.5 の例では  $S_3(s) \cdot T_4(s) \cdot S_4(s) \cdot T_5(s) \cdot S_5(s) \cdot T_6(s) \cdot S_6(s)$ ) が他の部分の中継器 (例えば、 $S_7(s)$ ) と同格の等価中継器を構成している。

## §4: 最適系の構造の特徴

雑音に相関のある場合の最適等化特性を 雑音が完全相関となる極限について検討し、その振巾特性は II-§3.4 ~ §3.6 で明らかにされた。本章では この最適系の位相についての検討を加えた後、雑音相関の無い場合の解 (I-§5) と比較し、その共通点あるいは相異点から 雑音相互の相関が最適解に及ぼす影響について述べる。

### §4.1 位相特性

各等化器の位相特性は II-§3.4 ~ §3.6 に示された振巾特性を 式 (2.3.5) に代入し 各  $\varphi_p(f)$  ( $p=0, 1, 2, \dots, m$ ) について解くことにより 決定することができる。

しかし この解を 一般的に 求めることは 難かしい。そこで 本節では 送・受信等化器  $S_o(f), S_m(f)$  の位相特性  $\varphi_o(f), \varphi_m(f)$  を中心に 検討を加え、雑音相関の無い場合の解との 関連を検討する。式 (2.3.35) の定義からわかるように、中継器及び 受信等化器の振巾特性に含まれる  $\theta_1, \theta_2,$

…  $\theta_m$  は 送信等化器の位相特性  $\varphi_0(s)$  に依存しない。

従って 平均二乗誤差  $D$  を 送信等化器の位相特性  $\varphi_0(s)$  の

関数とみると、 $\varphi_0(s)$  に対して定数とみなせるものを  $k_i$  ( $i=1,$

$2, \dots, m$ ),  $L_i$  ( $i=0, 1, 2$ ) と表わして

$$D = \int_{\Omega_B} |M| L_0 [L_1 \cos \left\{ \sum_{m=0}^m (\varphi_m + \arg T_m) \right\} - L_2] \\ \times \exp \left\{ j \sum_{m=0}^m (\varphi_m + \arg T_m) \right\} - 1 \|^2 ds \\ + \int_{\Omega_B} |M| ds + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_B} \frac{N_{ij}}{T_i T_j^*} k_i k_j ds \quad (2.4.1)$$

但し

$$\Omega_B \triangleq \left\{ s \mid L_1 \cos \left\{ \sum_{m=0}^m (\varphi_m + \arg T_m) \right\} - L_2 > 0 \right\} \quad (2.4.2)$$

$$L_i, k_i > 0 \quad (2.4.3)$$

上式から明らかに

$$\sum_{m=0}^m (\varphi_m + \arg T_m) = 2L\pi \quad (L: \text{整数}) \quad (2.4.4)$$

の時最小となる。

すなわち 送信等化器の位相特性を

$$\varphi_0 = - \sum_{m=1}^m (\varphi_m + \arg T_m) + 2L\pi \quad (L: \text{整数}) \quad (2.4.5)$$

と決定した時 平均二乗誤差  $D$  を最小とすることが出来る。

一方、受信等化器の位相特性  $\varphi_m(s)$  は 明らかに



出力の雑音電力に無関係であり、上式が系統の総合伝達関数の位相特性に対する条件であることを考慮すると

$$\varphi_0 + \varphi_m = - \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} (\varphi_m + \arg T_m) + \arg T_n \right\} + 2L\pi$$

(L: 整数) (2.4.6)

と書くのが適当である。

すなわち 送信等化器・受信等化器の位相特性は系の総合伝達関数の位相特性を規定すれば良く、これらの特性は系の出力信号に含まれる雑音電力に影響を及ぼさない。従って、両者の和の特性が上式を満足すれば良く、送受信等化器の位相特性  $\varphi_0(f)$ ,  $\varphi_m(f)$  それぞれにその特性をどのように配分するかは任意であることがわかる。

雑音に相関の存在しない系 (I-§5) では、中継器の位相特性も含めてその配分は任意であった(式 1.5.21)。

しかし相関が存在すると式 (2.3.34) からわかるように中継器の位相特性は雑音の特性により決定される。従って、総合伝達関数の位相特性に対する条件が、上式のように送信等化器・受信等化器の位相特性  $\varphi_0(f)$ ,  $\varphi_m(f)$  に対する条件として表

わされていく。

## § 4.2 振巾特性

雑音に相関が存在し、これが完全相関である場合の最適解の振巾特性は式(2.3.38), (2.3.39), (2.3.42), (2.3.43)に示される。送信等化器  $S_0(f)$ , 中継器  $S_1(f) \sim S_{m-1}(f)$ , 受信等化器のいずれの振巾特性も  $\theta_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) の関数として表わされており  $\theta_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) は定義式(式(2.3.35))からわかるように、雑音の相互電力スペクトル密度の位相関係に依存する量であるから、雑音相互の相関がこの  $\theta_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) を通して振巾特性に大きな影響を及ぼしていることがわかる。

更に中継器の振巾特性  $|S_p(f)|$  を決定するのに必要な  $\theta_p(f)$ ,  $\theta_{p+1}(f)$  は系の各中継段で相加する雑音に依存しており、この特性を“ $p$ ”段目の中継段の前後の局所的な特性から決定することはできない。これは雑音に相関の無い場合と異なる点の1つである。

又、伝送路の減衰を等化する機能もその配分

が雑音相関の無い場合の解と異なるがこれについては次節で述べる。

### § 4.3 雑音相関を持たない系との比較

I-§5 で示された雑音に相関の無い場合の最適解と、II-§3 に示された完全相関の場合の解との比較により、雑音の相関が最適解及ぼす影響について検討を加える。

まず位相特性について比較する。雑音に相関の無い場合の最適系の位相特性は、系の総合伝達特性の位相特性が規定されるのみで、各々の等化器の位相特性は任意である。この事は、信号・雑音共に相互に相関を持たない系では、線型加算の結果生じる出力の電力スペクトル密度に対して、位相特性は影響を持たないことにより説明できる。これに対して雑音に相関が存在する場合には、各中継器の位相特性は雑音の特性により決定される。これは、雑音相互に加算される際の位相関

系により、出力の雑音電カスハワトル密度が変化することによる。

次に 振中特性について調べる。 雑音に相関の無い場合と完全相関の場合の最適な中継器特性をそれぞれ次式に示す。

$$S_P = \sqrt[4]{\frac{1}{|T_P|^2} \frac{\lambda_{P-1}}{W_P}} \cdot \sqrt[4]{\frac{W_{P+1}}{\lambda_P} \frac{1}{|T_{P+1}|^2}} \exp(j\varphi_P) \quad (2.4.7)$$

(P=1, 2, \dots, n-1)

$$S_P = \sqrt[3]{\frac{1}{|T_P|^2} \frac{\lambda_{P-1}}{|W_{Pj}| \cos \theta_P}} \cdot \sqrt[3]{\frac{|W_{P+1j}| \cos \theta_{P+1}}{\lambda_P} \frac{1}{|T_{P+1}|^2}} \exp(j\varphi_P)$$

(P=1, 2, \dots, n-1) \quad (2.4.8)

両者の間には二つの大きな違いがある。

一つは、雑音に相関の無い系(式(2.4.7))では振中特性が位相特性に無関係であるのに対して、完全相関の場合には、雑音の相加点での雑音相互の位相関係により振中特性が変化する点である。中継器の機能は I-§6 で触れたように、伝送路による減衰を補償する機能と、その段で加わる雑音に応じた荷重を掛ける機能に分解できる。この後者の荷重項が、雑音に相関の無い

系では、その段で加わる雑音の電カスペクトル密度の4乗根に比例した荷重となっているのに対し、完全相関の系では、電カスペクトル密度と位相関係の関数として決められている。この事は、雑音に相関が存在する場合、各段の雑音の、系の出力に含まれる雑音電力に対する寄与を、その電カスペクトル密度のみから単純に決定できず、位相関係により同じ電カスペクトル密度の雑音であっても寄与の大小を生じることになる。

もう一つの違いは、伝送路の減衰に対する補償機能に関するものである。雑音に相関の無い系の減衰補償は、伝送路の前後に置かれた中継器で半々に受け持っている。すなわち、 $T_P(s)$ の減衰に対して、第 $P-1$ ,  $P$ 番目の2つの中継器で

$$|S_{P-1}| = [\cdot] \times \sqrt{\frac{1}{|T_P|}} \sqrt{\frac{1}{|T_P|}} \times [\cdot] = |S_P| \quad (2.99)$$

↓  
(減衰の等化)

のように等化を行なっている。

これに対して 完全相関の系では

$$|S_{P-1}| = [ \cdot ] \times \sqrt[3]{\frac{1}{|T_P|}} \sqrt[3]{\frac{1}{|T_P|^2}} \times [ \cdot ] = |S_P| \quad (2.9.10)$$

↓  
(減衰の等化)

のように、伝送路の前後に置かれた中継器で、1対2の比で減衰量を分配して等化している。

この2つの相異点は、雑音に相関の無い系と完全相関の系との比較によるものであるが、雑音の相関が完全相関のような特殊な場合でなく、一般的な場合にも、雑音の相関により、定性的には上記と同様の相異の現われることが予想される。この事は、雑音に相関成分の含まれる可能性のある系においては、各中継器の特性のうち、任意に設定することのできた位相特性が規定されるのみならず、振幅特性にも考慮を加える必要があることを意味している。

## §5. 結論

雑音相関が最適解に及ぼす影響を明らかにする為に、完全相関と云う極限の関係のもとで、平均二乗誤差評価を用いて最適化を行ない、この結果と雑音に相関の存在しない場合の解との比較により、伝送路の減衰特性補償の各等化器への配分比の変化あるいは位相特性、振巾特性に対する条件の変化、更にこれに伴って中継器の等化特性が局所的な特性のみから決定することができなくなる等の事実が明らかとなった。

雑音が一般的な相関を持つ場合の解は求められていないが、完全相関の場合の解のうち一般解の特徴として前章までに明らかにされた事実は、方程式系の形から、定性的には一般の相関を持つ場合の最適解の特徴として主張できるものと思われる。

又、最適化基準として平均二乗誤差を用いているが相互情報量を最適化基準として用いた場合にも、中継器特性はⅡ-§3.4で求めたものと同

一の形となる。これは、I-§3, §4 で得られた中継器特性の最適解が同一となっている事実と同じ理由による。

すなわち、相互情報量の表現式から得られる方程式系は、相互情報量評価を特徴づける部分が中継器特性を求め手順中で共通項として消える為である。結果として平均二乗誤差評価の中継器特性と同一の解を与えることになる。

前章までの議論は中継器特性の構造から主張できるものがほとんどであるから、結局最適化基準が平均二乗誤差であっても相互情報量であっても前章の結論はほとんどそのまま適用できる。系の総合伝達関数の位相特性に関する条件が、相互情報量評価の場合に存在しないことは言うまでもない。

II-§1~§5 で用いた、雑音相互に相関を持つと云う解析のモデルは現実の問題としては考え難い。

しかし雑音相互に相関の無い場合には、各等化器の位相特性は個別には決定されず自由度が存在している。



従って、わが国でも雑音相互に相関が存在すれば、前章までの結果を用いてこの自由度を利用する可能性が生じる。少なくとも位相特性を任意に放置せずに規定する為の指標は与えられたことになる。

又 II-84.3 の結果から、伝送路の減衰補償の配分比等、一般的な場合にもそのまま通用すると思えた事実が実は雑音に相関の存在しない場合に限って成立する事実であり、雑音の相関により変化する等の事実も明らかにされた。

### Ⅲ 中継網の最適構成

## § 1 序

(I- 中継系の最適構成), (II- 中継系の最適構成と雑音相関) では、中継系の接続関係が単純な直列構成のものについて検討を加え最適化を行なった。以下の章では中継系の接続関係が一般的な網構造を持つものについて最適化を行なう。

この際最適化の手法には二つの行き方が考えられる。一つは、(I- 中継系の最適構成) で用いた手法をそのまま一般的な網構造を持つ系に拡張する行き方である。この場合与えられた網構造に対して、最適解の満たすべき方程式系を導出しこれを解くことになるが、方程式系は網構造により、その方程式の個数も形も変化する。従って種々の網構造を持つ個々の場合について個別に解く必要がある。もう一つの行き方は、中継系の持つ網構造に依存しない、局所的な接続関係から、各等化器を分類し、網に含まれる等化器を機能別に最適化するものである。

以下の章では、後者の行き方により中継網の最適化を行なう。その解法の手順からも明らかのように、最適解は、伝送路と等化器の接続関係で決まる網構造に依存せず、各等化器の局所的な接続関係からその最適特性が決まる。しかしこの最適解の中に経路の接続関係に依存する未確定部分が含まれることは避けられない。しかし幸にも、この未確定部分は、系の入出力端を結ぶ各経路の伝送帯域に関するものであり、最適解の解釈にあたって問題は残らない。各経路の伝送帯域は網の接続関係が具体的に与えられれば、各等化器の最適特性を用いて決定することができる。

(I-中継系の最適構成)で扱った中継系は、(II-中継網の最適構成)の一般的な網構造を扱う立場からみると、その網構造に分岐点、合流点を持たない特殊な場合と考えることができる。従って(III)の結果から(I)の結論を直接導くこともできる。

§2 では 網構造を持つ中継系のモデルを設定する。扱う中継系の具体的な網構造が与えられない為、径路の接続関係については、ループを持たない等の条件を与えるだけで、具体的に表現することができない。

ここで、一般的な伝達関数の表現、局所的な接続関係による等化器の分類等を行ない、他の部分の径路接続関係の細部を問わずに最適化を行なう準備をする。

§3 では 分岐点あるいは合流点の等化器特性を決定する為に不可欠な、最適解の径路の単一性に関する定理を示し、証明する。この章では、前半部で簡単な直並列系の最適解に関する検討を行ない、径路の単一性を予測する見通しを示し、後半部で単一径路の定理とその証明を与える。

§4 では 中継器と分類された等化器の最適等化特性を与え、定理を示し、これを証明する。

§5 では 単一径路の定理を応用し、分岐点

等化器の最適化を行なう。 中継器及び分岐点等化器  
 に関する定理は、相互情報量、平均二乗誤差の二つの最  
 適化基準に依らず同一の特性となることを示すが、合流点  
 あるいは端末の等化器については、最適化基準により、そ  
 れぞれその表現、最適特性が異なる。

従って §6 では 相互情報量評価及び平均二乗誤差  
 の二つの最適化基準それぞれについて、合流点等化  
 器の最適等化特性に関する定理を示し、その証明を行  
 なう。 この定理の表現は最適化基準により異なり、  
 一見、合流点等化器の最適特性が、最適化基準に依存  
 するように見えるが、 §7 で明らかになるように  
 最適化基準に依らず、両者は同一である。

§7 では 相互情報量及び平均二乗誤差評価のそれ  
 ぞれについて、端末等化器の最適等化特性に関する定  
 理を示す。

§8 では、 §2 ~ §7 で得られた定理の応  
 用例として 簡単な網構造を持つ中継系の最適

他の具体例を示し、単純な直列系、並列系との対応を示す。

以上の章ですべての等化器特性の最適化は完了するが、§9では中継網の具体的な網構造が与えられた場合の径路選択、帯域配分決定の条件について述べ、そのアルゴリズムを示す。

更に§10においては、複数情報源受信者対を持つ系の場合にも、§2~§7の各定理を用い、§9の径路選択、帯域配分のアルゴリズムを変更することで、最適解を求め得ることを示し、その具体的なアルゴリズムも合わせて示す。

(I-中継系の最適構成)及び(II-中継系の最適構成と雑音相関)における最適化手法が個別的であったのに対し、(III-中継網の最適構成)で用いた最適化手法は、一般的に対象を扱い得るものである。その結果には、帯域配分、径路選択の条件のように網構造そのものに起因するいく

つかの 特徴もあるが、最適系の構成に対して、(I)  
で確立された概念がそのまま適用できる部分も多く含  
まれている。



## § 2 中継網のモデル

中継網の最適化に先だって、網のモデルを設定する。網の径路の接続関係は、ループを持たない等の条件を与えるだけで具体的に決定しない。

従って、一般的な伝達関数の表現を定義し、雑音の相加点についても局所的な定義を行なう。最適化の為の各等化器の分類も、局所的な接続関係により行なう。更に、このような分類の一般性、各等化器の電力制限等の条件を明らかにし、最適化の準備をする。

### § 2.1 情報源

電力スペクトル密度  $M(f)$  を持つ定常アナログ情報源を考える。I-§ 2.1 と同様に、出力される情報信号がこの性質を満足すれば情報源の内部構造は向わない。

最適化基準として相互情報量を用いる場合には

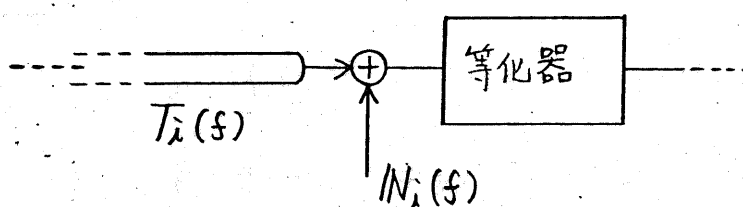
ガウス性の条件を加える。

Ⅲ-§9 までは単一の情報源と受信者を考えるが、  
§10 においては、複数の情報源とこれに対となる複数の  
の受信者を持つ系への拡張を行なう。

## § 2.2 雑音

雑音は定常で電カスパクトル密度  $N_i(f)$  を持つものとする。この時、雑音の相加点は中継網の径路の接続が与えられていない為、具体的に指定することはできない。そこで、等化器へ接続されるすべての伝送路の出力端でその伝送路の雑音が相加するものと定義する(図Ⅲ・1)。この定義は、通常の伝送路モデルと同一の定義である。

更に雑音相互に相関は存在しないものとし、



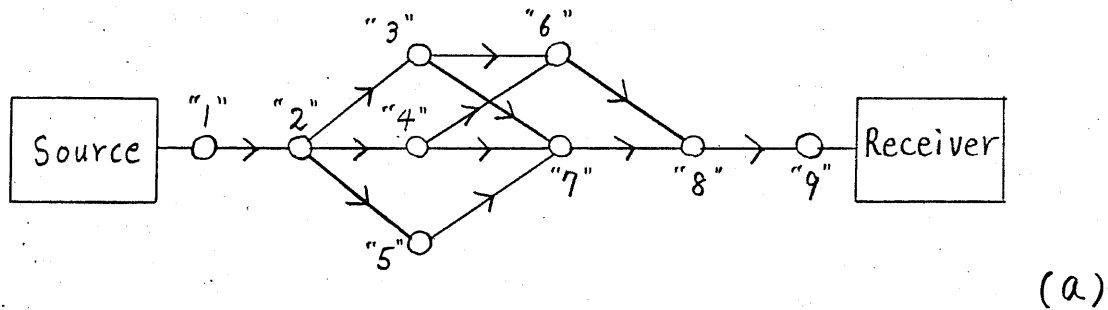
図Ⅲ・1  
(雑音相加)

最適化基準として相互情報量を用いた時には、ガウス性の条件を加える。

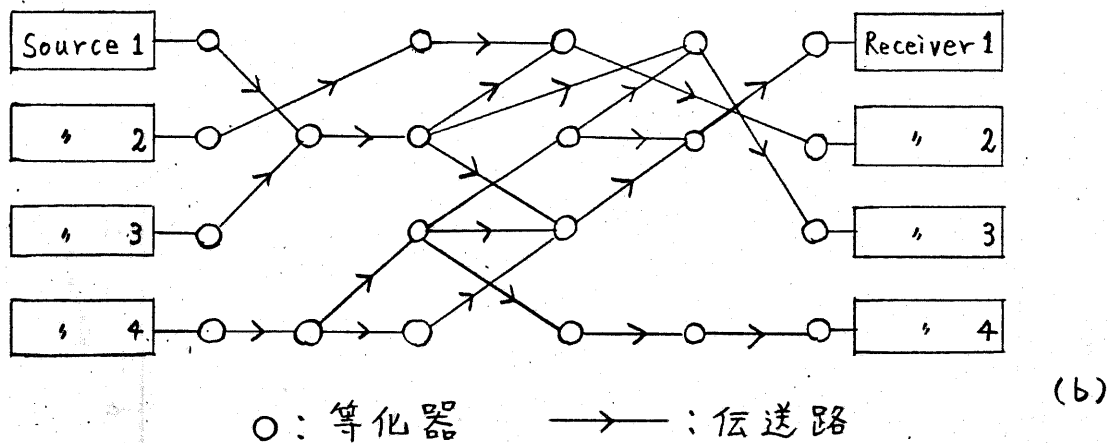
§ 2.3 経路の接続関係と等化器の分類.

情報源と受信者を結ぶ、伝送路と等化器からなる中継網は方向性を持ち、ループを持たないものとする。  
 情報源受信者対が複数の場合にも同様である。

図 III.2 に中継網の例を示す。



(a)



(b)

○ : 等化器      → : 伝送路

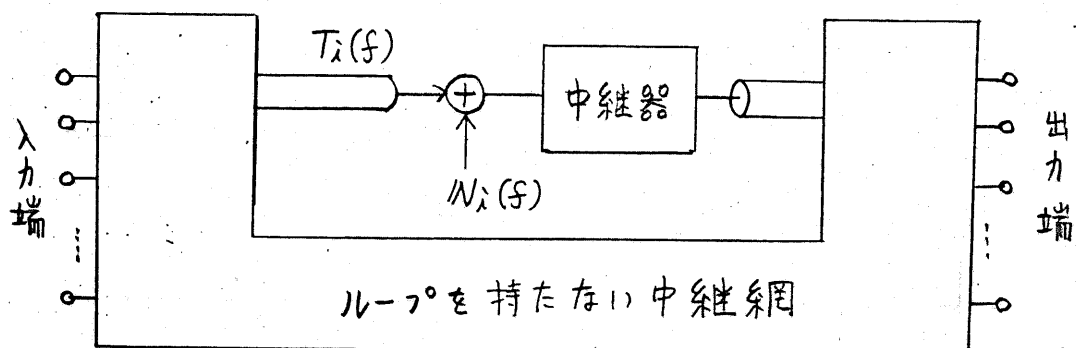
図 III.2 中継網の例

以下の章では §9 までは 図Ⅲ・2・(a) のような単一情報源単一受信者の系を考え、 §10 で、 §9 までに得られた結果を用いて 図Ⅲ・3 (b) のような、複数情報源受信者対の系に拡張する。

以下に 伝送路との接続関係により等化器を4種に分類する。この時等化特性を表わす関数の右肩に  $R, B, \dots$  等の添字をつけて等化器の種類を区別するが、以下の章では区別の必要が無い場合はこの添字を省略する。

### § 2.3.1 中継器等化

図Ⅲ・2・(a) の等化器 "5" のように、入力、出力それぞれ1端子からなる等化器、すなわち中継系図から引

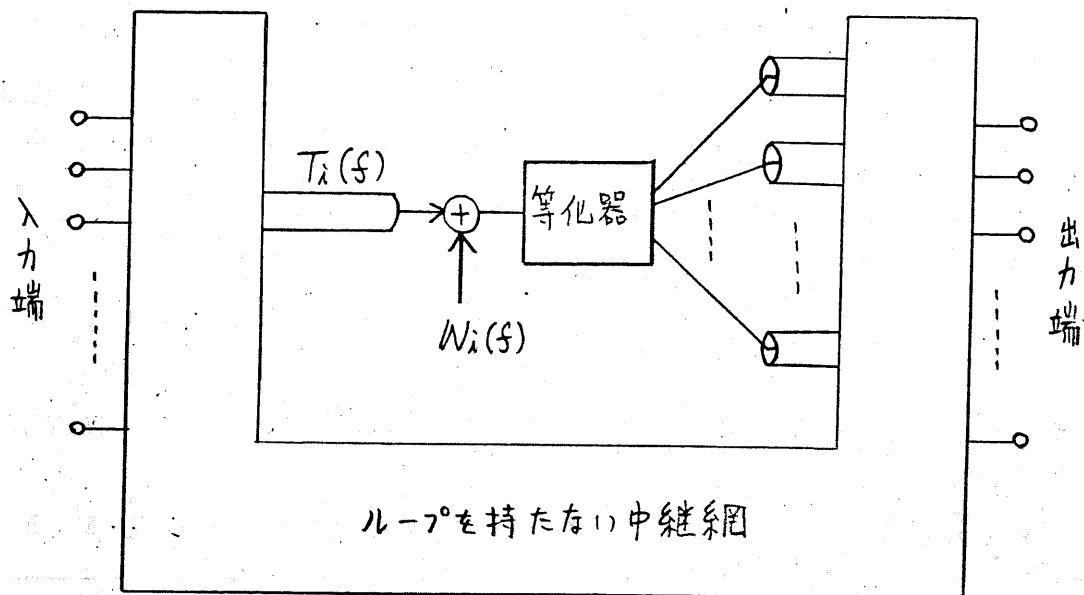


図Ⅲ・3 中継器

き出した場合 図Ⅲ・3 の形に表現できる等化器を中継器と呼ぶことにする。中継器の特性は線型とし、入力端から出力端への伝達関数  $S_i^R(f)$  により一意に表現され、出力端で平均電力制限を受ける。

### § 2.3.2 分岐点等化

図Ⅲ・2 の等化器“2”，“3”，“4”のように、入力1端子出力  $m$  端子で構成された等化器を分岐点等化器と呼ぶ。中継網から引きたした場合 図Ⅲ・4 の形に表現できる等化器を分岐点等化器と定義しても良い。



図Ⅲ・4 分岐点等化器

等化機能は線型とし、この入力端から各出力端への伝達  
 因数  $S_i^{(j)}(f)$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) を用いて等化器特性は

$$S_i^B(f) = \bigcup_{j=1}^m S_i^{(j)}(f) \quad (3.2.1)$$

により一意に表わされる。(注)

分岐点等化器は各出力端子毎に平均電力制限を受け  
 ける。すなわち  $j$  番目の端子の出力を  $v_j(t)$ 、この  
 端子に許される出力電力を  $P_j$  とすると

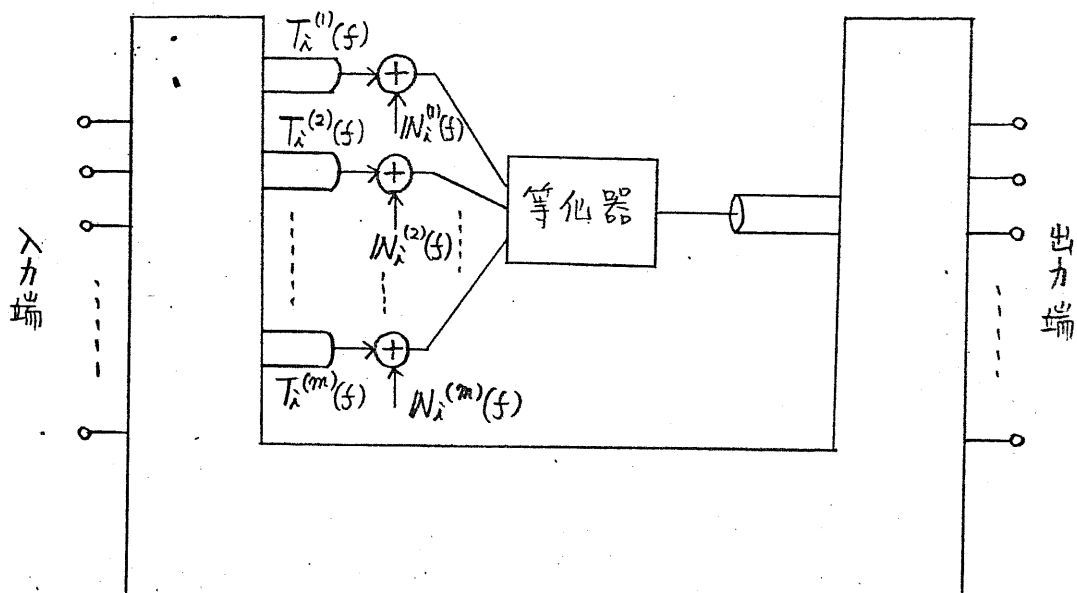
$$E_{m,n} [\{v_j(t)\}^2] = P_j \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (3.2.2)$$

但し  $E_{m,n}[\cdot]$  は雑音及び情報信号に因する期待値を  
 表わす。

### § 2.3.3 合流点等化

図 III-2 (a) の等化器 "6", "7", "8" のように入力  $m$  端  
 子出力 1 端子で構成された等化器を合流点等化器と  
 呼ぶ。前節と同様に中継網から引き出した場合  
 図 III-5 の形に表現できる等化器と定義しても良い。

(注) III-§3, §9 の結果を用いると、集合の合併 "U" ではなく単純な  
 加算 "+" で表わしても良いことがわかる。



図Ⅲ・5 合流点等化器

等化機能は線型とし、各入力端から出力端への伝達係数  $S_i^{(j)}(f)$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) により、合流点等化器の特性は

$$S_i^J(f) = \bigcup_{j=1}^m S_i^{(j)}(f) \quad (3.2.3)$$

により一意に表わされ、出力は平均電力制限を受ける。<sup>(注)</sup>

#### § 2.3.4 端末等化

図Ⅲ・2・(a)の等化器“1”、“9”のように情報源ある

(1)は受信者と直接接続されている等化器を端末等化器

(注) 前頁の(注)に同じ

と呼ぶ。 端末等化器のうち、情報源に接続されている等化器を送信等化器、受信者に接続されている等化器を受信等化器と呼ぶ。 両等化器共に線型でそれぞれ伝達関数  $S_o^T(f)$ ,  $S_m^F(f)$  により一意に表わされる。

送信等化器はその出力端で平均電力制限を受けるが、受信等化器はその出力が直接受信者に伝えられ、後段で雑音の相加を受けないから電力制限条件は不要である。

#### § 2.4 分岐合流点について

前節で アナログ中継網に含まれる等化器を4種に分類した。 しかし現実のアナログ中継網では、これらの4種の等化器が複合した形で現われる場合も起り得る。 しかしこの場合もダミーの伝送路を考慮することで、上記の4種の等化器で構成された系に帰着させることができる。

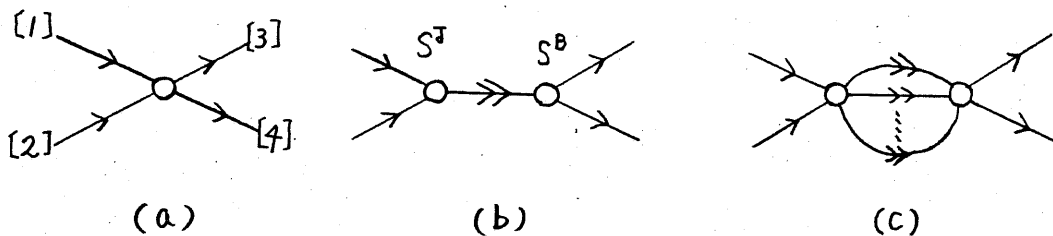
中継器はその定義から他の等化器と複合すること



は起り得ない。

分岐点等化器と合流点等化器の複合した等化器(図Ⅲ.6

(a)は、伝達回数1のダミー伝送路を用いて同図(b)のように分岐点等化器と合流点等化器に分離して表現すれば良い。



→ : 伝送路      →→ : ダミー伝送路  
○ : 等化器

図Ⅲ.6 分岐合流点

単一情報源の系ではこの変換で向題ないが、複数の情報源を持つ系では、この変換は等化ではない。

すなわち、同一帯域を持つ異種の情報がそれぞれ

[1]→[3], [2]→[4] と流れる時 図Ⅲ.6.(a)の系では

両情報の間に混線は生じないが 同図(b)の系では

同一帯域を分離して扱うことができない。このような

場合には 同図(a)の等価系として、情報源の数に見

合った ダミー伝送路を持つ 同図(c) のような系を考え、各ダミー伝送路は、それぞれに対応した情報源からの信号のみを通すものと定義すれば良い。

この系を用いると、一つの情報源の発生する信号に対しては同図(b)と等化であり、分岐点等化器、合流点等化器として、各情報源の発生する信号毎に扱い、最適化すれば良い。これにより異なる情報源からの同一帯域の信号が、異なる入力端から入り、それぞれ異なる出力端に抜けてゆく前記の [1] → [3], [2] → [4] 等の流れを扱うことができる。こうして各情報源の信号毎に最適化された等価系を、同図(a)の形に戻す場合にも伝送帯域の重なりは起らず問題が生じない。

この際同図(c)の系の分岐点等化器の平均電力制限は各情報源の信号にまたがって行なわれるから、各情報源の信号毎に最適化を行なう場合にも、出力伝送路が同一であれば、分岐点等化器の未定乗数は同一となる必要のある点は注意を要する。すなわち、分岐点等化

器のある出力端への最適等化特性が各情報源毎に求められた時、各等化特性がこの出力端に因する未定乗数を共通項として持つことになる。

一方 端末等化器と合流点等化器あるいは分岐点等化器との複合した等化器は 図 III.7 のようにダミー伝送路を用いることで容易に等価変換できる。

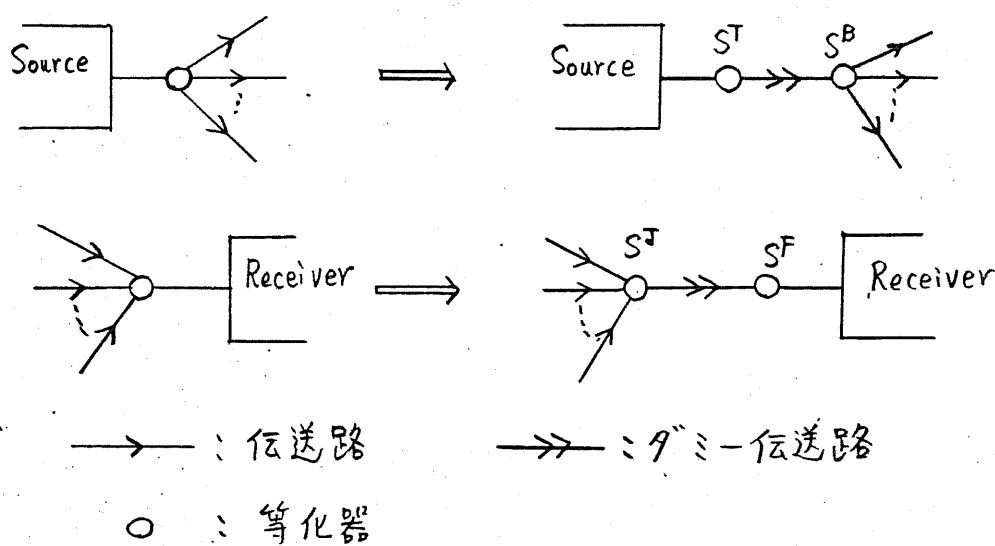


図 III.7 複合等化器

ダミー伝送路の消去は、得られた最適解において、このダミー伝送路の両端に接続された等化器特性を一つの等化器とみなし、ダミー伝送路で加わる雑

音  $N_D(s) \rightarrow 0$  の極限を考えれば良い。

### § 2.5 一般的な伝達関数の表現

経路の接続関係が具体的に定まらない中継網の伝達関数を具体的に表現することはできない。そこで、以下に伝達関数の一般的な表現を定義する。

中継網に含まれる等化器  $S_i(s)$  の出力端から、等化器  $S_j(s)$  の入力端へのいくつかの経路の持つ伝達関数の総和である総合伝達関数を

$$\pi_{S_i S_j}(s)$$

と表わす (図 III・8)。

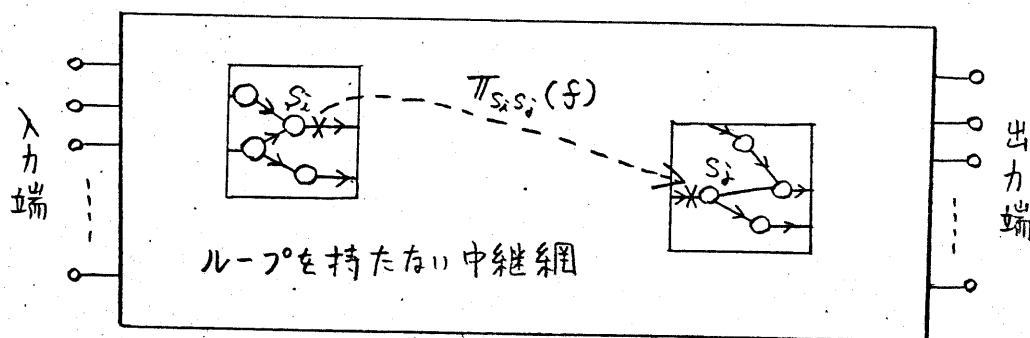


図 III・8 一般的な伝達関数の表現

系の入出力端 (単一情報源受信者対の場合 1 対) はそれぞれ "I", "O" で表わす。従って この系の入力端が

ら出力端への総合伝達関数は

$$\pi_{I_0}(f)$$

と表わされることになる。

又、総合伝達関数  $\pi_{S_i S_j}(f)$  の含む経路のうち等化器  $S_m(f)$  を通って等化器  $S_i(f)$  と  $S_j(f)$  を結んでいる経路と等化器  $S_m(f)$  を通らなものを分離することができ、この総合伝達関数をそれぞれ

$$\pi_{S_i S_j}^{S_m}(f), \quad \overline{\pi_{S_i S_j}^{S_m}}(f)$$

と表わす。従って

$$\pi_{S_i S_j}(f) = \pi_{S_i S_j}^{S_m}(f) + \overline{\pi_{S_i S_j}^{S_m}}(f) \quad (3.2.4)$$

の関係がある。

## § 2.6 電力制限の表現

中継網に含まれる等化器のうち、受信等化器を除いた残りの等化器のうち任意の1つ  $S_i(f)$  に着目し、この等化器の平均出力電力  $P_i$  による制限について考える。等化器  $S_i(f)$  の出力信号を  $u_i(t)$  とす

ると、電力制限は次式で表わされる。

$$P_i = E_{mm} [\{ u_i(t) \}^2] \quad (3.2.5)$$

但し  $E_{mm}[\cdot]$  は信号と雑音に関する期待値を表わす。

中継網は、各部が線型要素で構成されているから、

I-§2.4 と同様にして、上記の関係は周波数領域で、

$$P_i = \int_{-\infty}^{\infty} M |\pi_{I S_i} S_i|^2 df + \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} N_j |\pi_{j S_i} S_j|^2 df \quad (3.2.6)$$

と表わせる。<sup>(注)</sup> この時  $\sum_j(\cdot)$  は中継網で相加する雑音すべてに関する総和を表わす。等化器  $S_i(f)$  の後段で相加する雑音もあるから、伝達関数  $\pi_{j S_i}$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) の中には零のものもある。

以下の章で扱う変分の議論においては、上記の平均電力の表現式を、ある等化器  $S_m(f)$  に着目して変形を行なう操作が必要となる。そこでこの等化器  $S_m(f)$  に着目した表現を与えると次式となる。

---

(注) 等化器出力端で  $SNR \gg 1$  であれば第2項は無視できる。

$$\begin{aligned}
 P_i &= \int_{-\infty}^{\infty} |M| \left( \pi_{IS_m} S_m \pi_{S_m S_i} + \overline{\pi_{IS_i}^{S_m}} \right) |S_i|^2 df \\
 &+ \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} |W_j| \left( \pi_{T_j S_m} S_m \pi_{S_m S_i} + \overline{\pi_{T_j S_i}^{S_m}} \right) |S_i|^2 df
 \end{aligned}
 \tag{3.2.7}$$

この式は 等化特性  $S_m(f)$  の変化により等化器  $S_i(f)$  の平均電力に変化を及ぼす項と無関係な項に分離して表現している。

### § 3: 単一径路の定理

本章では、以下の章の各定理の証明に際して有効な、最適解の径路の単一性に関する定理を証明する。この定理は相互情報量あるいは平均二乗誤差のいずれの評価基準のもとでも成立する。

この定理及びその証明に先だて、直並列系の最適解に関する検討を加え、このような性質の存在を示唆する事実を示す。

#### § 3.1 直並列系の最適解の条件

本節では III-§ 2 で定義した中継網に含まれる等化器のうち 四 III-9 に示すような分岐点等化器

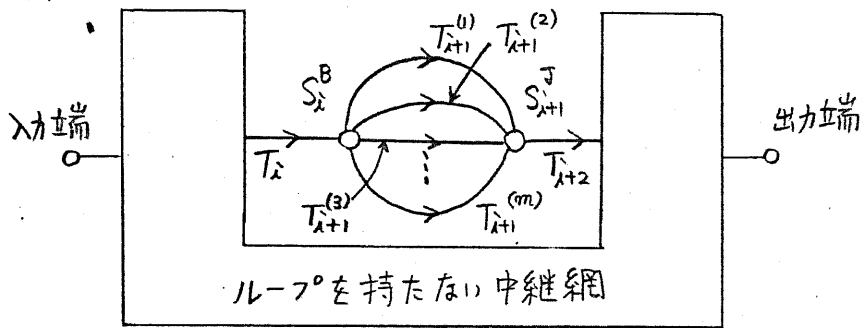
$$S_{\lambda}(f) = S_{\lambda}^B(f) = \bigcup_{\ell} S_{\lambda}^{(\ell)}(f) \quad (3.3.1)$$

及び合流点等化器

$$S_{\lambda+1}(f) = S_{\lambda+1}^J(f) = \bigcup_{\ell} S_{\lambda+1}^{(\ell)}(f) \quad (3.3.2)$$

の最適解に対する検討を行ない、単一径路の定理の存在を示唆する事実に触れる。





→ : 伝送路      ○ : 等化器

図 III.9 直並列系

等化器  $S_x^B(f)$  より前、及び等化器  $S_{x+1}^J(f)$  より後の接続関係及び中継網の他の部分の接続関係は向わない。

本節では、平均二乗誤差を最適化基準にとり上げる。二つの等化器  $S_x^B(f)$ ,  $S_{x+1}^J(f)$  に着目してこのアナログ中継網の平均二乗誤差を表わすと

$$\begin{aligned}
 D &= \int_{-\infty}^{\infty} E'_s (S_0, S_1, \dots, S_m) df \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ |M| \pi_{S_0}^{\bar{S}_x} + \pi_{S_x} \left( \sum_{\ell} S_x^{(\ell)} T_{x+1}^{(\ell)} S_{x+1}^{(\ell)} \right) \pi_{S_{x+1}0} - 1 \right]^2 \\
 &\quad + \sum_{j \neq x+1} N_j \left| \pi_{T_j0}^{\bar{S}_x} \right|^2 + \sum_{j \neq x+1} N_j \left| \pi_{T_j S_x} \left( \sum_{\ell} S_x^{(\ell)} T_{x+1}^{(\ell)} S_{x+1}^{(\ell)} \right) \pi_{S_{j+1}0} \right|^2 \\
 &\quad + \sum_{\ell=1}^m N_{x+1}^{(\ell)} \left| S_{x+1}^{(\ell)} \pi_{S_{x+1}0} \right|^2 \right] df \tag{3.3.3}
 \end{aligned}$$

となる。この時、注目している伝送路及びそこで

相加する雑音をそれぞれ  $T_{\lambda+1}^{(l)}$ ,  $N_{\lambda+1}^{(l)}$  ( $l=1, 2, \dots, m$ ) とした。

第1項は情報信号の伝送歪による成分、第4項は注目している部分で相加する雑音による成分、第2, 3項はアナログ中継網の他の部分で相加する雑音のうち、等化器  $S_{\lambda+1}^J(f)$  を通過する成分と、しない成分を分離して表現したものである。従って、第2, 3項に共通に含まれる雑音  $N_j(f) \cdot (j \neq \lambda, \lambda+1)$  も存在する。

一方、平均電力制限は、注目している等化器については  $SNR \gg 1$  としてそれぞれ

$$P_{\lambda}^{(l)} = \int_{-\infty}^{\infty} M |T_{IS_{\lambda}} S_{\lambda}^{(l)}|^2 df \quad (l=1, 2, \dots, m) \quad (3.3.4)$$

$$P_{\lambda+1} = \int_{-\infty}^{\infty} M |T_{IS_{\lambda}} (\sum_l S_{\lambda}^{(l)} T_{\lambda+1}^{(l)} S_{\lambda+1}^{(l)})|^2 df \quad (3.3.5)$$

となる。

この時、各等化器の平均出力電力をそれぞれ  $P_{\lambda}^{(l)}$  ( $l=1, 2, \dots, m$ ),  $P_{\lambda+1}$  とした。

一方、アナログ中継網の他の部分の等化器の平均電力制限は、各等化器の出力電力を  $P_k$  ( $k \neq \lambda, \lambda+1$ ) として一般的に次式で表わすことができる。

$$P_k = \int_{-\infty}^{\infty} M \left| \left\{ \pi_{IS_k}^{\overline{S_{i+1}}} + \pi_{IS_i} \left( \sum_l S_i^{(l)} T_{i+1}^{(l)} S_{i+1}^{(l)} \right) \pi_{S_{i+1}S_k} \right\} S_k \right|^2 df$$

( $k=1, 2, \dots, i-1, i+2, \dots, n-1$ ) (3.3.6)

等化器の接続関係によっては、第1項が零の場合も、第2項が零の場合もある。

三つの電力制限式(式(3.3.4), (3.3.5), (3.3.6))の被積分関数をそれぞれ  $P_i^{(l)}(f)$ ,  $P_{i+1}(f)$ ,  $P_k(f)$  と表わすと、等化器  $S_i(f)$ ,  $S_{i+1}(f)$  の最適解は次式を満足する必要がある。

$$\frac{\partial F}{\partial S_i^{(l)}} \triangleq \frac{\partial}{\partial S_i^{(l)}} \left[ E'_S + \sum_l \lambda_i^{(l)} P_i^{(l)} + \sum_{k \neq i, i+1, n} \lambda_k P_k + \lambda_{i+1} P_{i+1} \right] = 0$$

(3.3.7)

$$\frac{\partial F}{\partial S_{i+1}^{(l)}} \triangleq \frac{\partial}{\partial S_{i+1}^{(l)}} \left[ E'_S + \sum_l \lambda_i^{(l)} P_i^{(l)} + \sum_{k \neq i, i+1, n} \lambda_k P_k + \lambda_{i+1} P_{i+1} \right] = 0$$

(3.3.8)

( $l=1, 2, \dots, m$ )

式(3.3.3), (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6)を上式に代 $\lambda$ して得らる

る  $\Rightarrow$  の方程式を用いると

$$0 = S_i^{(l)} \frac{\partial F}{\partial S_i^{(l)}} - S_{i+1}^{(l)} \frac{\partial F}{\partial S_{i+1}^{(l)}}$$

$$= -N_{i+1}^{(l)} |S_{i+1}^{(l)} \pi_{S_{i+1}0}|^2 + \lambda_i^{(l)} M |\pi_{IS_i} S_i^{(l)}|^2$$

( $l=1, 2, \dots, m$ ) (3.3.9)

の関係を得ることが出来る。

すなわち

$$|S_i^{(\ell)}|^2 = \frac{W_{i+1}^{(\ell)}}{\lambda_i^{(\ell)} M} \frac{|\pi_{S_{i+1}0}|^2}{|\pi_{IS_i}|^2} |S_{i+1}^{(\ell)}|^2 \quad (\ell=1, 2, \dots, m) \quad (3.3.10)$$

の関係がある。

従って、各等化器  $S_i^{(\ell)}(f)$  ( $\ell=1, 2, \dots, m$ ) の位相特性を表

わすために未知関数  $\theta_\ell(f)$  ( $\ell=1, 2, \dots, m$ ) を用いると

$$S_i^{(\ell)} = \sqrt{\frac{W_{i+1}^{(\ell)}}{\lambda_i^{(\ell)} M}} \frac{\pi_{S_{i+1}0}^*}{\pi_{IS_i}} S_{i+1}^{(\ell)*} \exp(j\theta_\ell) \quad (\ell=1, 2, \dots, m) \quad (3.3.11)$$

と表わせる。

一方式 (3.3.7) から

$$\begin{aligned} 0 &= S_i^{(\ell)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S_i^{(\ell)}} \\ &= M \left\{ \pi_{IS_i} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \pi_{S_{i+1}0} \right\} \\ &\quad \left\{ \pi_{IS_i} + \pi_{IS_i} \left( \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \right) \pi_{S_{i+1}0} - 1 \right\}^* \\ &\quad + \sum_{j \neq i+1} W_j \left\{ \pi_{T_j S_i} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \pi_{S_{i+1}0} \right\} \left\{ \pi_{T_j S_i} \left( \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \right) \pi_{S_{i+1}0} \right\}^* \\ &\quad + \lambda_i^{(\ell)} M |\pi_{IS_i} S_i^{(\ell)}|^2 \\ &\quad + \lambda_{j+1} M \left\{ \pi_{IS_i} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \right\} \left\{ \pi_{IS_i} \left( \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \right) \right\}^* \\ &\quad + \sum_{k \neq i, i+1, m} \lambda_k M \left\{ \pi_{IS_i} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \pi_{S_{i+1} S_k} S_k \right\} \end{aligned}$$

(次頁へ)

$$\left\{ \pi_{IS_k} \bar{S}_k + \pi_{IS_i} \left( \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \right) \pi_{S_i S_k} S_k \right\}^* \quad (3.3.12)$$

の関係があるから、この式に式(3.3.11)を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} & |S_i^{(\ell)}|^2 \left[ M \pi_{S_{i+1} 0} \left\{ \pi_{I 0} \bar{S}_i + \pi_{IS_i} \left( \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \right) \pi_{S_{i+1} 0} - 1 \right\}^* \right. \\ & + \sum_{j \neq i+1} N_j |\pi_{T_j S_i}|^2 \cdot \frac{|\pi_{S_{i+1} 0}|^2}{\pi_{IS_i}} \left\{ \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \right\}^* \\ & + \lambda_{i+1} M \left\{ \pi_{IS_i} \left( \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \right) \right\}^* \\ & \left. + \sum_{k \neq i, i+1, n} \lambda_k M \pi_{S_{i+1} S_k} |S_k|^2 \left\{ \pi_{IS_k} \bar{S}_i + \pi_{IS_i} \left( \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \right) \pi_{S_{i+1} S_k} \right\}^* \right] \\ & = |S_i^{(\ell)}|^2 \left[ \sqrt{\frac{\lambda_i^{(\ell)} N_{i+1}^{(\ell)}}{M}} \frac{e^{-j\theta_{\ell}}}{T_i^{(\ell)}} \pi_{S_{i+1} 0} \right] \\ & \quad (\ell=1, 2, \dots, m) \quad (3.3.13) \end{aligned}$$

が得られる。この式は、両辺に共通な  $|S_i^{(\ell)}|^2$  の項を除いて考えると、右辺のみが添字“ $\ell$ ”に依存し、左辺は“ $\ell$ ”に無関係である。従って、この  $m$  個の連立方程式が成立する為には、右辺が“ $\ell$ ”に因して不変、すなわち、

$$\frac{e^{-j\theta_1}}{T_i^{(1)}} \sqrt{\lambda_i^{(1)} N_{i+1}^{(1)}} = \frac{e^{-j\theta_2}}{T_i^{(2)}} \sqrt{\lambda_i^{(2)} N_{i+1}^{(2)}} = \dots = \frac{e^{-j\theta_m}}{T_i^{(m)}} \sqrt{\lambda_i^{(m)} N_{i+1}^{(m)}} \quad (3.3.14)$$

が成立するか、あるいは 唯一つの "j" について

$$\left\{ \begin{array}{l} S_i^{(\ell)}(f) = 0 \quad (1 \leq \ell \leq m, \ell \neq j) \\ S_j(f) \neq 0 \quad (1 \leq j \leq m) \end{array} \right. \quad (3.3.15)$$

$$S_j(f) \neq 0 \quad (1 \leq j \leq m) \quad (3.3.16)$$

となるか、又は 両者の複合したものとして、 $k (< m)$  本の経路について 式(3.3.14)の關係が成立し、残りの  $(m-k)$  本の伝送路に対応する等化器が零となるかの、いずれかの關係が成立する必要がある。

### § 3.2 条件の意味

前節で得られた条件について考える。

式(3.3.14)の關係は一般には成立しない。仮にこの關係が成立すれば、 $m$ 個の連立方程式(式(3.3.13))はすべて同一となり、最適解の条件は、電力制限のもと

で、総合伝達率

$$\prod_{T_i, T_{i+2}} = \sum_{\ell=1}^m S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{i+1}^{(\ell)} \quad (3.3.17)$$

が、式(3.3.13)で決まる特性を満足し、かつ各伝送路  $T_{i+1}^{(\ell)}(f)$

の前後の等化器  $S_i^{(\ell)}, S_{i+1}^{(\ell)}$  ( $\ell=1, 2, \dots, m$ ) の間に、式(3.

3.10)の關係が成立することに帰着する。

従って  $m$  本の並列伝送路への信号の配分は、電力制限を満足すれば任意で良いことがわかる。

式(3.3.14)の条件を、I-§7で定義した等価伝送路である“伝送路系”で相加する雑音の電力スペクトル密度と対比して考えると、この式は  $m$  本の並列伝送路が、全く等価な伝送路となる為の条件を意味していることがわかる。<sup>(注)</sup> この意味からも、各伝送路への信号の配分が任意になることは容易に理解できる。逆に、ある帯域にわたって伝送路が等価となるような条件が満足されるのは特別な場合に限られることも明らかである。

逆に上記の条件が満たされない場合には、式(3.3.15), (3.3.16)の關係又は、両者の複合した条件を満足する必要がある。式(3.3.15), (3.3.16)の關係は、 $m$ 本の伝送路のうち一本のみを伝送径路として用いることを意味している。いずれの伝送路を用いるかについては、条件

---

(注) 詳しくは II-§9 で一般的に論じる。

$$\frac{\sqrt{\lambda_{\lambda}^{(j)} N_{\lambda+1}^{(j)}}}{T_{\lambda}^{(j)}} < \frac{\sqrt{\lambda_{\lambda}^{(l)} N_{\lambda+1}^{(l)}}}{T_{\lambda}^{(l)}} \quad (l \neq j, 1 \leq l \leq m) \quad (3.3.18)$$

を満足する“ $j$ ”番目の伝送路を用いれば良いことは明らかである。この時、等化器の最適特性は、

式(3.3.10), (3.3.13),  $l=j$  の = 式により一意に定まる。

上式(式(3.3.18))の關係は周波数によって変化することから、用いる伝送路は周波数毎に式(3.3.18)により決定されることになる。

複合した条件の場合には、複數個の伝送路が式(3.3.14)の關係を満たす。この場合には、この複數個の

伝送路の値  $\sqrt{\lambda_{\lambda}^{(p_j)} N_{\lambda+1}^{(p_j)}} / T_{\lambda+1}^{(p_j)} \quad (j=1, 2, \dots, k < m)$

が、他のいずれかの伝送路の値に較べて大きい場合には、

単一伝送径路となる後者の場合に帰着し、逆に

最小となっている場合には、この複數個の伝送路が相互

に等価な伝送径路となり、前者の場合に帰着することになる。

3. 後者の条件は、ある周波数に着目した時、その

周波数を伝送している径路は唯一本であることを意味している。



一方、前者の場合は  $m$  本 (複合した条件の場合には  $k (< m)$  本) の径路の総合伝達特性が式(3.3.13)を満足すれば、各伝送路への信号の配分は任意である。従って、各伝送路にそれぞれ異なる伝送帯域を割り当て、単一の伝送径路と云う後者の場合の条件も満足するように決定することもできる。

要約すると、最適解においては、一般的にはある周波数を伝送する径路は常に一本であるが、特別な条件 (式(3.3.14)) の成立する場合には単一径路の最適解に加えて、複数径路を持つ最適解も共存し得ると云うことになる。

### § 3.3 単一径路の定理

前節までの議論から、平均二乗誤差評価のもとで、直並列系の最適解について、任意に選んだある周波数を伝送する径路は唯一つであり、特別な場合に径路が複数の解も共存する云う“単一径路”

の条件が存在することがわかった。

本節では、この単一径路の条件を拡張し、Ⅲ-§2で定義した一般的な中継網に対して、平均乗誤差あるいは相互情報量のいずれの最適化基準を用いても成立する形で単一径路に関する定理を与える。

### 定理

相互情報量評価あるいは平均乗誤差評価のもとで、ループを持たないアナログ中継網の最適解は、任意に選んだ周波数に対して、その周波数が帯域内にあれば、入出力間の伝送径路は、すべての径路  $C_1, C_2, \dots, C_m$  のうち、合流点等化器  $S_i^J(f) = \bigcup_l S_i^{(l)}(f)$  において

$$\frac{|S_i^{(j)}| N_j^e}{|\pi_x^{(j)} S_i^{(j)}|} < \frac{|S_i^{(l)}| N_l^e}{|\pi_x^{(l)} S_i^{(l)}|} \quad (1 \leq l \leq m, l \neq j) \quad (3.3.19)$$

但し  $\pi_x^{(l)}$  は径路  $C_l$  に対応した伝達関数を表わし、

"x" は任意に選んだ一点を表わすものとする。

と云う関係を満足する径路  $C_k$  唯一つに限定される。

特別な場合として

$$\frac{|S_i^{(j_1)}| |W_{j_1}^e|}{|\pi_{x S_x^{(j_1)}}|} = \frac{|S_i^{(j_2)}| |W_{j_2}^e|}{|\pi_{x S_x^{(j_2)}}|} = \dots = \frac{|S_i^{(j_k)}| |W_{j_k}^e|}{|\pi_{x S_x^{(j_k)}}|} < \frac{|S_i^{(l)}| |W_l^e|}{|\pi_{x S_x^{(l)}}|}$$

(k < m, l ≠ j\_1, j\_2, …, j\_k, 1 ≤ l ≤ m) (3.3.20)

が成立すれば、 $\pi_{x S_x^{(j_l)}} \sim \pi_{x S_x^{(j_k)}}$  で表わされる k本の径路の同一周波数に対する並列使用も最適解となる。

この時  $W_l^e(f)$  は  $\pi_{x S_x^{(l)}}(f)$  で表わされる径路  $C_l$  で相加する全雑音を、等化器  $S_x^{(l)}(f)$  の入力端で相加する雑音に換算した値を表わす。 //

この定理は、二つの最適化基準のいずれでアナログ中継網を最適化しても得られた解は各周波数について入出力端を結ぶ唯一の伝送径路を持ち、解が式(3.3.20)を満足する場合にのみ、複数の伝送径路を持つものが解となり得ることを意味している。

最適等化特性は、最適化基準から導出される方程式系を満足するように決定され、この方程式系のみで一意的に決定されるから、得られた解が更に式(3.3.20)を満足するのは、極めて特別な場合であることがわかる。

しかも、この条件が意味を持つ為には、ある有限の周波数帯域にわたって式(3.3.20)の等号が成立する必要がある。

次に、上記の定理をアナログ中継網の最適化へ応用する立場から考えてみる。アナログ中継網の最適解は、最適化基準から導かれる方程式系を満足すれば良い。従って、あらかじめ何らかの条件を加えて方程式系を変型し解を求めても、最終的に得られた解が変型前の方程式系を満足すれば十分である。この時、不適当な条件を加えると解が存在しなくなったり、もとの方程式を満足しなくなったり、あるいは解のうちいくつかの限定されたもののみが得られる結果になってしまう。

しかしこの点について単一経路の定理は式(3.3.20)が成立する特別な場合を除いて、最適解が単一経路の条件を満足することを示している。すなわち、方程式系を解く際にあらかじめ加える条件として、単一経路の条件を用いれば、すくなくとも式(3.3.20)が成立する特別な

場合を除いては常に正しい解に到達することを保証して  
いる。

しかも 具合の良いことは、式 (3.3.20) の成立する特別  
な場合は、単一径路の条件を満足する解を含む、より多くの等  
価な解が共存する場合と考えられ、この条件が成立する場  
合も、単一径路の条件のもとで正しい解に到達し得ること  
である。実際、次章以下にみるように、単一径路の  
条件をあらかじめ加えても、式 (3.3.20) の成立、不成立に  
かかわらず正しい解が得られる。従って、結果的に  
式 (3.3.20) の条件は、単一径路の条件を満足する解に加  
えて他の解が共存し得る為の条件であることが具体的に  
結果からも示された事になる。

尚 式 (3.3.20) の成立する場合に共存する解のうち  
単一径路の条件を満たさない解は、式 (3.3.20) の意味  
を検討することで容易に求めることができる。これ  
については III-§ 9 において詳しく述べる。

### § 3.4: 定理の証明

単一径路の定理は 最適解の満たすべき 必要条件を示したものであるから、単一径路の条件を満たさない系は、式(3.3.20)の成立する場合以外 最適解となり得ないことを示せば良い。

以下では 背理法により 定理の証明を行なう。

任意の点  $x$  から、等化器  $S_j(f)$  に達する  $m$  本の並列径路を持つ最適解が存在したとする。この  $m$  本の合流点等化器を  $S_i^J(f) = \bigcup_{l=1}^m S_i^{(l)}(f)$  とすると、 $m$  本の径路  $C_1, C_2, \dots, C_m$  の伝達関数を

$$\pi_{x S_i^{(l)}}^{(l)}(f) \quad (l=1, 2, \dots, m) \quad (3.3.21)$$

と表わすことができる。  $m$  本の径路が 1つの合流点を共有しない場合には、それぞれの合流点について以下の議論を展開すれば良い。

径路  $\pi_{x S_i^{(l)}}^{(l)}(f)$  で相加する全雑音電力を、合流点等化器の入力端で相加する雑音に換算して  $W_l^e(f)$  と表わす(図Ⅲ・10)。

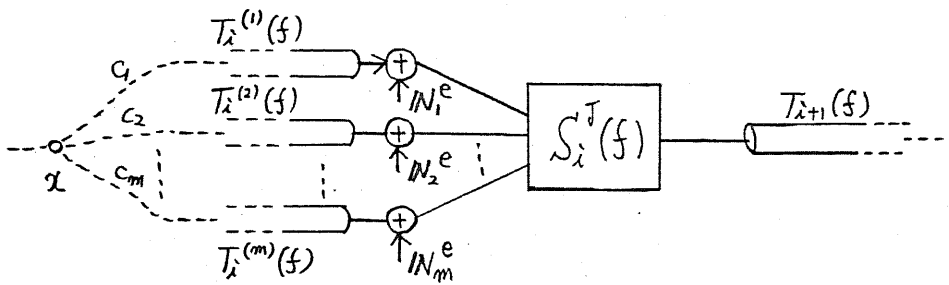


図 III.10 並列径路

このような  $m$  本の径路を持つ系は最適解でないことを示せば良いから、与えられた電力制限のもとで等化特性を変化させて、与えられた系を上まわる特性の系を構成し得ることを示せば良い。

そこで、ある伝送帯域  $I_T$  で

$$\frac{|S_i^{(l)}| N_l^e}{|\pi_{\alpha} S_i^{(l)}|} > \frac{|S_i^{(k)}| N_k^e}{|\pi_{\alpha} S_i^{(k)}|} \quad (f \in I_T) \quad (3.3.22)$$

を満たす二つの径路  $C_l, C_k$  を選ぶ。この径路に

対する合流点等化器を次のように変型する。

$$S_i^{(l)} \rightarrow S_M^{(l)} = \begin{cases} S_i^{(l)} & f \notin I_T \\ S_i^{(l)}(1-\Delta) & f \in I_T \end{cases} \quad (3.3.23)$$

$$S_i^{(k)} \rightarrow S_M^{(k)} = \begin{cases} S_i^{(k)} & f \notin I_T \\ S_i^{(k)} + S_i^{(l)} \frac{\pi_{\alpha} S_i^{(l)}}{\pi_{\alpha} S_i^{(k)}} \Delta & f \in I_T \end{cases} \quad (3.3.24)$$

但し  $\Delta > 0$  で充分小とする。

この変型を行っても合流点等化器に前置された部分は何ら変化しない。一方、合流点等化器の出力に含まれる情報信号の成分は帯域外  $I_T^c$  では明らかに変化せず、又点  $\alpha$  での情報信号の成分を  $M_\alpha(f)$  とすると、

$$\begin{aligned}
 & M_\alpha \left( \pi_{\alpha S_i^{(l)}}^{(l)} S_M^{(l)} + \pi_{\alpha S_i^{(k)}}^{(k)} S_M^{(k)} \right) \\
 &= M_\alpha \left\{ \pi_{\alpha S_i^{(l)}}^{(l)} S_i^{(l)} (1-\Delta) + \pi_{\alpha S_i^{(k)}}^{(k)} \left( S_i^{(k)} + S_i^{(l)} \frac{\pi_{\alpha S_i^{(l)}}^{(l)}}{\pi_{\alpha S_i^{(k)}}^{(k)}} \Delta \right) \right\} \\
 &= M_\alpha \left( \pi_{\alpha S_i^{(l)}}^{(l)} S_i^{(l)} + \pi_{\alpha S_i^{(k)}}^{(k)} S_i^{(k)} \right) \quad (3.3.25) \\
 & \quad (f \in I_T)
 \end{aligned}$$

の由係があるから帯域内  $I_T$  でも変化せず、上記の変型による点  $\alpha$  から等化器  $S_i^J(f)$  の出力立端への総合伝達関数  $\pi_{\alpha T_{iH}}(f)$  の変化はない。すなわち、情報信号の流れは合流点等化器  $S_i^J(f)$  の入力端までは全く変化せず、合流点等化器の内部で変化するがこの出力立端では又同一となることがわかる。従って信号成分に関しては、中継網の各等化器の平均電力制限には一切影響を及ぼさず系の出力も変化しないから、評価関数への影響はない。



一方、合流点等化器  $S_i^{\pm}(f)$  の出力端における雑音成分について考える。点  $\alpha$  以前で相加する雑音成分については、

式(3.3.25)と同様にして、変化の無いことがわかる。従って、

径路  $\pi_{\alpha S_i^{(k)}}^{(k)}(f)$ ,  $\pi_{\alpha S_i^{(l)}}^{(l)}(f)$  で相加する雑音  $N_k^e(f)$ ,  $N_l^e(f)$

について考えれば良い。帯域外  $I_T^c$  では変化しないから

帯域内  $I_T$  で考える。

変型前の雑音成分は

$$N^e = N_k^e |S_i^{(k)}|^2 + N_l^e |S_i^{(l)}|^2 \quad (3.3.26)$$

である。一方、変型後は

$$\begin{aligned} N_M^e &= N_l^e |S_M^{(l)}|^2 + N_k^e |S_M^{(k)}|^2 \\ &= N_l^e |S_i^{(l)}|^2 (1-\Delta)^2 + N_k^e \left| S_i^{(k)} + S_i^{(l)} \frac{\pi_{\alpha S_i^{(l)}}^{(l)}}{\pi_{\alpha S_i^{(k)}}^{(k)}} \Delta \right|^2 \\ &\approx N_k^e |S_i^{(k)}|^2 + N_l^e |S_i^{(l)}|^2 \\ &\quad - 2\Delta |S_i^{(l)}|^2 N_l^e + 2\Delta \operatorname{Re} \left\{ S_i^{(l)} S_i^{(k)*} \frac{\pi_{\alpha S_i^{(l)}}^{(l)}}{\pi_{\alpha S_i^{(k)}}^{(k)}} \right\} \\ &\leq N^e \\ &\quad - 2\Delta |S_i^{(l)}| \pi_{\alpha S_i^{(l)}}^{(l)} \left\{ \frac{|S_i^{(l)}| N_l^e}{|\pi_{\alpha S_i^{(l)}}^{(l)}|} - \frac{|S_i^{(k)}| N_k^e}{|\pi_{\alpha S_i^{(k)}}^{(k)}|} \right\} \quad (3.3.27) \end{aligned}$$

従って

$$N^e - N_M^e \geq 2\Delta |S_i^{(l)}| \pi_{\alpha S_i^{(l)}}^{(l)} \left\{ \frac{|S_i^{(l)}| N_l^e}{|\pi_{\alpha S_i^{(l)}}^{(l)}|} - \frac{|S_i^{(k)}| N_k^e}{|\pi_{\alpha S_i^{(k)}}^{(k)}|} \right\} > 0$$

(3.3.28)

より 
$$N^e > N_M^e \quad (3.3.29)$$

となる。

すなわち 式 (3.3.23), (3.3.24) の変型により、情報信号及び中継網の他の部分に全く影響を及ぼさずに、合流点等化器の出力に含まれる雑音を減少させ得たことになる。

従って、雑音成分の減少により評価因数の値は改善され、最初の最適系の仮定に矛盾し、結局定理が証明されたことになる。この時、合流点等化器以前の雑音成分は変化せず以後は減少しているから、平均電力制限には余裕を生じ不都合はない。

又 この証明は 平均二乗誤差、相互情報量等の評価基準に依らない。

式 (3.3.22) について等号が成立する場合には、この二つの径路を一つの径路とみなして、他の径路との間に同様の議論を展開すれば良い。

## § 4. 中継器に関する定理

アナログ中継網に含まれる等化器の内、中継器の最適等化特性を示す。この際最適化基準としては、相互情報量、平均二乗誤差のいずれを用いても、同一の結論が得られる。

### § 4.1 定理

中継器(図Ⅲ・11)の最適等化特性について次の定理が成立する。

#### 定理

相互情報量評価あるいは平均二乗誤差評価のもとで、ループを持たないアナログ中継網の中継器の最適等化特性は、伝送帯域内で

$$|S_{\lambda}^R(f)|^2 = \frac{1}{|T_{\lambda}|} \sqrt{\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \frac{N_{\lambda+1}}{N_{\lambda}}} \frac{1}{|T_{\lambda+1}|} \quad (3.4.1)$$

帯域外で零である。  $\lambda_{i-1}$ ,  $\lambda_i$  は電力制限によ

り決まる未定乗数を表わす。但し相互情報量評

他の場合、受信等化器  $S_m^F(f)$  の直前の中継器  $S_{m-1}^R(f)$  を除く。

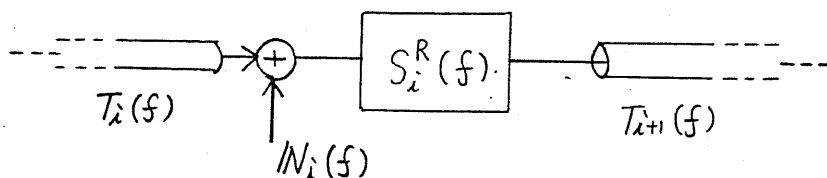


図 III・11 中継器

この定理からアナログ中継系においても、中継器特性は、単純な直列系における中継器と全く同一の特性を持ち、I-§7.1 で定義した“伝送路系”の機能単位である中継単位構成の役割を持っていることがわかる。すなわち、中継器特性は局所的な伝送路あるいは雑音の特性により最適化され、無損失の等価伝送路を構成している。

#### § 4.2 補助定理

本節では中継器に関する定理(前節)の証明に先だって、この定理の証明に有用な補助定理を示す。

この補助定理は相互情報量あるいは平均二乗誤差を最適化基準とした際に、これらの評価関数が共通に持つ

一つの性質について述べたものである。

### 補助定理

相互情報量あるいは平均乗誤差による評価関数を  
中継網に含まれる等化器特性  $S_i(f)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) の関数として  
一般的に

$$E[S_0, S_1, \dots, S_m] = \int_{-\infty}^{\infty} E'[S_0, S_1, \dots, S_m] df \quad (3.4.2)$$

と表わす。この時、中継器等化特性  $S_i(f) = S_i^R(f)$  及び  
この等化器に前置あるいは後置される等化器特性をそれぞれ  
 $S_{i-1}(f)$ ,  $S_{i+1}(f)$  と表わすと

$$\begin{aligned} S_{i-1} \frac{\partial}{\partial S_{i-1}} E' - S_i \frac{\partial}{\partial S_i} E' \\ = -N_i |S_i T_{i+1}|^2 |\pi_{T_{i+1}0}|^2 \cdot G \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

$$\begin{aligned} S_i \frac{\partial}{\partial S_i} E' - S_{i+1} \frac{\partial}{\partial S_{i+1}} E' \\ = -N_{i+1} |\pi_{T_{i+1}0}|^2 \cdot G \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

の関係が成立する。但し  $G(f)$  は添字“ $i$ ”に依存しない  
関数を表わす。又、等化器  $S_{i-1}(f)$ ,  $S_{i+1}(f)$  がそれぞれ  
分岐点等化器あるいは合流点等化器の場合には、単一

経路の条件を用い、各周波数に対応する等化器を表わす。

例えば  $S_{i-1}(f)$  が合流点等化器であれば

$$\begin{aligned} S_{i-1}(f) &= S_{i-1}^{\text{F}}(f) = \bigcup_{l=1}^m S_{i-1}^{(l)}(f) \\ &\triangleq \sum_{l=1}^m S_{i-1}^{(l)}(f) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

と表わされ、この時  $S_{i-1}^{(l)}(f)$  ( $l=1, 2, \dots, m$ ) は相互に共通の帯域を持たない。  
(注)

この補助定理の意味するところは、中継器の前後の等化器を含めた三つの等化器について、評価関数に対し  $S_j \frac{\partial}{\partial S_j} E'$  ( $j=i-1, i, i+1$ ) の演算を行なうと、この関数は添字“ $i$ ”の変化に対し 式(3.4.3) (3.4.4) の右辺の項を除いてすべてが共通項となり、更に右辺の中にも  $|\pi_{T_{i+1}}|^2 G$  と云う共通項を含み、添字“ $i$ ”の変化による式'の変化は、中継器  $S_i^R(f)$  とその後の伝送路特性  $T_{i+1}(f)$  及び雑音電力スペクトル密度  $N_i(f)$ ,  $N_{i+1}(f)$  と云う局所的な特性のみに依存する云う事実である。

(注) 前節の定理と同様に、相互情報量評価を用いた場合、 $i+1=m$  となるとき  $S_{i+1}(f)$  が受信等化器  $S_m^F(f)$  を意味する場合この定理は不成立となる。

## § 4.3 補助定理の証明

前節の補助定理を証明する。

まず平均乗誤差評価の場合を考える。 平均乗誤差の

場合の評価関数

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} E'_s [s_0, s_1, \dots, s_m] df \quad (3.4.6)$$

の被積分関数は、中継器  $S_i^R(f)$  に着目して次のように表わされる。

$$\begin{aligned} E'_s [s_0, s_1, \dots, s_m] = & M \left| \pi_{T_0}^{\bar{s}_i} + \pi_{T_{S_{i-1}}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1} \pi_{S_{i+1}0} - 1 \right|^2 \\ & + \sum_{j \neq i, i+1} N_j \left| \pi_{T_j}^{\bar{s}_i} \right|^2 + \sum_{j \neq i, i+1} N_j \left| \pi_{T_j S_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1} \pi_{S_{i+1}0} \right|^2 \\ & + N_i \left| S_i T_{i+1} S_{i+1} \pi_{S_{i+1}0} \right|^2 + N_{i+1} \left| S_{i+1} \pi_{S_{i+1}0} \right|^2 \quad (3.4.7) \end{aligned}$$

第1項は 情報信号の伝送歪による成分を表わし、第2項以下は各伝送路で相加する雑音のうち、それぞれ、等化器  $S_i(f)$  を経ずに出力端に達するもの、等化器  $S_i(f)$  を経て出力端に達するもの、及び等化器  $S_i(f)$  の直前と直後で加わるものを表わしている。従って第2項と第3項に共通に含まれる雑音  $N_j$  ( $j \neq i, i+1$ ) も存在す

ここで 式 (3.4.3) の左辺を実行すると

$$\begin{aligned}
 & S_{\lambda-1} \frac{\partial}{\partial S_{\lambda-1}} E_s' - S_{\lambda} \frac{\partial}{\partial S_{\lambda}} E_s' \\
 &= \left\{ M \left( \pi_{I S_{\lambda-1}} S_{\lambda-1} T_{\lambda} S_{\lambda} T_{\lambda+1} S_{\lambda+1} \pi_{S_{\lambda+1} 0} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left( \pi_{I 0}^{\bar{S}_{\lambda}} + \pi_{I S_{\lambda-1}} S_{\lambda-1} T_{\lambda} S_{\lambda} T_{\lambda+1} S_{\lambda+1} \pi_{S_{\lambda+1} 0} - 1 \right)^* \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j \neq \lambda, \lambda+1} W_j \left| \pi_{T_j S_{\lambda-1}} S_{\lambda-1} T_{\lambda} S_{\lambda} T_{\lambda+1} S_{\lambda+1} \pi_{S_{\lambda+1} 0} \right|^2 \right\} \\
 &- \left\{ M \left( \pi_{I S_{\lambda}} S_{\lambda} T_{\lambda+1} S_{\lambda+1} \pi_{S_{\lambda+1} 0} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left( \pi_{I 0}^{\bar{S}_{\lambda}} + \pi_{I S_{\lambda}} S_{\lambda} T_{\lambda+1} S_{\lambda+1} \pi_{S_{\lambda+1} 0} - 1 \right)^* \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j \neq \lambda, \lambda+1} W_j \left| \pi_{T_j S_{\lambda}} S_{\lambda} T_{\lambda+1} S_{\lambda+1} \pi_{S_{\lambda+1} 0} \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + W_{\lambda} \left| S_{\lambda} T_{\lambda+1} S_{\lambda+1} \pi_{S_{\lambda+1} 0} \right|^2 \right\} \\
 &= -W_{\lambda} \left| S_{\lambda} T_{\lambda+1} \right|^2 \left| \pi_{T_{\lambda+1} 0} \right|^2 \tag{3.4.8}
 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
 & S_{\lambda} \frac{\partial}{\partial S_{\lambda}} E_s' - S_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial S_{\lambda+1}} E_s' \\
 &= -W_{\lambda+1} \left| S_{\lambda+1} \pi_{S_{\lambda+1} 0} \right|^2 = -W_{\lambda} \left| \pi_{T_{\lambda+1} 0} \right|^2 \tag{3.4.9}
 \end{aligned}$$

となり 平均二乗誤差の場合には証明された。この時

$$G(f) = 1 \tag{3.4.10}$$

になっている。

次に 相互情報量評価の場合を考える。



相互情報量の評価関数

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} E_I' [S_0, S_1, \dots, S_m] d\mathcal{F} \quad (3.4.11)$$

の被積分関数は、系の出力に含まれる全雑音の電カス<sup>10</sup>ノトル密度を

$$N_T(\mathcal{F}) \triangleq \sum_j N_j |\pi_{T_j 0}|^2 \quad (3.4.12)$$

系の出力の電カス<sup>10</sup>ノトル密度を

$$R(\mathcal{F}) \triangleq M |\pi_{I 0}|^2 + N_T \quad (3.4.13)$$

とすると

$$E_I' [S_0, S_1, \dots, S_m] = \frac{1}{2} \{ \log R - \log N_T \} \quad (3.4.14)$$

となる。<sup>(注)</sup> ここで 平均 = 乗誤差の場合と同様に、

中継器  $S_i^R(\mathcal{F})$  に着目した伝達関数の表現

$$\begin{aligned} N_T &= \sum_{j \neq \lambda, \lambda+1} N_j |\pi_{T_j S_{\lambda-1}} S_{j-1} T_{\lambda} S_{\lambda} T_{\lambda+1} S_{\lambda+1} \pi_{S_{\lambda+1} 0}|^2 \\ &\quad + \sum_{j \neq \lambda, \lambda+1} N_j |\pi_{T_j \bar{S}_{\lambda}}|^2 \\ &\quad + N_{\lambda} |S_{\lambda} T_{\lambda+1} S_{\lambda+1} \pi_{S_{\lambda+1} 0}|^2 + N_{\lambda+1} |S_{\lambda+1} \pi_{S_{\lambda+1} 0}|^2 \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

$$R = M |\pi_{I 0}^{\bar{S}_{\lambda}} + \pi_{I S_{\lambda-1}} S_{\lambda-1} T_{\lambda} S_{\lambda} T_{\lambda+1} S_{\lambda+1} \pi_{S_{\lambda+1} 0}|^2 + N_T \quad (3.4.16)$$

(注) I-§ 3.2 参照

を用いて式(3.4.3)を実行すると

$$\begin{aligned}
 & S_{i-1} \frac{\partial}{\partial S_{i-1}} E'_I - S_i \frac{\partial}{\partial S_i} E'_I \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{R} \left\{ M \left( \prod_{T, S_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1} \prod_{S_{i+1}, 0} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left( \prod_{I, 0} \bar{S}_i + \prod_{I, S_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1} \prod_{S_{i+1}, 0} \right)^* \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{j \neq i, i+1} N_j \left| \prod_{T, S_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1} \prod_{S_{i+1}, 0} \right|^2 \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{N_T} \left\{ \sum_{j \neq i, i+1} N_j \left| \prod_{T, S_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1} \prod_{S_{i+1}, 0} \right|^2 \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{R} \left\{ M \left( \prod_{I, S_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1} \prod_{S_{i+1}, 0} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left( \prod_{I, 0} \bar{S}_i + \prod_{I, S_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1} \prod_{S_{i+1}, 0} \right)^* \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{j \neq i, i+1} N_j \left| \prod_{T, S_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1} \prod_{S_{i+1}, 0} \right|^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + N_i \left| S_i T_{i+1} S_{i+1} \prod_{S_{i+1}, 0} \right|^2 \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{N_T} \left\{ \sum_{j \neq i, i+1} N_j \left| \prod_{T, S_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1} \prod_{S_{i+1}, 0} \right|^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + N_i \left| S_i T_{i+1} S_{i+1} \prod_{S_{i+1}, 0} \right|^2 \right\} \right] \\
 &= -N_i |S_i T_{i+1}| \left| \prod_{T_{i+1}, 0} \right|^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{N_T} \right) \quad (3.4.17)
 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
 & S_i \frac{\partial}{\partial S_i} E'_I - S_{i+1} \frac{\partial}{\partial S_{i+1}} E'_I \\
 &= -N_{i+1} \left| S_{i+1} \prod_{S_{i+1}, 0} \right|^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{N_T} \right) \quad (\text{次頁へ})
 \end{aligned}$$

$$= -N_{i+1} |\pi_{T_{i+1}, 0}|^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{N_R} - \frac{1}{N_T} \right) \quad (3.4.18)$$

となり、相互情報量評価の場合(注1)についても証明された。

この時

$$G(f) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{N_R} - \frac{1}{N_T} \right) \quad (3.4.19)$$

である。

これで 補助定理に関する証明はすべて終わった。

#### § 4.4 定理の証明

§ 4.2 の補助定理を用いて、中継器に関する定理を証明する。

中継網に含まれる各等化器  $S_i(f)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) の出力端で  $SNR \gg 1$  とすると(注2) 平均電力制限は次式で表わされる。着目している中継器  $S_i^R(f)$  及び

これに前置された等化器  $S_{i-1}(f)$  については

$$P_{i-1} = \int_{-\infty}^{\infty} N_M |\pi_{IS_{i-1}} S_{i-1}|^2 df \quad (3.4.20)$$

$$P_i = \int_{-\infty}^{\infty} N_M |\pi_{IS_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i|^2 df \quad (3.4.21)$$

(注1)  $\frac{\partial E_i}{\partial S_m} = 0$  であるから  $i+1=m$  では不成立となる。(注2) 以下の章ではこの仮定を用いる。

一方 等化器  $S_{i+1}(f)$  については 合流点の場合

$$P_{i+1} = \int_{-\infty}^{\infty} |M| \left| \prod_{I S_{i+1}} \overline{S_i} S_{i+1} + \prod_{I S_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1} \right|^2 df \quad (3.7.22)$$

分岐点の場合

$$P_{i+1}^{(l)} = \int_{-\infty}^{\infty} |M| \left| \prod_{I S_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1}^{(l)} \right|^2 df \quad (l=1, 2, \dots, m) \quad (3.7.23)$$

と表わされる。

他の等化器  $S_j(f)$  ( $j \neq i-1, i, i+1, 0 \leq j \leq n-1$ ) については

一般的に

$$P_j = \int_{-\infty}^{\infty} |M| \left| \prod_{I S_j} \overline{S_i} S_j + \prod_{I S_{i-1}} S_{i-1} T_i S_i T_{i+1} S_{i+1} \prod_{I S_{i+1} S_j} S_j \right|^2 df \quad (j \neq i-1, i, i+1, 0 \leq j \leq n-1)$$

(3.7.24)

と表わすことができる。

各積分の被積分関数をそれぞれ  $P_{i-1}(f), P_i(f), P_{i+1}(f),$

$P_{i+1}^{(l)}(f), P_j(f)$  と表わすと、上式から

$$S_j \frac{\partial P_P}{\partial S_j} - S_{j+1} \frac{\partial P_P}{\partial S_{j+1}} = 0 \quad (j=i-1, i, P=i+1, j) \quad (3.7.25)$$

が成立する。

問題は 評価関数によって決まる関数  $E[S_0, S_1, \dots, S_m]$

と上記の関数から方程式

$$\frac{\partial F}{\partial S_r} \triangleq \frac{\partial}{\partial S_r} \left[ E' + \sum_{j \neq i-1, i, i+1} \lambda_j P_j + \lambda_{i-1} P_{i-1} + \lambda_i P_i + \lambda_{i+1} P_{i+1} \right] = 0 \quad (r=i-1, i, i+1) \quad (3.7.26)$$

を得て、これを中継器特性  $S_i^R(s)$  について解けば良い。

等化器  $S_{i+1}(s)$  が分岐点等化器の場合には、式(3.4.26)

の " $\lambda_{i+1} |P_{i+1}|$ " の項は " $\lambda_{i+1}^{(2)} |P_{i+1}^{(2)}|$ " になる。

式(3.4.26) を解く為に 補助定理 及び 式(3.4.25) の

関係を用いて計算すると

$$\begin{aligned} 0 &= S_{i+1} \frac{\partial F}{\partial S_{i+1}} - S_i \frac{\partial F}{\partial S_i} \\ &= -N_i |S_i T_{i+1}|^2 |\pi_{T_{i+1}0}|^2 \phi + \lambda_{i+1} M |\pi_{IS_{i+1}} S_{i+1}|^2 \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

従って

$$\lambda_{i+1} M |\pi_{IS_{i+1}} S_{i+1}|^2 = N_i |S_i T_{i+1}|^2 |\pi_{T_{i+1}0}|^2 \phi \quad (3.4.28)$$

の関係が得られる。同様に

$$S_i \frac{\partial F}{\partial S_i} - S_{i+1} \frac{\partial F}{\partial S_{i+1}} = 0 \quad (3.4.29)$$

より

$$\lambda_i M |\pi_{IS_{i+1}} S_{i+1} T_i S_i|^2 = N_{i+1} |\pi_{T_{i+1}0}|^2 \phi \quad (3.4.30)$$

が得られる。

そこで式(3.4.28)(3.4.30)の辺々割り算を行なう。

整理すると

$$|S_i|^2 = \frac{1}{|T_i|} \sqrt{\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \frac{N_{i+1}}{N_i}} \cdot \frac{1}{|T_{i+1}|} \quad (3.4.31)$$

となる。相互情報量評価のもとで  $i=n-1$  の時は補助定理

が使えず、この場合  $S_{n-1}(S)$  は上記の手法では定まらない。

以上で定理の証明はすべて終わった。

## § 5. 分岐点の等化特性に関する定理

アナログ中継網に含まれる等化器のうち、分岐点等化器  $S_i^B(f)$  の最適等化特性を示す。この際、最適化基準としては相互情報量、平均二乗誤差のいずれを用いても同一の結論が得られる。

### § 5.1 定理

分岐点等化器 図 III.12 の最適等化特性について次の定理が成立する。

#### 定理

相互情報量あるいは平均二乗誤差評価のもとで、ループを  
持たないアナログ中継網の分岐点等化器  $S_i^B(f) = \bigcup_l S_i^{(l)}(f)$  の  
最適等化特性は、各分岐  $l$  の伝送帯域を  $\Omega_l$  ( $l=1, 2, \dots, m$ )  
とすると、各帯域内で

$$|S_i^{(l)}|^2 = \frac{1}{|T_i|} \sqrt{\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i^{(l)}} \frac{N_{i+1}^{(l)}}{N_i}} \frac{1}{|T_{i+1}^{(l)}|} \quad f \in \Omega_l$$

( $l=1, 2, \dots, m$ ) (3.5.1)

伝送帯域外で零である。

この時 各伝送帯域  $\Omega_l$  は 相互に

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \phi \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.5.2)$$

を満足する必要がある。  $\lambda_{i-1}, \lambda_i^{(l)} (l=1, 2, \dots, m)$  はそれ

ぞれ電力制限により決まる未定乗数を表わす。

この定理から 分岐点等化器も機能的には中継器と同様に、I-§7.1 で定義した“伝送路系”の機能単位である“中継単位”の構成要素としての役割を担っていることがわかる。

この定理の与えている最適解は 式(3.5.2) で示される単一径路の条件のもとでの最適解である。 III-§3 の単一径路の定理によれば、式(3.3.20) の成立する場合に、複数の径路を持つ解も存在する。従ってこの場合にも上記の定理で示される解以外にも最適解が存在することになる。しかし 式(3.3.20) の成立する場合は極めて特殊な場合であり、又 III-§9 で明らかにするように、複数の解の存在は、複数の



伝送路が等価となり、解がある範囲で任意性を持つことから生じる結果であって、本質的な意味はない。

尚、平均電力制限は各出力端末毎に行なわれているが、各端末の出力電力の総和に対して電力制限を行なっても

$$\lambda_i^{(1)} = \lambda_i^{(2)} = \dots = \lambda_i^{(m)} \quad (3.5.3)$$

の条件が加わるのみで解の形は変化しない。

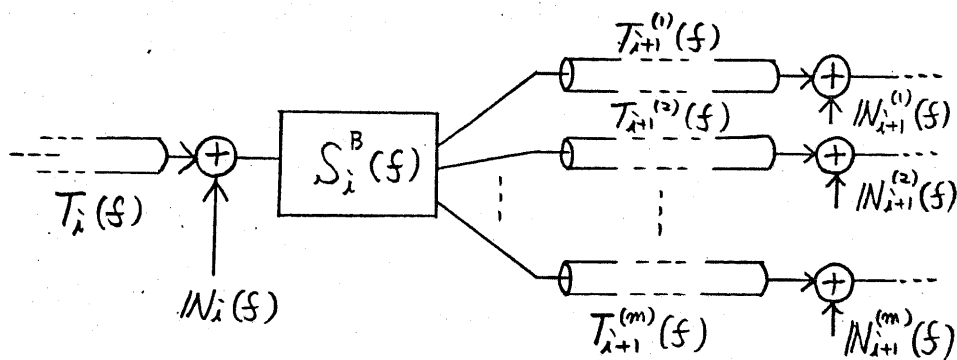


図 III 12 分岐点等化器

## § 5.2 定理の証明

前節の定理を証明する。

まず、平均乗誤差評価の場合を考える。 III-§4.3

と同様にして、分岐点等化器  $S_i^B(f) = \bigcup_{\ell} S_i^{(\ell)}(f)$  に着目

すると 評価関数

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} E'_s [s_0, s_1, \dots, s_m] df \quad (3.5.4)$$

の被積分関数は 次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} E'_s = & M \left| \pi_{I_0} \bar{s}_0 + \pi_{I_{S_{i-1}}} S_{i-1} T_i \left( \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{\ell} \pi_{S_{\ell} 0} \right) - 1 \right|^2 \\ & + \sum_{\substack{i \neq j, i+1 \\ i \neq j, i+1}} W_i \left| \pi_{I_0} \bar{s}_i \right|^2 + \sum_{\substack{i \neq j, i+1 \\ i \neq j, i+1}} W_i \left| \pi_{I_{S_{i-1}}} S_{i-1} T_i \left( \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{\ell} \pi_{S_{\ell} 0} \right) \right|^2 \\ & + W_i \left| \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_{\ell} \pi_{S_{\ell} 0} \right|^2 + \sum_{\ell} W_{i+1}^{(\ell)} \left| S_{\ell} \pi_{S_{\ell} 0} \right|^2 \quad (3.5.5) \end{aligned}$$

この時  $S_{i-1}(f), S_{\ell}(f) (\ell=1, 2, \dots, m)$  に<sup>(\*)</sup> それぞれの伝送路  $T_i(f)$  に前置される等化器と伝送路  $T_{i+1}^{(\ell)}(f) (\ell=1, 2, \dots, m)$  に後置される等化器を表わしている。

この式について III-§4.3, §4.4 と同様にして最適解の満たすべき方程式系を求め計算を行なうと

$$S_i \frac{\partial E'_s}{\partial S_i} - S_{\ell} \frac{\partial E'_s}{\partial S_{\ell}} = -W_{i+1}^{(\ell)} \left| \pi_{I_{i+1} 0} \right|^2 \quad (l=1, 2, \dots, m) \quad (3.5.6)$$

と補助定理 (III-§4.2) の第2式に対応する関係が得

られるが、第1式に対応する関係は

$$S_{I-1} \frac{\partial E'_s}{\partial S_{I-1}} - S_i^{(k)} \frac{\partial E'_s}{\partial S_i^{(k)}}$$

(次頁へ)

$$\begin{aligned}
&= M \left\{ \prod_{I, S_{i-1}} S_{i-1} T_i \left( \sum_{\ell \neq k} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_\ell \prod_{S_{\ell 0}} \right) \right\} \\
&\quad \left\{ \prod_{I, S_{i-1}} \overline{S_i} + \prod_{I, S_{i-1}} S_{i-1} T_i \left( \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_\ell \prod_{S_{\ell 0}} \right) - 1 \right\}^* \\
&+ \sum_{\substack{j \neq i, i+1}} N_j \left\{ \prod_{I, S_{i-1}} S_{i-1} T_i \left( \sum_{\ell \neq k} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_\ell \prod_{S_{\ell 0}} \right) \right\} \\
&\quad \left\{ \prod_{I, S_{i-1}} S_{i-1} T_i \left( \sum_{\ell} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_\ell \prod_{S_{\ell 0}} \right) \right\}^* \\
&- N_i |S_i^{(k)} T_{i+1}^{(k)} S_k \prod_{S_{k 0}}|^2 \tag{3.5.7}
\end{aligned}$$

となり 新たに 第 1, 2 項が生じ 補助定理の関係を満足しない。

ここで 単一径路の条件を用いると、各径路の伝送帯域を  $\Omega_\ell$  ( $\ell=1, 2, \dots, m$ ) として

$$\sum_{\ell \neq k} S_i^{(\ell)} T_{i+1}^{(\ell)} S_\ell \prod_{S_{\ell 0}} = 0 \quad f \in \Omega_k \tag{3.5.8}$$

の関係が生じ、式 (3.5.7) は、

$$S_{i-1} \frac{\partial E'_s}{\partial S_{i-1}} - S_i^{(k)} \frac{\partial E'_s}{\partial S_i^{(k)}} = - N_i |S_i^{(k)} T_{i+1}^{(k)}|^2 |\prod_{S_{k 0}}|^2 \quad f \in \Omega_k \quad (k=1, 2, \dots, m) \tag{3.5.9}$$

となり、補助定理を満足することになる。

電力制限の式についても同様にして、単一径路の条件により III-§4.3 の各式に帰着させることがで

きる。従って以下は III-§4.3 と同様にして 分岐点等  
化器の最適等化特性

$$|S_i^{(l)}|^2 = \frac{1}{|T_i|} \sqrt{\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i^{(l)}} \frac{N_{i+1}^{(l)}}{N_i}} \frac{1}{|T_{i+1}^{(l)}|} \quad f \in \Omega_l \quad (3.5.10)$$

( $l=1, 2, \dots, m$ )

が得られる。

$$\text{但し} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.5.11)$$

この解が 単一径路の条件を加えたり 場合の式 (3.5.5) に属  
する方程式系を満足していることは、上記の手順からも明  
らかであろう。

結局 分岐点等化器の満たすべき方程式系は、単  
一径路の条件により、中継器の満たすべき方程式系に帰  
着し、中継器と全く同様の手法により最適解が求まる  
ことになる。得られた最適解は 単一径路の条件  
を加えない もとの方程式を満足しており、最適性に属する  
一般性は失われていない。前節でも触れたよう  
に、最適解は 一般的には 前節の定理の与えるもの唯  
一つであるが、単一径路の定理の例外条件 (式 (3.3.20))

が満たされる特別の場合には 唯一つではなく他にも等価な最適解が存在する。

相互情報量評価の場合も全く同様の手順で、補助定理(Ⅲ-§4.2)を満足させることができ、以下Ⅲ-§4.3と同様にして証明される。この場合にも、結果が単一経路の条件を加える前の方程式系を満足していることは明らかである。

## § 6: 合流点の等化特性に関する定理

前章までの議論で 中継器及び分岐点等化器の最適等化特性が、平均=乗誤差評価あるいは相互情報量評価のいずれにも共通な特性として示された。

残り 合流点等化器と 端末等化器のうち、本章では、平均=乗誤差評価及び相互情報量評価それぞれのもとで、合流点等化器の最適等化特性を与える。

### § 6.1 定理 (I)

合流点等化器 (図 III.13) の最適等化特性について次の定理が成立する。

#### 定理

平均=乗誤差評価のもとで、ループを持たないアナログ中継網の合流点等化器  $S_i^{\text{opt}}(f) = \prod_{k=1}^L S_i^{(k)}(f)$  の最適等化特性は、系の入力端から出力端へのある伝送帯域  $\Omega_k$  の径路  $C_k$  に関して、この径路内にある合流点等化器に 入力側から 順に番号 ( $k=1, 2, \dots, L$ )

えらぶと、伝送帯域内で

$$|{}_k S_i^{(\ell)}|^2 = \frac{1}{|{}_k T_i^{(\ell)}|} \sqrt{\frac{{}_k \lambda_{i+1}^{(\ell)}}{{}_k \lambda_i} \frac{{}_k N_{i+1}}{{}_k N_i^{(\ell)}}} \frac{1}{|{}_k T_{i+1}|} \quad f \in \Omega_\ell$$

$$\left( \begin{array}{l} k=1, 2, \dots, L-1 \\ \ell=1, 2, \dots, m \end{array} \right) \quad (3.6.1)$$

$$|{}_L S_i^{(\ell)}|^2 = \frac{1}{|{}_L T_i^{(\ell)}|} \sqrt{\frac{{}_L \lambda_{i+1}^{(\ell)}}{{}_L \lambda_i} \frac{{}_L N_{i+1}}{{}_L N_i^{(\ell)}}} \frac{1}{|{}_L T_{i+1}|}$$

$$\times M \frac{|T_1|}{|T_m|} \sqrt{\frac{\lambda_{m-1}}{N_m} \frac{\lambda_0}{N_1} \frac{|S_0|^2}{|S_m|^2}}$$

$$(\ell=1, 2, \dots, m) \quad (3.6.2)$$

帯域外で零となる。

この時 異なる径路の伝送帯域に共通部分は存在しては  
ならない。 すなわち

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad (i \neq j, i, j=1, 2, \dots, m) \quad (3.6.3)$$

を満足する必要がある。

又  ${}_k N_i^{(\ell)}(f)$ ,  ${}_k N_{i+1}(f)$  は それぞれ  $k$  番目の合流点  
等化器  ${}_k S_i(f)$  の 直前及び直後に置かれた伝送路  
 ${}_k T_i^{(\ell)}(f)$ ,  ${}_k T_{i+1}(f)$  の出力端で相加する雑音を表わす。

未定乗数についても同様。 又、 $S_0(f)$ ,  $S_m(f)$  は そ  
れぞれ 送信等化器、受信等化器を表わす。

この定理の与える最適解も前章の定理と同様式(3.6.3)で示される単一経路の条件を満足する解である。単一経路の定理の例外条件(式3.3.20)が満たされる特別な場合には、この解以外にも等価な最適解が存在するが前章でも触れたように、この等価な解は本質的な意味を持たず上記定理の解で十分である。

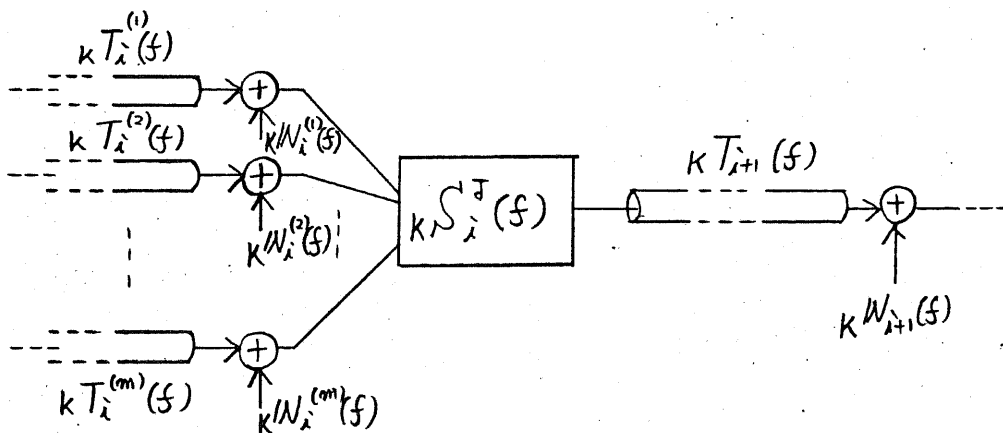


図 III. 13 合流点等化器

又上記の定理は、ある経路に含まれる合流点等化器のうち、最も出力端に近い合流点等化器  $kS_i^J(f)$  を除いて一意に解が定まっており、これも機能上は中継器の役割を果たしていることがわかる。

一方、最終段の合流点等化器  $kS_i^J(f)$  の特性は



端末等化器  $S_0(f)$ ,  $S_m(f)$  に依存する。従って この特性は、  
 端末等化器の特性が定まって初めて一意に決定される。

### § 6.2 定理 (I) の証明

前節の定理を証明する。

合流点等化器  $S_i^J(f) = \bigcup_l S_i^{(l)}(f)$  に着目すると、平均乗誤差

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} E'_S [S_0, S_1, \dots, S_m] df \quad (3.6.4)$$

の被積分関数は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} E'_S = & M \left| \overline{\pi_{S_0}} + \left( \sum_l \pi_{I_{S_{l-1}}}^{(l)} S_{l-1}^{(l)} T_l^{(l)} S_l^{(l)} \right) \overline{\pi_{S_0}} - 1 \right|^2 \\ & + \sum_{j \neq i} N_j \left| \overline{\pi_{T_{j0}}} \right|^2 + \sum_{j \neq i} N_j \left| \left( \sum_l \pi_{I_{S_{l-1}}}^{(l)} S_{l-1}^{(l)} T_l^{(l)} S_l^{(l)} \right) \overline{\pi_{S_0}} \right|^2 \\ & + \sum_{l=1}^m N_l^{(l)} \left| S_l^{(l)} \overline{\pi_{S_0}} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

この時  $S_{l-1}^{(l)}(f)$  は 伝送路  $T_l^{(l)}(f)$  に前置される等化器を表わす。

一方、平均電力制限は 合流点等化器  $S_i^J(f)$  について

では

$$P_i = \int_{-\infty}^{\infty} M \left| \sum_l \pi_{I_{S_{l-1}}}^{(l)} S_{l-1}^{(l)} T_l^{(l)} S_l^{(l)} \right|^2 df \quad (3.6.6)$$

となり、又等化器  $S_{l-1}^{(l)}(f)$  ( $l=1, 2, \dots, m$ ) については

$$P_{\lambda-1}^{(\ell)} = \int_{-\infty}^{\infty} M |\pi_{I S_{\lambda-1}^{(\ell)}} S_{\lambda-1}^{(\ell)}|^2 d\mathcal{F} \quad (\ell=1, 2, \dots, m) \quad (3.6.7)$$

他の等化器については一般的に

$$P_j = \int M \left| \left\{ \pi_{I S_j} + \left( \sum_{\lambda} \pi_{I S_{\lambda-1}^{(\ell)}} S_{\lambda-1}^{(\ell)} T_{\lambda}^{(\ell)} S_{\lambda}^{(\ell)} \right) \pi_{S_{\lambda} S_j} \right\} S_j \right|^2 d\mathcal{F} \quad (3.6.8)$$

( $j \neq \lambda, \lambda-1, 1 \leq j \leq m-1$ )

と表わせる。この時、各積分の被積分関数を  $P_{\lambda}(\mathcal{F})$ ,

$P_{\lambda-1}^{(\ell)}(\mathcal{F})$ ,  $P_j(\mathcal{F})$  とする。

$$S_{\lambda-1}^{(\ell)} \frac{\partial P_j}{\partial S_{\lambda-1}^{(\ell)}} - S_{\lambda}^{(\ell)} \frac{\partial P_j}{\partial S_{\lambda}^{(\ell)}} = 0$$

( $j \neq \lambda-1, 1 \leq j \leq m$ ) \quad (3.6.9)

が成立している。

よって方程式

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S_j} \triangleq \frac{\partial}{\partial S_j} \left[ E_s' + \sum_{\ell} (\lambda_{\lambda-1}^{(\ell)} P_{\lambda-1}^{(\ell)} + \lambda_{\lambda}^{(\ell)} P_{\lambda}^{(\ell)}) + \sum_{j \neq \lambda, \lambda-1} \lambda_j P_j \right] = 0$$

( $j = \lambda-1, \lambda$ ) \quad (3.6.10)

を解く為に式(3.6.9)及び単一径路の条件を用いて計算を

行なうと、伝送帯域を  $\Omega_{\ell}$  として

$$\begin{aligned} 0 &= S_{\lambda-1}^{(\ell)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S_{\lambda-1}^{(\ell)}} - S_{\lambda}^{(\ell)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial S_{\lambda}^{(\ell)}} \\ &= -N_{\lambda}^{(\ell)} |S_{\lambda}^{(\ell)} \pi_{S_{\lambda} S_{\lambda-1}}|^2 + \lambda_{\lambda-1}^{(\ell)} M |\pi_{I S_{\lambda-1}^{(\ell)}} S_{\lambda-1}^{(\ell)}|^2 \end{aligned}$$

( $\ell=1, 2, \dots, m$ ) \quad (3.6.11)

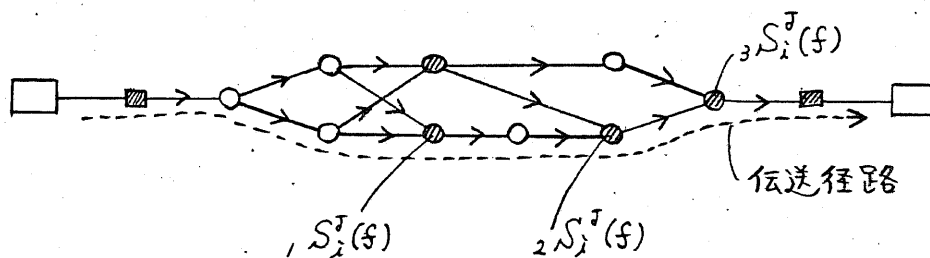
従って

$$|S_i^{(l)}|^2 = \frac{\lambda_{i-1}^{(l)} M}{N_i^{(l)}} \frac{|\prod_{I} S_{i-1}^{(l)}|^2}{|\prod_{S_i} 0|^2} |S_{i-1}^{(l)}|^2 \quad f \in \Omega_l \quad (3.6.12)$$

(l=1, 2, \dots, m)

となる。

中継網の等化器のうち、最適特性の定まっているものは、端末等化器と合流点等化器のみであるから、ある伝送経路に着目してこの経路に含まれる合流点等化器  $S_i^J(f)$  に入力端から順に番号をつける。



- ▨ : 端末等化器                      ⊗ : 合流点等化器  
 → : 伝送路                              ○ : 特性既知の等化器

#### 図 III 14 合流点等化器の区別

この時、各合流点等化器  $k S_i^J(f)$  ( $k=1, 2, \dots, L$ )

について式 (3.6.12) が成立するから

$$|k S_i^{(l)}|^2 = \frac{k \lambda_{i-1}^{(l)} M}{k N_i^{(l)}} \frac{|\prod_{I} k S_{i-1}^{(l)}|^2}{|\prod_{k S_i} 0|^2} |S_{i-1}^{(l)}|^2$$

(k=1, 2, \dots, L)                      (3.6.13)

と存る。

よって式 (3.6.13) の辺々割り算を行なうと

$$\frac{|{}_k S_i^{(\ell)}|^2}{|{}_{k+1} S_i^{(\ell)}|^2} = \frac{{}_k \lambda_{i-1}^{(\ell)} {}_{k+1} N_i^{(\ell)}}{{}_k N_i^{(\ell)} {}_{k+1} \lambda_{i-1}^{(\ell)}} \times \frac{1}{|{}_k T_i^{(\ell)}|^2 \cdot |{}_k S_i^{(\ell)}|^2 \cdot |\prod_{k S_i, k+1 T_i}^{(\ell)}|^2 \cdot |\prod_{k S_i, k+1 S_i}^{(\ell)}|^2 \cdot |{}_{k+1} S_i^{(\ell)}|^2}$$

(3.6.14)

従って

$$|{}_k S_i^{(\ell)}|^2 = \frac{1}{|{}_k T_i^{(\ell)}|} \sqrt{\frac{{}_k \lambda_{i-1}^{(\ell)} {}_{k+1} N_i^{(\ell)}}{{}_k \lambda_i^{(\ell)} {}_{k+1} N_i^{(\ell)}}} \cdot \frac{1}{|{}_k T_{i+1}^{(\ell)}|} \quad f \in \Omega_{2\ell}$$

(3.6.15)

と存る。更に、最終段の合流点等化器  ${}_L S_i^{(m)}(f)$  につ

いては式 (3.6.13) に式 (3.6.15) を代入して

$$\begin{aligned} |{}_L S_i^{(m)}(f)|^2 &= \frac{{}_L \lambda_{i-1}^{(m)}}{{}_L N_i^{(m)}} \prod \frac{|\prod_{S_0, L T_i}^{(\ell)}|^2}{|\prod_{L S_i, S_m}^{(\ell)}|^2} \frac{|S_0|^2}{|S_m|^2} \\ &= \frac{1}{|{}_L T_i^{(m)}|} \sqrt{\frac{{}_L \lambda_{i-1}^{(m)} {}_{L+1} N_i^{(m)}}{{}_L \lambda_i^{(m)} {}_{L+1} N_i^{(m)}}} \frac{1}{|{}_L T_{i+1}^{(m)}|} \times \prod \frac{|T_1|}{|T_m|} \sqrt{\frac{\lambda_{m+1}}{N_m} \frac{\lambda_0}{N_i}} \frac{|S_0|^2}{|S_m|^2} \end{aligned}$$

(3.6.16)

と存ることがわかる。

得られた解が単一径路の条件を加える前の方程

式系を満足してゐることは云うまでもない。

## § 6.3 定理 (II)

合流点等化器 (図 III 13) の最適等化特性について次の定理が成立する。

定理

相互情報量評価のもとで ループを持たないアナログ中継網の合流点等化器  $S_i^{\text{opt}}(f) = \bigcup_{\ell} S_i^{(\ell)}(f)$  の最適等化特性は、系の入力端から出力端へのある伝送帯域  $\Omega_{\ell}$  の径路  $C_{\ell}$  に関して、この径路内にある合流点等化器に入力側から順に番号 ( $K=1, 2, \dots, L$ ) を示すと、伝送帯域内

$$|{}_K S_i^{(\ell)}|^2 = \frac{1}{|{}_K T_i^{(\ell)}|} \sqrt{\frac{{}_K \lambda_{i+1}^{(\ell)}}{{}_K \lambda_i} \frac{{}_K N_{i+1}}{{}_K N_i^{(\ell)}}} \cdot \frac{1}{|{}_K T_{i+1}|} \quad f \in \Omega_{\ell}$$

( $K=1, 2, \dots, L-1, \ell=1, 2, \dots, m$ ) (3.6.17)

$$|{}_L S_i^{(\ell)}|^2 = \frac{1}{|{}_L T_i^{(\ell)}|} \sqrt{\frac{{}_L \lambda_{i+1}^{(\ell)}}{{}_L \lambda_i} \frac{{}_L N_{i+1}}{{}_L N_i^{(\ell)}}} \cdot \frac{1}{|{}_L T_{i+1}|}$$

$$\times \text{IM} \frac{|T_1|}{|T_m|} \sqrt{\frac{\lambda_{m+1}}{N_m} \frac{\lambda_0}{N_1}} |S_0|^2 \cdot \frac{2R N_T}{(R-N_T) |S_m|^2}$$

( $\ell=1, 2, \dots, m$ ) (3.6.18)

帯域外で零となる。

この時 異なる 径路の 伝送帯域に 共通部分が 存在  
しては 存しない。 すなわち

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.6.19)$$

を 満足する 必要がある。

この 定理の 解の内  $k S_i^{(k)}(f)$  ( $k=1, 2, \dots, L-1$ ) は 平均乗誤差評価の場合と同一の表現となっているが、最終段の合流点等化器  $L S_i^{(L)}(f)$  は異なる表現となっている。

式 (3.6.18) の項の中で

$$\frac{R N_T}{(N_T - R) |S_m|^2} \quad (3.6.20)$$

は 受信等化特性  $S_m(f) = S_m^F(f)$  含むようであるが、  
実際は、受信等化特性  $S_m^F(f)$  に依存しない。

従って、最終段の合流点等化器  $L S_i^{(L)}(f)$  は、送信等化特性  $S_o(f)$  が定まると一意に決まる。

## § 6.4 定理 (II) の証明

前節の定理を証明する。

合流点等化器  $S_i^T(f) = \bigcup_{\ell} S_i^{(\ell)}(f)$  に着目すると、相互情報量

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} E'_I [S_0, S_1, \dots, S_m] df \quad (3.6.21)$$

の被積分関数は次式のように表わされる。

$$E'_I = \frac{1}{2} (\log R - \log W_T) \quad (3.6.22)$$

$$R = M \left| \prod_{i=0}^m \overline{\pi_{S_i}} + \left( \sum_{\ell} \pi_{I S_{i-1}^{(\ell)}} S_{i-1}^{(\ell)} T_i^{(\ell)} S_i^{(\ell)} \right) \prod_{S_i=0} \right|^2 + W_T \quad (3.6.23)$$

$$W_T = \sum_{j \neq i} W_j \left| \prod_{S_j=0} \overline{\pi_{S_j}} \right|^2 + \sum_{j \neq i} W_j \left| \left( \sum_{\ell} \pi_{I S_{j-1}^{(\ell)}} S_{j-1}^{(\ell)} T_j^{(\ell)} S_j^{(\ell)} \right) \prod_{S_j=0} \right|^2 + \sum_{\ell=1}^m W_i^{(\ell)} \left| S_i^{(\ell)} \prod_{S_i=0} \right|^2 \quad (3.6.23)$$

そこでこの  $E'_I$  に対して III-§6.2 と全く同様に計算

を行なうと式(3.6.11)に対応して

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{W_T} \right) W_i^{(\ell)} \left| S_i^{(\ell)} \prod_{S_i=0} \right|^2 = \lambda_{i-1}^{(\ell)} M \left| \prod_{I S_{i-1}^{(\ell)}} S_{i-1}^{(\ell)} \right|^2 \quad (\ell=1, 2, \dots, m) \quad (3.6.24)$$

の関係が得られる。

従って

$$\left| S_i^{(\ell)} \right|^2 = \frac{\lambda_{i-1}^{(\ell)} M}{W_i^{(\ell)}} \cdot \frac{\left| \prod_{I S_{i-1}^{(\ell)}} \right|^2}{\left| \prod_{S_i=0} \right|^2} \left| S_{i-1}^{(\ell)} \right|^2 \cdot \frac{2 R W_T}{R - W_T} \quad f \in \Omega_{\ell} \quad (\ell=1, 2, \dots, m) \quad (3.6.25)$$

となるから、以下 III-§6.2 と同様にして計算すると

$$|k S_i^{(l)}|^2 = \frac{1}{|k T_i^{(l)}|} \sqrt{\frac{k \lambda_{i+1}^{(l)}}{k \lambda_i^{(l)}} \frac{k N_{i+1}^{(l)}}{k N_i^{(l)}}} \frac{1}{|k T_{i+1}^{(l)}|} \quad f \in \Omega_l$$

$$(k = 1, 2, \dots, L-1, \quad l = 1, 2, \dots, m) \quad (3.6.26)$$

となる。一方 最終段の合流点等化器  ${}_L S_i^{(l)}(f)$  は、

式 (3.6.25) より

$$|{}_L S_i^{(l)}|^2 = \frac{{}_L \lambda_i}{{}_L N_i^{(l)}} \prod \frac{|\pi_{S_0, {}_L S_{i-1}^{(l)}}|^2}{|\pi_{{}_L S_i, S_m}|^2} |S_{i-1}^{(l)}|^2 \frac{|S_0|^2}{|S_m|^2} \frac{2 R N_T}{R - N_T}$$

$$= \frac{1}{|{}_L T_i^{(l)}|} \sqrt{\frac{{}_L \lambda_{i+1}^{(l)}}{{}_L \lambda_i^{(l)}} \frac{{}_L N_{i+1}^{(l)}}{{}_L N_i^{(l)}}} \frac{1}{|{}_L T_{i+1}^{(l)}|}$$

$$\times \prod \frac{|T_i|}{|T_m|} \sqrt{\frac{\lambda_0}{N_1} \frac{\lambda_{m-1}}{N_m}} |S_0|^2 \frac{2 R N_T}{(R - N_T) |S_m|^2} \quad f \in \Omega_l$$

$$(l = 1, 2, \dots, m) \quad (3.6.27)$$

となる。

この式の導出にあたり、 $\pi_{{}_L S_i, S_m}(f)$  の表現を具体的に与える必要があった。しかし 受信等化器  $S_m^F(f)$  の直前の等化器  $S_{m-1}(f)$  がこの表現の中に含まれ、この等化器が中継器の場合には中継器に関する定理 (III-§4) から除外されており、又合流点等化器の場合



合には式 (3.6.27) 自身が、これを定める式に当り、いざ  
 れにせよこの等化器  $S_{m-1}(f)$  は未定である。その為

$\Pi_{L_{S_m}} S_m(f)$  は具体的に表現を与えることができない。

しかしここでは

$$S_{m-1}(f) = \frac{1}{|T_{m-1}|} \sqrt{\frac{\lambda_{m-1}}{W_{m-1}} \frac{W_m}{\lambda_m}} \frac{1}{|T_m|} \quad f \in \Omega \quad (3.6.28)$$

として、式 (3.6.27) を導出してゐる。この仮定の正しいこ

とは、III-§7.4 において示される。

## § 7 端末の等化特性に関する定理

本章では残された端末等化器の最適等化特性を与える定理を示す。端末等化器の最適等化特性は、最適化基準により異なる。そこで相互情報量、平均二乗誤差の二つの評価基準それぞれに対する端末等化器の最適等化特性を与える。

### § 7.1 定理 (I)

端末等化器 (図 III 15) の最適等化特性について次の定理が成立する。

#### 定理

平均二乗誤差評価のもとで、ループを持たないアナログ中継網の端末等化器すなわち送信等化器  $S_0^T(f)$ 、及び受信等化器  $S_m^F(f)$  の最適等化特性は、伝送帯域内で

$$|S_0|^2 = \frac{1}{M} \frac{1}{|T_1|} \sqrt{\frac{N_1^{(2)}}{\lambda_0}} \left( \sqrt{M} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}^{(2)}}}{|T_{k+1}|} \right) \quad f \in \Omega_L$$

$$(l=1, 2, \dots, m) \quad (3.7.1)$$

$$|S_m|^2 = \frac{1}{|T_m|} \sqrt{\frac{\lambda_{m-1}}{N_m^{(l)}}} \left( \sqrt{M} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}^{(l)}}}{|T_{k+1}|} \right) \quad f \in \Omega_l$$

$$(l=1, 2, \dots, m) \quad (3.7.2)$$

帯域外で零になる。

但し 伝送帯域  $\Omega_l$  に対応する 入力端から出力端への経路  $C_l$  で相加する雑音を  $N_\lambda^{(l)}$  ( $\lambda=1, 2, \dots, m$ ) と表わして置く。

前章の定理で 最終段の合流点等化器  $S_i^{(l)}(f)$  は未定であったが、本節の定理から

$$\frac{|S_0|^2}{|S_m|^2} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{N_1 N_m}{\lambda_0 \lambda_{m-1}}} \frac{|T_m|}{|T_1|} \quad (3.7.3)$$

の関係が得られ、これを式 (3.6.2) に代入すると、

最終段の合流点等化器も他の合流点等化器同様

$$|{}_L S_i^{(l)}|^2 = \frac{1}{|{}_L T_i^{(l)}|} \sqrt{\frac{{}_L \lambda_{i-1}^{(l)} {}_L N_{i+1}^{(l)}}{{}_L \lambda_i {}_L N_i^{(l)}}} \frac{1}{|{}_L T_{i+1}|} \quad f \in \Omega_l$$

$$(l=1, 2, \dots, m) \quad (3.7.4)$$

となることがわかる。

一方 次章に述べる手順により、伝送経路

が最適に選ばれていれば、上記の定理から、系の伝送帯域  $\Omega_T$  は次式で表わされることがわかる。

$$\Omega_T = \bigcup_{\ell} \left[ \Omega_{\ell} \cap \left\{ f \mid \sqrt{M} > \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k} N_{k+1}^{(\ell)}}{|T_{k+1}|} \right\} \right] \quad (3.7.5)$$

この時  $\sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k} N_{k+1}^{(\ell)}}{|T_{k+1}|}$  は経路  $C_{\ell}$  により決まる定数である。

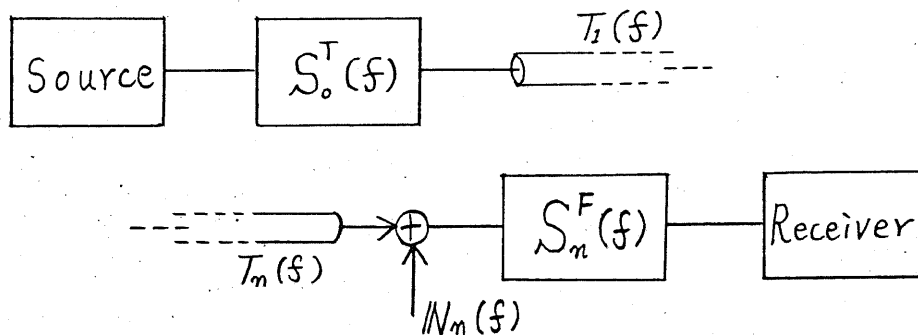


図 III.15 端末等化器

### § 7.2 定理 (I) の証明

最適等化特性の定まっている残された端末の等化器に着目すると 平均二乗誤差

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} E_s' [s_0, s_1, \dots, s_m] df \quad (3.7.6)$$

の被積分関数は次式のように表わされる。

$$E_s' = M |s_0 \prod_{i=1}^m S_i - 1|^2 + \sum_{j=1}^m N_j |\prod_{i=1}^m S_i S_m|^2 \quad (3.7.7)$$

一方、平均電力制限は、送信等化器  $S_0(f) = S_0^T(f)$  により

$$P_0 = \int M |S_0|^2 df \quad (3.7.8)$$

又、他の等化器によりは一般的に

$$P_j = \int M |S_0 \pi_{S_0 S_j} S_j|^2 df \quad (j=1, 2, \dots, m-1) \quad (3.7.9)$$

と表わせる。そこで各式の被積分関数を  $P_0(f)$ ,  $P_j(f)$

として、最適解の満たすべき方程式

$$\frac{\partial F}{\partial S_j} \triangleq \frac{\partial}{\partial S_j} [E_s' + \lambda_0 P_0 + \sum_j \lambda_j P_j] = 0 \quad (j=0, m) \quad (3.7.10)$$

を計算すると

$$\begin{aligned} & M \{ S_0 \pi_{S_0 S_m} S_m \} \{ S_0 \pi_{S_0 S_m} S_m - 1 \}^* \\ & + \lambda_0 M |S_0|^2 + \sum_{j \neq 0} \lambda_j M |S_0 \pi_{S_0 S_j} S_j|^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

$$\begin{aligned} & M \{ S_0 \pi_{S_0 S_m} S_m \} \{ S_0 \pi_{S_0 S_m} S_m - 1 \}^* \\ & + \sum_j \lambda_j M | \pi_{S_j S_m} S_m |^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

の方程式が得られる。

式(3.7.6), (3.7.7) から明らかのように、各等化器の

位相特性は、系の出力に含まれる雑音電力に無関係

係であり、従って位相特性は

$$\arg(S_0 \pi_{S_0 S_m} S_m) = 2M\pi \quad (M: \text{整数}) \quad (3.7.13)$$

を満足せば、平均乗誤差は最小となり、各等化器への位相の配分は任意で良い。

そこで以下では、振幅特性のみに着目する。

両題は式(3.7.11), (3.7.12)を満足する端末等化特性  $S_0(f)$ ,  $S_m(f)$  を決定すれば良い。

直接解いても良いが、式(3.7.11), (3.7.12)の中の  $\pi_{S_0 S_m}(f)$ ,  $\pi_{S_0 S_j}(f)$ ,  $\pi_{T_j S_m}(f)$  は最終段の合流点等化器  $L_{S_i}^{\mp}(f)$  を含み、これを直接解くのは容易ではない。そこで以下では多少功妙な方法を用いる。すなわち、あらかじめ解の形に対する予想を立てば、この式を実際に式(3.7.11), (3.7.12)に代入し満足することも確認すれば、解いた事と等価である。

そこで両端末等化器の比を I-85 の結論から類推して

$$\frac{|S_0|^2}{|S_m|^2} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{N_1 N_m}{\lambda_0 \lambda_{m-1}}} \frac{|T_m|}{|T_1|} \quad (3.7.14)$$

とおき、これにより等化特性  $S_m(s)$ ,  $S_0(s)$  を求める。

この結果得られた等化特性が式(3.7.11), (3.7.12) を満足すれば、この解が最終的にすべての条件式を満足することを確認できる。

式(3.7.14) の仮定により 最終段の合流点等化特性は

$$|{}_L S_i^T|^2 = \frac{1}{|{}_L T_i^{\omega}|} \sqrt{\frac{{}_L \lambda_{i-1}^{(l)}}{{}_L \lambda_i} \frac{{}_L W_{i+1}}{{}_L W_i^{(l)}} \cdot \frac{1}{|{}_L T_{i+1}|}} \quad (3.7.15)$$

( $l=1, 2, \dots, m$ )

と定まる。従って前章までの結果と統合すると

$$|\pi_{S_0 S_m}|^2 = |T_1| |T_m| \sqrt{\frac{\lambda_0}{W_1} \frac{W_m}{\lambda_{m-1}}} \quad (3.7.16)$$

$$|\pi_{T_i S_m}|^2 = \frac{1}{|T_i|} \sqrt{\frac{\lambda_{i-1}}{W_i}} |T_m| \sqrt{\frac{W_m}{\lambda_{m-1}}} \quad (3.7.17)$$

$$|\pi_{S_0 T_i}|^2 = |T_i| \sqrt{\frac{W_i}{\lambda_{i-1}}} |T_1| \sqrt{\frac{\lambda_0}{W_1}} \quad (3.7.18)$$

の関係のあることがわかる。

そこでこれらの式を式(3.7.12)に代入して整理すると

$$|S_0|^2 \left\{ M |S_0|^2 |T_1| \sqrt{\frac{\lambda_1}{W_1^{(2)}}} - \sqrt{M} + \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}^{(2)}}}{|T_{k+1}|} \right\} = 0 \quad (3.7.19)$$

の関係が得られ、従って送信等化特性  $S^T(s)$  は伝

送帯域内 ( $f \in \Omega_d$ ) で

$$|S_0|^2 = \frac{1}{|M|} \frac{1}{|T_1|} \sqrt{\frac{W_1^{(1)}}{\lambda_0}} \left( \sqrt{|M|} - \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}^{(2)}}}{|T_{k+1}|} \right) \quad (3.7.20)$$

帯域外で零となる。この式を式(3.7.14)に代入すると

受信等化特性  $S_m^F(f)$  が伝送帯域内 ( $f \in \Omega_d$ ) で

$$|S_m|^2 = \frac{1}{|T_m|} \sqrt{\frac{\lambda_{m+1}}{W_m}} \left( \sqrt{|M|} - \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}^{(2)}}}{|T_{k+1}|} \right) \quad (3.7.21)$$

帯域外で零と定まる。この時  $W_j^{(2)}(f)$  は伝送帯域

$\Omega_d$  に対応する経路  $C_d$  に相加する雑音を表わす。

この解が式(3.7.12)を満足していることは手順から明らかであるが、式(3.7.14)の仮定が正しいか否かは式(3.7.11)を同時に満足しているか否かで決まる。

式(3.7.12)は既に成立しているから、式(3.7.11)と式(3.7.12)の辺々引き算をして得らぬ

$$\begin{aligned} \lambda_0 |M| |S_0|^2 + \sum_{j \neq 0} \lambda_j |M| |S_0| \pi_{S_0 S_j} |S_j|^2 \\ = \sum_j W_j |T_j S_m S_m|^2 \end{aligned} \quad (3.7.22)$$

と式(3.7.11)は等価である。

この式に上記の結果を代入すると



$$\text{左辺} = \sum_j \frac{\sqrt{\lambda_j N_{j+1}^{(2)}}}{|T_{j+1}|} \cdot \left( \sqrt{M} - \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}^{(2)}}}{|T_{k+1}|} \right) = \text{右辺} \quad (3.7.23)$$

となり、上記の解が真の解であることを確認できる。

### § 7.3 定理 (II)

端末等化器 (図 III-15) の最適等化特性について、次の定理が成立する。

#### 定理

相互情報量評価のもとで、ループを持たないアナログ中継網の端末等化器および送信等化器  $S_0^T(f)$  の最適等化特性は、伝送帯域内で

$$|S_0|^2 = \frac{1}{M} \frac{1}{|T_1|} \sqrt{\frac{N_1}{\lambda_0}} \left( \frac{1}{2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}^{(2)}}}{|T_{k+1}|}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}^{(2)}}}{|T_{k+1}|} \right)$$

(3.7.24)

帯域外で零に等しい。

但し伝送帯域  $\Omega_2$  に対応する入力端から出力端への経路  $C_2$  で相加する雑音を順に  $N_1^{(2)}(f), N_2^{(2)}(f), \dots, N_n^{(2)}(f)$

とする。

端末等化器のうち、受信等化器  $S_m^F(f)$  は、評価関数である相互情報量が線型可逆な変換に対して不変であることから、伝送帯域内で零以外の値をとれば任意で良い。

一方 III-§ 6.3 で定められた最終段の合流点等化器は本節の定理により定まる。すなわち式(3.7.24)を式(3.6.18)

に代入して計算すると

$$|L S_i^{(l)}|^2 = \frac{1}{|L T_i^{(l)}|} \sqrt{\frac{L \lambda_{i-1}^{(l)}}{L N_i^{(l)}} \frac{L N_{i+1}}{L \lambda_i}} \frac{1}{|L T_{i+1}|} \quad f \in \Omega_l$$

( $l=1, 2, \dots, m$ ) (3.7.25)

が得られる。

一方、系の伝送帯域  $\Omega_T$  も、伝送径路が次章の手順で最適に選ばれていれば、上記の定理により、次式で表わされることかわかる。

$$\Omega_T = \bigcup_l \left[ \Omega_l \cap \left\{ f \mid \frac{1}{2} > \left( \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}^{(l)}}}{|T_{k+1}|} \right)^2 \right\} \right] \quad (3.7.26)$$

I-§ 4 で得られた解は、解の導出の過程で、

SNR  $\gg 1$  の近似を用いているが、本節の定理は次節に明らかになるように、平均電力制限の表現に SNR  $\gg 1$  を用いたのみであり、各特性、伝送帯域共に正確に得

られている。従って I-§4 の結果は、本節の定理の示す結果において、径路を単一とし  $SNR \gg 1$  とした場合の近似式に相当している。

### § 7.4 定理 (II) の証明

受信等化特性  $S_m(f)$  は線型可逆であれば評価関数である相互情報量に影響を及ぼさないから任意である。

そこで送信等化器  $S_o(f)$  に着目すると、相互情報量

$$I = \int E_I' [S_o, S_1, \dots, S_m] df \quad (3.7.27)$$

の被積分関数は次式のように表わされる。

$$E_I' = \frac{1}{2} \{ \log IR - \log N_T \} \quad (3.7.28)$$

$$IR = M |S_o \pi_{s_o}|^2 + N_T \quad (3.7.29)$$

$$N_T = \sum_j N_j |\pi_{T_j}|^2 \quad (3.7.30)$$

一方送信等化器  $S_o^T(f)$  の平均電力制限は

$$P_o = \int M |S_o|^2 df \quad (3.7.31)$$

となり、他の等化器については一般的に

$$P_j = \int M |S_o \pi_{s_j} S_j|^2 df \quad (j=1, 2, \dots, m-1) \quad (3.7.32)$$

と表わせる。各積分の被積分関数を  $P_0(f)$ ,  $P_j(f)$  ( $j=1, 2, \dots, m-1$ ) とすると、最適解の満たすべき方程式は次式となる。

$$\frac{\partial F}{\partial S_0} \cong \frac{\partial}{\partial S_0} [E_1' - \lambda_0 P_0 - \sum_j \lambda_j P_j] = 0 \quad (3.7.33)$$

この式を実際に計算し整理すると

$$\frac{1}{2R} |\pi_{S_0 S_m}|^2 - \lambda_0 - \sum_j \lambda_j |\pi_{S_0 S_j}|^2 = 0 \quad (3.7.34)$$

が得られる。この式に式(3.7.29)を代入し送信等化特性

$S_0^T(f)$  について整理すると

$$|S_0|^2 = \frac{1}{2M \{ \lambda_0 + \sum_j \lambda_j |\pi_{S_0 S_j}|^2 \}} - \frac{\sum_j N_j |\pi_{T_j S_m}|^2}{M |\pi_{S_0 S_m}|^2} \quad (3.7.35)$$

となる。

この式の右辺の  $\pi_{S_0 S_j}(f)$ ,  $\pi_{S_0 S_m}(f)$ ,  $\pi_{T_j S_m}(f)$  等の項は、

送信等化特性  $S_0(f)$  を関数として含む最終段の合流点等化器

$L_{S_0^T}(f)$  あるいは受信等化器  $S_m(f)$  の直前に置かれ、また特

性の定まっている等化器  $S_{m-1}(f)$  等を内部に含んでいる。

従って問題は式(3.7.35)及び

$$\frac{\partial F}{\partial S_{m-1}} = 0 \quad (3.7.36)$$

及び 合流点等化器に因る方程式 (式(3.6.25)) から 三つの等化器

特性  $S_0(f)$ ,  $S_{m-1}(f)$ ,  ${}_L S_i^{\bar{J}}(f)$  を決定すれば良い。

場合によつては  $S_{m-1}(f) \equiv {}_L S_i^{\bar{J}}(f)$  と 同一の等化器を表  
わす事もある。

ここでは 本章 §7.2 と同様に

$$|{}_L S_i^{\bar{J}}|^2 = \frac{1}{|{}_L T_i^{(0)}|} \sqrt{\frac{{}_L \lambda_{i-1}^{(0)}}{{}_L N_i^{(0)}} \frac{{}_L W_{i+1}}{{}_L \lambda_i}} \cdot \frac{1}{|{}_L T_{i+1}|} \quad (3.7.37)$$

と予測して、これが解であることを確認する。

式(3.6.25)は

$$S_{m-1}(f) = \frac{1}{|T_{m-1}|} \sqrt{\frac{\lambda_{m-2}}{W_{m-1}} \frac{W_m}{\lambda_{m-1}}} \cdot \frac{1}{|T_m|} \quad (3.7.38)$$

の仮定のもとに 式(3.6.27)に変型されている。

そこで 此らの式を 式(3.7.35)に代入することによって 送信  
等化特性  $S_0(f)$  を得ることが出来る。しかし この結果

得られた  $S_0(f)$ ,  $S_{m-1}(f)$ ,  ${}_L S_i^{\bar{J}}(f)$  が 式(3.7.35), (3.7.36),

(3.6.27) を同時に満足することを示す必要があり、逆にこの事

実が示されれば 式(3.7.37), (3.7.38) で予測した特性も含

めて最適解となっていることが証明される。

実際に式(3.7.35)を計算すると

$$|S_0|^2 = \frac{1}{M} \frac{1}{|T_1|} \sqrt{\frac{W_1^{(e)}}{\lambda_0}} \left\{ \frac{1}{2 \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}^{(e)}}}{|T_{k+1}|}} - \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}^{(e)}}}{|T_{k+1}|} \right\} \quad (3.7.39)$$

が得られる。この手順から式(3.7.35)は明らかに満たされている。

よって式(3.6.27)に上記の結果を代入すると

$$|S_0|^2 \frac{2R N_T}{(R - N_T) |S_m|^2} = \frac{1}{M} \frac{|T_m|}{|T_1|} \sqrt{\frac{N_1 N_m}{\lambda_0 \lambda_{m-1}}} \quad (3.7.40)$$

の関係を用いて式(3.6.27)が満たされていることが容易にわかる。

一方、式(3.7.36)に式(3.7.37), (3.7.38), (3.7.39)を代入すると

上記の結果がこの条件も満足していることを容易に確かめることができる。

以上ですべての等化特性の最適性が確認された。

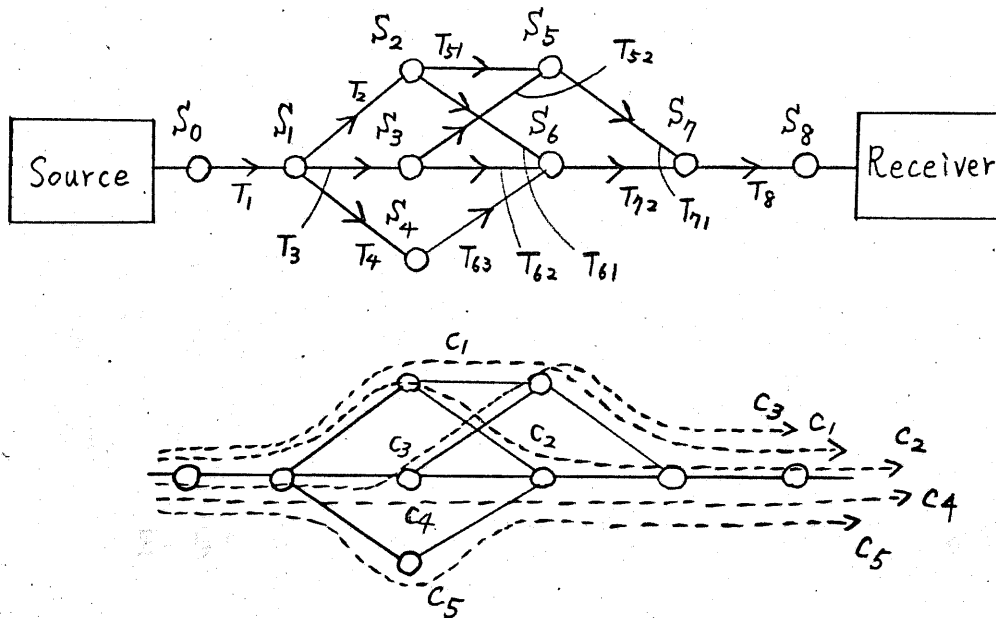
## § 8. 中継網の最適化

本章では、簡単な網構造を持ったアナログ中継系の例を上げ、前章までの定理を用いて最適化を行なう。その後、この系を直列系あるいは並列系に帰着させてその対応関係を見る。

### § 8.1 モデル

図 III・16 の接続関係を持つ中継網の最適化を行なう。

この中継系は、送信等化器  $S_0(f)$ , 受信等化器  $S_8(f)$



○ : 等化器      → : 伝送路

図 III・16 中継網の例

中継器  $S_4(f)$ , 分岐点等化器  $S_1(f), S_2(f), S_3(f)$ , 合流点等化器  $S_5(f), S_6(f), S_7(f)$  の 9 つの等化器で構成されており、入出力端を結ぶ 5 つの径路  $C_1, C_2, \dots, C_5$  がある。又、各伝送路  $T_i(f)$  の末端で相加する雑音を  $N_i(f)$  とする。

問題は、各等化器の特性を平均電力制限のもとで最適化し、各径路とそれに対応する伝送帯域を決定することである。

## § 8.2 定理の適用

平均二乗誤差評価、相互情報量評価のいずれの評価基準を用いても、中継器、分岐点等化器、合流点等化器の最適等化特性は変化しないから、まずこれらの特性を決定する。

Ⅲ-§4, §5, §6 の各定理を用い、最終段の合流点等化器の特性については Ⅲ-§7.1, §7.3 も考慮すると、各径路ごとに、中継器、分岐点等化器、合流点等化器の



特性は決定される。

例えば 径路  $C_3$  に着目すると

$$|S_1^{(3)}|^2 = \frac{1}{|T_{11}|} \sqrt{\frac{\lambda_0}{N_1} \frac{N_3}{\lambda_1^{(3)}}} \cdot \frac{1}{|T_{31}|} \quad (3.8.1)$$

$$|S_3^{(3)}|^2 = \frac{1}{|T_{31}|} \sqrt{\frac{\lambda_1^{(3)}}{N_3} \frac{N_{52}}{\lambda_3^{(3)}}} \cdot \frac{1}{|T_{52}|} \quad (3.8.2)$$

$$|S_5^{(3)}|^2 = \frac{1}{|T_{52}|} \sqrt{\frac{\lambda_3^{(3)}}{N_{52}} \frac{N_{71}}{\lambda_5}} \cdot \frac{1}{|T_{71}|} \quad (3.8.3)$$

$$|S_7^{(3)}|^2 = \frac{1}{|T_{71}|} \sqrt{\frac{\lambda_5}{N_{71}} \frac{N_8}{\lambda_7}} \cdot \frac{1}{|T_{81}|} \quad (3.8.4)$$

となる。この時  $\lambda_i$  は等化器  $S_i(f)$  に加わる電力制限

で決まる未定乗数を表わす。

単一径路の定理 (III-§ 3.3) によれば、任意の点

$\alpha$  から合流点へ達する  $m$  本の径路は

$$\frac{|S_i^{(j)}| N_j^e}{|T_{\alpha S_i^{(j)}}|} < \frac{|S_i^{(l)}| N_l^e}{|T_{\alpha S_i^{(l)}}|} \quad (l \neq j, 1 \leq l \leq m) \quad (3.8.5)$$

を満足する径路  $C_j$  1本に限定される。

本章の中継系の場合分岐点等化器  $S_i(f)$  の入力端を " $\alpha$ " とすると、合流点等化器  $S_5(f)$  及び  $S_7(f)$  の

出力端を合流点とする。それぞれ 2つの径路が存在し、  
 又合流点等化器  $S_4(s)$  の出力端を合流点とする 3つの  
 径路が存在する。

等化器  $S_5(s)$  で合流する 2つの径路  $C_1, C_3$  を例にとり

式 (3.8.5) の判定関数

$$D_\ell = \frac{|S_i^{(0)}| N_\ell^c}{|\pi_\alpha S_i^{(0)}|} \quad (\ell=1, 2, \dots, m) \quad (3.8.6)$$

を計算すると

$$D_1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{|T_{\eta 1}|}} \sqrt{\frac{N_{\eta 1}}{\lambda_5}}}{\sqrt{\frac{1}{|T_1|}} \sqrt{\frac{\lambda_0}{N_1}}} \left( \frac{\sqrt{\lambda_1^{(1)} N_2}}{|T_2|} + \frac{\sqrt{\lambda_2^{(1)} N_{S1}}}{|T_{S1}|} \right) \quad (3.8.7)$$

$$D_3 = \frac{\sqrt{\frac{1}{|T_{\eta 1}|}} \sqrt{\frac{N_{\eta 1}}{\lambda_5}}}{\sqrt{\frac{1}{|T_1|}} \sqrt{\frac{\lambda_0}{N_1}}} \left( \frac{\sqrt{\lambda_1^{(3)} N_3}}{|T_3|} + \frac{\sqrt{\lambda_3^{(1)} N_{S2}}}{|T_{S2}|} \right) \quad (3.8.8)$$

となる。更に、この二つの径路の合流点を等化器  $S_8(s)$

の出力端に移動しても 判定関数のそれぞれに共通な項が

掛かり又加わるのみで 判定関数  $D_1, D_3$  の大小関

係は変化しない。

そこで、5本のすべての径路について、合流点を等化器

$S_0(f)$  の出力端と考え判定関数  $D_l$  ( $l=1, 2, \dots, 5$ ) を計算し、

5つの判定関数に共通な項を取り除くと、

$$D'_1 = \frac{\sqrt{\lambda_1^{(1)} N_2}}{|T_{21}|} + \frac{\sqrt{\lambda_2^{(1)} N_{51}}}{|T_{51}|} + \frac{\sqrt{\lambda_5 N_{71}}}{|T_{71}|} \quad (3.8.9)$$

$$D'_2 = \frac{\sqrt{\lambda_1^{(2)} N_2}}{|T_{21}|} + \frac{\sqrt{\lambda_2^{(2)} N_{61}}}{|T_{61}|} + \frac{\sqrt{\lambda_6 N_{72}}}{|T_{72}|} \quad (3.8.10)$$

$$\vdots$$

$$D'_5 = \frac{\sqrt{\lambda_1^{(5)} N_4}}{|T_{41}|} + \frac{\sqrt{\lambda_4 N_{63}}}{|T_{63}|} + \frac{\sqrt{\lambda_6 N_{72}}}{|T_{72}|} \quad (3.8.11)$$

となる。従って、この5式を周波数毎に比較し、各

周波数毎に最小の  $D'_j$  ( $1 \leq j \leq 5$ ) を選ぶ対応する径

路  $C_j$  を割り当てれば良い。

この結果、各径路  $C_l$  ( $1 \leq l \leq 5$ ) の伝送帯域を

$\Omega_l$  と表わすと、両端末の送受信等化器  $S_0(f)$ ,  $S_m(f)$

の最適等化特性は III-87 の定理により、

平均乗誤差評価では、

$$|S_0|^2 = \frac{1}{M} \frac{1}{|T_{11}|} \sqrt{\frac{N_1^{(l)}}{\lambda_0}} \left( \sqrt{M} - \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}^{(l)}}}{|T_{k+1}|} \right) \quad f \in \Omega_l$$

$$(l=1, 2, \dots, 5) \quad (3.8.12)$$

$$|S_m|^2 = \frac{1}{|T_m|} \sqrt{\frac{\lambda_{m-1}}{W_m^{(l)}}} \left( \sqrt{M} - \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}^{(l)}}}{|T_{k+1}|} \right) \quad f \in \Omega_l$$

( $l=1, 2, \dots, 5$ ) (3.8.13)

相互情報量評価では

$$|S_0|^2 = \frac{1}{M} \frac{1}{|T_1|} \sqrt{\frac{W_1^{(l)}}{\lambda_0}} \left( \frac{1}{2 \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}^{(l)}}}{|T_{k+1}|}} - \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k W_{k+1}^{(l)}}}{|T_{k+1}|} \right)$$

$f \in \Omega_l$  ( $l=1, 2, \dots, 5$ ) (3.8.14)

$$|S_m|^2 \neq 0 \quad (\text{任意関数})$$

$$f \in \Omega_l \quad (l=1, 2, \dots, 5) \quad (3.8.15)$$

と定まる。これによりすべての等化器の最適等化特性が定まった。

しかし、実際には式(3.8.11)に含まれる未定乗数

$\lambda_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, K$ ) は 径路の選択、送信等化特性  $S_0(f)$

等に依存するから、上記の手順ですべての特性、帯域配分を

決定した後、再び式(3.8.11)を計算し式(3.8.5)の条件を満

たしているか否かを確認する必要がある。もしこの式が

満たされていなければ再び径路選択を行ない、条件式

(式 (3.8.5)) が満たされるまで繰り返す必要がある。

この点の手順については次章で詳しく触れる。

### § 8.3 単純な並列系、直列系との対応

前節で得られた解を単純な直列系と対応させる

ことは容易である。単純な直列系ではグラフ的に

入出力端を結ぶ経路がもともと唯一つであるから、前節

の中継系で任意の一本の経路例えば  $C_1$  に含まれる伝送路

を除いて、すべての伝送路の伝達関数を零におけば良い。

この結果式 (3.8.11) において他の経路はすべて失格し、経

路  $C_1$  のみが残り、伝送帯域  $\Omega_1$  の部分のみとなる。

こうして得られた解は明らかに I-§4, §5 で与えた

最適解と一致している。しかし、MI系についてみると、

III-§7.3 の定理の証明の際には、平均電力制限の表現を除

いて  $SNR \gg 1$  の仮定を用いているのに対して、I-§4

では、解の導出の際にも  $SNR \gg 1$  を用いているので、

その結果は、本節の手順で得られた結果の  $SNR \gg 1$  の

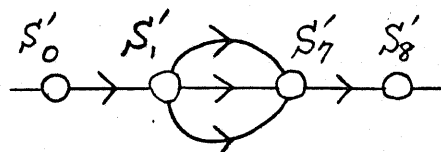
近似式と存している。

一方、単純な並列系に帰着させるには、次の手順で行なえば良い。まず交叉径路を消去する為、上記と同様に、例えば図Ⅲ・16の径路 $C_2, C_3$ にのみ含まれる伝送路 $T_{52}(f), T_{61}(f)$ の伝達関数を零とすれば良い。

これにより式(3.8.11)において径路 $C_2, C_3$ は失格する。

次に中継器を消去する為例えば径路 $C_5$ の中継器 $S_4(f)$ を例にとると、伝送路 $T_4(f)$ で相加する雑音 $N_4(f)$ を零とすれば良い。このような手順によ

り系は図Ⅲ・17に帰着する。



図Ⅲ・17 変型された中継網

この手順中、分岐点等化器 $S_1^{(1)}(f)$ を例にとると、

伝送路 $T_2(f), T_{51}(f)$ の雑音 $N_2(f), N_{51}(f)$ が消滅する

から、 $\{S_1^{(1)}(f) \cdot T_2(f) \cdot S_2^{(1)}(f) \cdot T_{51}(f) \cdot S_5^{(1)}(f)\}$ を一つの

等化器とみなして

$$|S_1^{(1)'}|^2 = |S_1^{(1)} T_2 S_2^{(1)} T_{51} S_5^{(1)}|^2$$

$$= \frac{1}{|T_1|} \sqrt{\frac{\lambda_0}{N_1} \frac{N_7}{\lambda_1'}} \frac{1}{|T_7|} \quad (3.8.16)$$

とすれば良い。

単純な並列系に帰着させるには、端末等化器と合流点等化器あるいは分岐点等化器とを同一の等化器に置換する必要がある。例えば等化器  $S_7'(f)$ ,  $S_8'(f)$  を例にとると、伝送路  $T_8(f)$  で相加する雑音  $N_8(f)$  を零として伝達関数  $\{S_7^{(1)'}(f) T_8(f) S_8'(f)\}$  を新たな端末等化器と考えれば良い。

この例の場合、新たな送受信等化器  $S^T(f)$ ,  $S^F(f)$  はそれぞれ

$$|S^T|^2 = \frac{1}{M} \frac{1}{|T^{(l)}|} \sqrt{\frac{N^{(l)}}{\lambda}} \left( \sqrt{M} - \frac{\sqrt{\lambda N^{(l)}}}{|T^{(l)}|} \right) \quad (3.8.17)$$

$$|S^F|^2 = \frac{1}{|T^{(l)}|} \sqrt{\frac{\lambda}{N^{(l)}}} \left( \sqrt{M} - \frac{\sqrt{\lambda N^{(l)}}}{|T^{(l)}|} \right) \quad (3.8.18)$$

$$\text{但し } f \in \Omega_l \quad (l=1, 2, 3)$$

となり、伝送帯域  $\Omega_\ell$  を決定する判定関数  $D_\ell (\ell=1, 2, 3)$

は 共通項を除いて

$$D_\ell = \frac{\sqrt{\lambda N^{(\ell)}}}{|T^{(\ell)}|} \quad (\ell=1, 2, 3) \quad (3.8.19)$$

となる。

この結果は 単純な並列系の最適解に帰着してい

3。

この対応関係から云えることは、中継網の最適構成は、単純な並列系の径路決定の判定関数(式(3.8.19))を一般化した式(3.8.5)により径路の決定を行ない、

次に得られた単一径路内の帯域では、I-§4, §5で得られた単純な直列系の最適構成をとる形態となつていふことである。

しかし 実際には この判定関数となる式(3.8.5)が各径路内の直列系の等化特性に依存する為、各径路への帯域の割り当ておよび各径路内の最適等化特性と無関係に判定を下すことができないうちに難か



しがある。これらの点については次章で述べる。

尚 II-§ 2.4 で述べたように、以上の章では、分岐点、合流点、端末の各等化器の複合した等化器はダミーの伝送路で分離し、I-§ 2 の4種の等化器に置換して扱ってきたが、このダミー伝送路の除去は本節と同じ手法により行なえる。

## § 9. 径路選択

前章までの結果により、一般的なアナログ中継網の最適化に肉して残された問題は一つとなった。

すなわち、系の入力端と出力端とを結ぶ複数径路のうちどの径路にどのような帯域を割り当てるかと言う問題である。

本章では、この径路選択の判定条件等についての検討を加えた後、径路選択の具体的なアルゴリズムを示す。

### § 9.1 最適な径路選択の条件

系の入力端と出力端をグラフ的に結ぶ径路が  $m$  本 ( $C_1, C_2, \dots, C_m$ ) 存在した場合について考える。

III-§3 の単一径路の定理によれば、最適解においてはこの複数径路のうち

$$\frac{|S_i^{(j)}| N_i^e}{|\pi_{z S_i^{(j)}}|} < \frac{|S_i^{(l)}| N_l^e}{|\pi_{z S_i^{(l)}}|} \quad (1 \leq l \leq m, l \neq j)$$

(3.9.1)

を満足する径路  $C_j$  又は

$$\frac{|S_i^{(k_1)}| N_{k_1}^e}{|\prod_{\alpha} S_i^{(k_1)}|} = \frac{|S_i^{(k_2)}| N_{k_2}^e}{|\prod_{\alpha} S_i^{(k_2)}|} = \dots = \frac{|S_i^{(k_M)}| N_{k_M}^e}{|\prod_{\alpha} S_i^{(k_M)}|} < \frac{|S_i^{(l)}| N_l^e}{|\prod_{\alpha} S_i^{(l)}|}$$

$$(1 \leq l \leq m, l \neq k_1, k_2, \dots, k_M) \quad (3.9.2)$$

を満足する  $M$ 本の径路  $C_{k_1}, C_{k_2}, \dots, C_{k_M}$  が伝送径路となる。従って問題は前章までに得られた最適等化特性を持ち、径路に関する最適条件(式(3.9.1)又は(3.9.2))を満足する帯域配分、径路決定を行なうことである。

$m$ 本の径路のうち  $N$ 本  $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_N}$  が合流点等化器  $S_i^T(f)$  で合流した場合を考える。この時判定関数に含まれる径路の起点  $\alpha$  を送信等化器  $S_i^T(f)$  の出力端に定めると、すべての径路に共通の起点とすることができ。

又、合流点を、複数径路の真の合流点より後方に移動しても判定関数の大小関係は不変となる事実を、III-8.2の具体例で示したが、以下にこの事実を一般的に示す。

最適等化特性を用いて 径路  $C_e$  の判定因数

$$D_e = \frac{|S_i^{(2)}| N_e^e}{|\pi_{s_0 s_i^{(2)}}|} \quad (3.9.3)$$

を計算すると次式となる。

$$D_e = \sqrt{\frac{1}{|T_1| |T_{\lambda+1}|}} \sqrt{\frac{N_1 N_{\lambda+1}}{\lambda_0 \lambda_\lambda}} \left[ \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k} N_{k+1}^{(2)}}{|T_{k+1}|} \right] \quad (3.9.4)$$

この時  $N_k^{(2)}(f)$  は 径路  $C_e$  で 相加する 雑音を表わす。

ここで 等化器  $S_i^{(2)}(f)$  から 系の 出力端 に至る 径路のうち

の 一本  $C_p$  を用い、 上記の  $N$ 本の 径路の 後に 共通に

接続したと 考え、 合流点を、 合流点等化器  $S_i^J(f)$  から、

受信等化器  $S_m^F(f)$  の 出力端 に 移動して (図 III. 18) 各径路

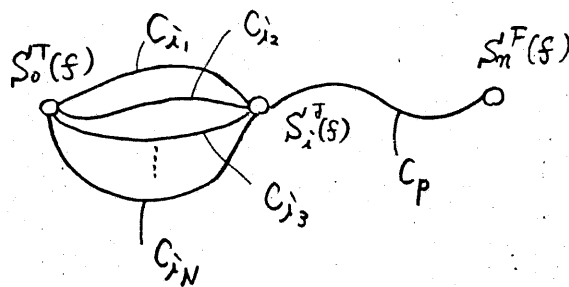


図 III. 18 径路の延長

$(C_{\lambda_1} + C_p)$ ,  $(C_{\lambda_2} + C_p)$ , ...,  $(C_{\lambda_N} + C_p)$  について 判定因数  $D_e'$

を計算してみると、 受信等化器 に含まれる 荷重項を 共通項

として省略すると

$$D_i' = \frac{1}{|\Pi_i|} \sqrt{\frac{N_i}{\lambda_0}} \left[ \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k} N_{k+1}^{(Q)}}{|T_{k+1}|} + \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k} N_{k+1}^{(P)}}{|T_{k+1}|} \right] \quad (3.9.5)$$

となる。この時  $N_{k+1}^{(Q)}(f)$ ,  $N_{k+1}^{(P)}(f)$  はそれぞれ経路

$C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_N}$  及び  $C_P$  で相加する雑音を表わしている。

判定関数  $D_e$  と  $D_i'$  を較べると、 $D_e'$  は経路  $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots$ ,  $C_{i_N}$  に無関係な項が加わっているのみで、相互の大小関係

係については  $D_e$  を用いても  $D_i'$  を用いても同一の結果と

なることがわかる。 $D_e'$  (式(3.9.5)) の内、経路選択に

無関係な項を整理すると、判定関数を新たに次式で

定義できることがわかる。

$$D_e \cong \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k} N_{k+1}^{(Q)}}{|T_{k+1}|} + \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k} N_{k+1}^{(P)}}{|T_{k+1}|} \quad (3.9.6)$$

以上の議論で経路  $C_P$  は任意に選んであるが、経路の起点  $x$  を等化器  $S_x^T(f)$  として同様の議論を

展開すれば経路  $C_P$  の選択は上式第2項を最小

とする経路にすれば良いと云う結論に達する。

結局、現実の合流点が中継網のいずれの

点にあっても、系の入力端と出力端を結ぶすべての径路

$C_l$  ( $l=1, 2, \dots, m$ ) について

$$D_l = \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k} |N_{k+1}^{(l)}|}{|T_{k+1}|} \quad (3.9.7)$$

の比較をすれば良いことがわかる。この時  $\sum_k [\cdot]$  は径路

$C_l$  で相加する雑音  $N_k^{(l)}(s)$  すべてについての和を表わす。

## § 9.2 条件の意味

前節で系の入力端と出力端を結ぶ各径路  $C_l$  ( $l=1, 2, \dots, m$ ) について式(3.9.7)を計算し系の伝送径路を決定すれば良いことがわかった。本節ではこの判定函数の意味を考える。

ある径路  $C_l$  とその径路に割り当てられた伝送帯域  $\Omega_l$  に着目すると、III-§4~§7の結果に明らかのように、この伝送帯域内ではI-§4~§7で得られたMI系あるいはMS系が構成されている。 $\Omega_l$ 以外の帯域についてもそれぞれ対応する径路について同じことが云える。

すなわち、周波数分割的に系の入力端と出力端を結ぶ  
 径路が決定され、各々の径路については、単純な直列  
 系の最適構成と全く同じ構造を持っている。

この時、判定因数“ $D_e$ ”は、 $E-\delta \times I$  で明らかにし  
 たように、最適系を構成している“伝送路系”の等価雑  
 音を意味している。

すなわち 径路選択条件(式(3.9.1), (3.9.2))の意味は  
 次のように解釈できる。 各径路について無損失の  
 等価伝送路である“伝送路系”を構成し、この複数の“伝  
 送路系”のうち最も等価雑音の少ないものを選ぶ。

この観点から 単一径路の定理の例外条件である  
 $D_{\lambda_1} = D_{\lambda_2} = \dots = D_{\lambda_M}$  について考えてみると、ある帯域内  
 で全く等しい電力スペクトル密度を持つ雑音の相加す  
 る  $M$ 本の無損失伝送路が存在することに対応する(図  
 III.19)。

このような場合 各伝送路に許される平均出力  
 電力  $P_1, P_2, \dots, P_M$  に応じて 情報信号  $M(f)$  を配分す

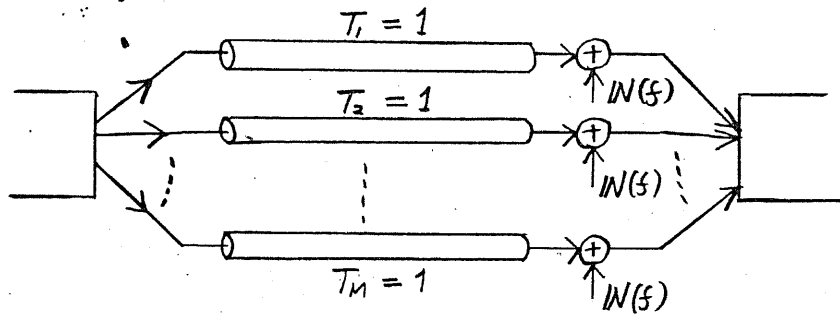


図 III.19 例外条件の意味

れば、その配分が周波数分割的 (図 III.20 (a)) であっても、全帯域にわたって単に電力制限に応じて配分しても (図 III.20 (b))、あるいは両者の混在した送り方をしても、いずれの系も互いに等価である。

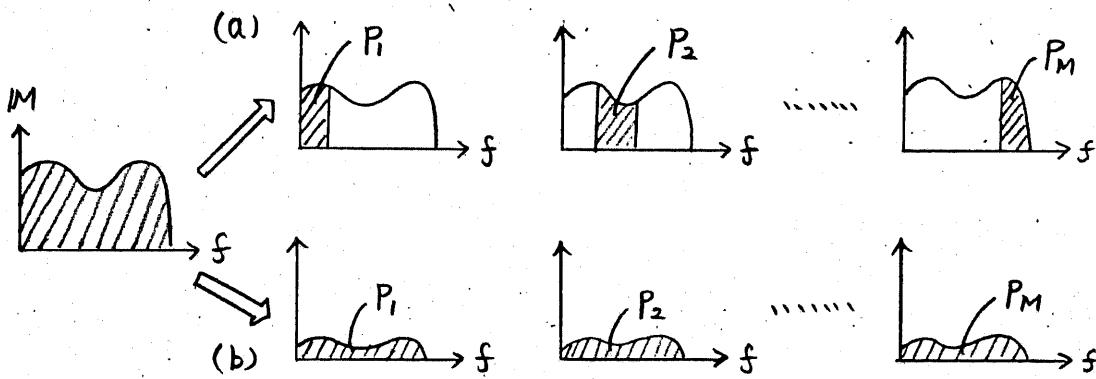


図 III.20 並列径路の利用

そこで常に 図 III.20 (a) のような周波数分割による配分を行なうことに定めれば、単一径路



の定理における例外条件(式(3.9.2))は無視することができ  
る。

### § 9.3 経路選択のアルゴリズム

本節では 具体的な経路選択のアルゴリズムを示す。

このアルゴリズムの構成にあたっての肉題点は次のようなもので  
ある。

ある帯域配分とある経路選択のもとで決定された解に  
対し 判定関数  $D_k(f)$  を用いて ある周波数  $f_0$  における最適  
性の検定を行なう場合を考える。この時、判定条件(式  
(3.9.1))に等号が成立する場合(式(3.9.2))には、前節で述べ  
たような周波数分割による配分を行なうこととする。従って、  
肉題としている解には、周波数  $f_0$  を伝送する経路は、 $f_0$  が  
伝送帯域内であれば 唯一  $(C_k)$  存在する。そこで、まず  
この周波数近くの ある帯域  $f_0 \sim f_0 + \Delta f_0$  に着目し、判定  
関数  $D_k(f_0)$  を計算する。次に、この帯域の伝送経  
路を他の経路  $C_l$  ( $l \neq k, 1 \leq l \leq L$ ) に変更した場合の解を

想定して、この径路についての同一周波数の判定関数

$D_e(f_0)$  を計算する。

この時 径路  $C_k$  以外のすべての径路  $C_l$  について

$$D_k \leq D_l \quad (1 \leq l \leq m, l \neq k)$$

であれば、この系が最適条件を満足している。

しかし、 $D_k > D_l$  となる径路  $C_l$  が存在すれば、帯域  $f_0 \sim f_0 + \Delta f_0$  について、伝送径路を径路  $C_k$  から径路  $C_l$  に変更することで、系の改善が期待される。

しかし、この径路の変更により、中継網内の径路  $C_k$ ,  $C_l$  に関与した等化器の電力制限には変化を生じ、未定乗数  $\lambda_i$  ( $i=0, 1, \dots, m-1$ ) が変化するため、判定関数

$$D_e(f) = \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}^{(k)}}}{|T_{k+1}|} \quad (3.9.8)$$

も変化し、他の周波数における径路の最適性がくずれる可能性がある。従って、伝送径路の変更に伴い、

すでに最適性を確認した帯域についても、再度最適

性の検定を行なう必要がある。

この時、すべての帯域について最適性が満たされる状態に到達すれば良いが、例えば

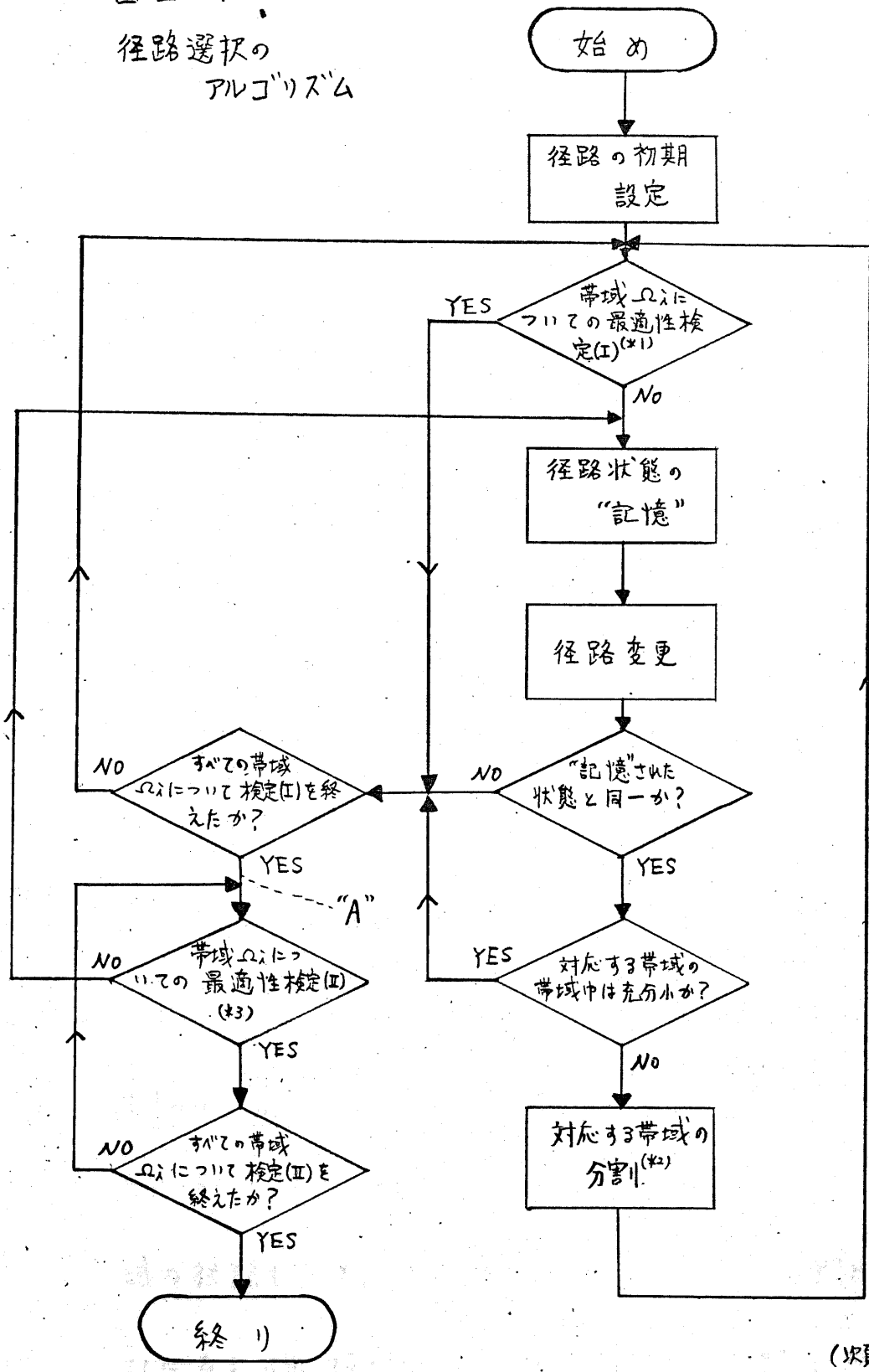
	帯域	経路変更
①	$f_0 \sim f_0 + \Delta f_0$	$C_k \rightarrow C_l$
②	$f'_0 \sim f'_0 + \Delta f'_0$	$C_i \rightarrow C_j$
③	$f_0 \sim f_0 + \Delta f_0$	$C_l \rightarrow C_n$
④	$f'_0 \sim f'_0 + \Delta f'_0$	$C_j \rightarrow C_i$

のように、ステップ①から順次状態が変更されステップ④で初期の状態に戻るようなループにおちいる可能性がある。従ってアルゴリズムはこのループからのがれ得るものである必要がある。

図Ⅲ・21は経路選択アルゴリズムの一例を示したものである。最初に任意に設定した経路と帯域について最適性の検定を行ない、不適の部分があればそれぞれについて経路変更を行なう。

すべての帯域の検定が一通りおわりと点“A”へ出て再び最初から最適性の検定を行なう。

図 Ⅳ・21  
 経路選択の  
 アルゴリズム



(次頁へ)

(\*1) 帯域  $\Omega_i$  の内部がすべて判定条件を満たした時のみ  $\rightarrow$  YES

(\*2) 経路変更が最後に行なわれた帯域を細かく分割する。

(\*3) 帯域  $\Omega_i$  の内部がすべて判定条件を満たすか、又は帯域  $\Omega_i$  の帯域中が充分小で隣接する帯域が判定条件を満たす場合  $\rightarrow$  YES

すべての帯域が最適条件を満足してれば良いが、最適性の崩れてくる帯域が一つでもあれば経路変更のループへ戻る。経路変更の際には、古い経路状態はすべて記憶され、新たな経路状態は、記憶されたすべての状態と比較される。古い状態に一致するものがある場合はループに陥ったと判定し、対応する帯域を更に細かく分割し最初からやり直す。

この処理は次の理由による。最適条件を満たさない帯域が見出された時、その帯域の条件を満たさない部分の一部分の経路を変更すれば系が改善されることは確かであるが、この一部分の変更により条件を満たさない領域は変化する。従って、条件を満たさない帯域の経路も一度にすべて変更することは、必要以上に経路を変更することに存る可能性があり、これがループに陥る原因である。

従って、ループに陥った帯域はより細かい帯域に分割すること  
で、帯域の境界がより正確に表現されるからこのループを抜  
け出すことができる。この際、必要以上に正確に表現する必要  
は無いからこの点もアルゴリズムの中で考慮されている。

この結果、初期設定で行った帯域分割 ( $\Omega_1, \Omega_2, \dots$   
 $, \Omega_m$ ) のうち、その帯域内に伝送帯域の境界を含む帯域の  
分割が行われ、新たな帯域についても境界を含むもの  
については更に分割が行われ、境界付近が充分正確に  
表現された状態で、最適経路状態に達することができる。

## § 10 複数情報源受信者対への拡張

前章までに、単一情報源からの信号を単一受信者に伝送する場合を論じてきた。

本章では前章までの議論を、情報源受信者が  $Q$  対存在する場合に拡張できることを示す。

### § 10.1 複数の情報源受信者対の系

情報源としては、電力スペクトル密度  $M_{\lambda}(f)$  ( $\lambda=1, 2, \dots, Q$ ) を持つ定常なアナログ情報源を考慮する。<sup>(注)</sup> 又、情報源は相互に相関を持たないものとする。

各情報源に対してこの情報を受信する受信者を考え、結局情報源受信者対が  $Q$  対接続されたアナログ中継網を対象とすることになる。

この時情報源 " $\lambda_s$ " から、これに対応する受信者 " $\lambda_r$ " への中継系の評価関数 (例えば相互情報量) を表わす  $e_{\lambda}$  を要素に持つベクトル

$$\mathbf{E} = (e_1, e_2, \dots, e_Q) \quad (3.10.1)$$

(注) 相互情報量評価の場合はガウス性の仮定を加える。

を考えると、系の総合評価関数  $E_T$  は このベクトルの関数として 一般に

$$E_T = f(E) \quad (3.10.2)$$

と表わされる。

最も簡単な一例を考えると ある荷重行列  $W$  により、

$$E_T = E W E^T \quad (3.10.3)$$

と表わせる。

以下の議論では この関数の内部には 立ち入らず、

評価関数  $E_T$  のもとで、III-§8 までの議論の適用により中継

系の最適化を行なうアルゴリズムについて考える。

この時、関数  $E_T = f(E)$  は ベクトル  $E$  に関して

単調な関数とする。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial e_i} E_T \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, Q) \quad (3.10.4)$$

である。

それぞれの情報源と受信者の対について、他に

情報源受信者が存在しないものとして III-§9 までの手順で



最適化を行ない、この結果、それぞれの対について得られる最適解が相互に等価器を一つも共有してゐない場合は、これらの最適解に変更を加えず同時に実現することができ、そのまま評価関数  $F_T$  のもとでの最適解となり得る。

一方、逆の極端な例として、同一伝送路  $T_i(f)$  の同一帯域を異なる情報源の信号が占めた場合を考えると、一方の信号  $M_k(f)$  にとって他方の信号  $M_l(f)$  は単なる雑音にすぎず、しかも通常

$$M_l(f) \gg M_k(f) \quad (3.10.5)$$

であり、又

$$M_k(f) \simeq M_l(f) \quad (3.10.6)$$

であるから、信号  $M_l(f)$  が占めてゐる伝送路の帯域は、他方の信号  $M_k(f)$  にとって、極めて雑音の多い伝送路となり、III-§9 の判定条件から考えて、この伝送路のこの帯域は径路となり得ない。逆に言うと、このような場合信号  $M_k(f)$  と  $M_l(f)$  のいずれに優先権を認めるか

の問題である。この判定は系の評価関数  $E_T$  に依る必要がある。

又、中間的な場合として、伝送路  $T_i(f)$  は共有するが信号  $M_k(f)$  と  $M_l(f)$  が同一の帯域に重なることが無いと言う場合は、等化器  $S_{i \rightarrow}(f)$  の平均電力制限により定まる未定乗数  $\lambda_i$  が、信号  $M_k(f)$  単独の場合に較べて増大する。従って、この伝送路を通る径路に属する判定関数 (III-§9.1) の値が増加し、径路選択に影響を及ぼすことになる。

従って  $Q$  対の情報源受信者の存在する系について考える時、各等化器の最適等化特性は一対の場合と同様に決定できるが、未定乗数は異なる情報信号の径路選択によっても影響を受け、又異なる情報間の径路割当ても必要となる。

従って、前記の三つの場合のうち、後者の二つを考慮した、評価関数  $E_T$  に基づく径路選択のアルゴリズムが必要であり、逆にこのアルゴリズムにより  $Q$  対

の情報源受信者を持つ系の最適解が定まることになる。

### § 10.2 複数情報源受信者対の径路選択アルゴリズム

複数情報源受信者対の系の径路選択のアルゴリズムを示す。

複数の情報信号が同一帯域を共有しながら、同一の等化器を経由する場合は、その等化器  $S_i(f)$  の電力制限は、等化器の入力信号を  $M'_{i_j}(f)$  ( $1 \leq j \leq Q$ ) として

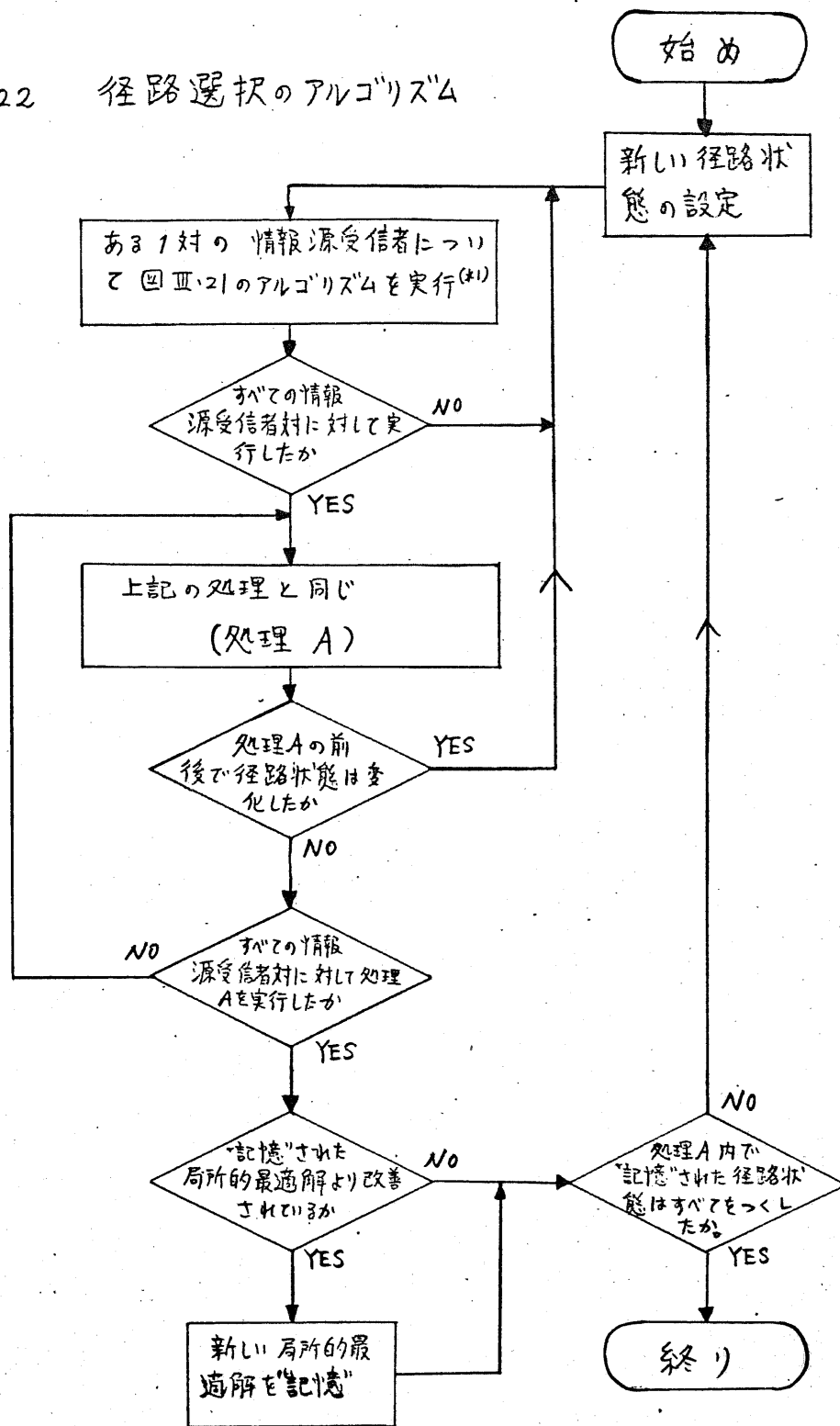
$$P_i = \int_{-\infty}^{\infty} |M'_{i_1} + M'_{i_2} + \dots + M'_{i_Q}|^2 |S_i|^2 df \quad (3.10.7)$$

とすれば良く、これに伴って、この等化器の関与する径路の判定関数に含まれる未定乗数  $\lambda_i$  は、この等化器を通るすべての情報の径路選択に依存する。

一方同一帯域を複数の信号が共有する場合は、前節に述べたように最適解と成り得ないから、いずれの情報信号の径路とすべきかを判定すれば良い。

これらの点を考慮して径路選択アルゴリズムを構成すると、一例として図 III.22 のようなものになる。

図Ⅲ、22 経路選択のアルゴリズム



(\*) アルゴリズム中の処理が、図Ⅲ、21のアルゴリズムの実行の際“経路の初期設定”ははぶく

又最適性の検定の際、既に他の経路の占有している帯域は比較経路と

して選ばず、電力制限は式(3.10.7)を用いる。

このアルゴリズムは 最初に、前章のアルゴリズムにより系の最適化を行なう。この際 他の情報源信号に既に占有されている 伝送路の該当帯域は 径路として選ばない。この操作を  $Q$  個の情報源受信者対について 順次行なう。この結果、他の情報源の信号を雑音とみなすと云う範囲では最適条件を満たす解に達する。しかし これだけでは不十分である。すなわち、既に ある情報信号が 占めている伝送路の該当帯域は、他の情報源の信号の径路として選ばれないし、又 その等化器の未定乗数はすでに増加していて、他の情報源の信号がこの伝送路を径路に選ぶ可能性は、帯域が異なっても、小さくなる。いわば この結果は 径路の初期設定に依存した局所的最適解となっている。

そこで 次に、以上の最適化過程で現われた すべての径路状態を除く新しい状態を初期状態として設定し、上記の処理を繰り返す。この結果は 先の局所的最適解と比較され、系の評価基準のもとで良好なものを残す。

この手順を繰り返す 新たな初期設定ができなくなった時

残っている 局所最適解が 真の最適解となる。

このアルゴリズムは、Ⅲ-§9.3 のアルゴリズムと異なり、

網羅的要素を含んでおり、良いアルゴリズムではない。

この点を改善するには、他の情報源受信者対を考慮せず

一対の場合として最適化した  $Q$  個の解を重ね合わせ、同一伝送

路同一帯域に重なった部分、及び同一等化器に重なった径路の

再配置という考え方のアルゴリズムが有効と思える。

## § 11 結 論

ループを持たないと言う条件を満たす、伝送路と等化器の一般的な接続関係を持ち、これにより一対の情報源と受信者を結ぶアナログ中継網の最適構成に関する諸定理を示し、更に径路選択、帯域配分の為の条件及びアルゴリズムを示した。更に、情報源受信者対が複数の場合へも、系の評価関数が、個々の情報源受信者対に関する評価関数の単調関数であれば、一対の場合の径路選択アルゴリズムを変更することで、拡張できることを示した。

前章までの結論は (I-中継系の最適構成) で行なった最適化 及び 最適解の一般化となっている。しかし、結果的には、中継網になっても 単一径路の定理の存在により、同一径路を通る帯域に着目する限り、単純な接続関係を持つ I-§4, §5 の結果と同一であり、I-§6, §7 の最適系の構成に関する解釈は そのまま 中継網の場合にも適用される。

しかし 中継網固有の問題として、分岐点、合流点の存在により 単一径路の定理があっても、個々の帯域にどの径

路を割り当てるかの問題が生じるが、この径路選択の基準となる関数も III-§9 で述べたように、I-§7 で定義した伝送路系の等価雑音に対応している。

いわば 中継網の最適化は、複数の“伝送路系”で接続された系の入出力端末を、周波数毎にいずれか一つの“伝送路系”で結ぶことに対応する。しかしこの複数の伝送路系が相互に独立でない点に径路選択の難かしさがある。

各章についてみると §2 で、中継網の場合に特有の、等化器の分類 伝送路の表現等について述べた後、§3 で 中継網最適化の骨格となるべき単一径路の定理を示し、§4, §5, §6, §7 でそれぞれ 中継器、分岐点等化器、合流点等化器、端末等化器の最適等化特性を与える定理を示した。これらの等化器のうち 中継器、分岐点等化器、合流点等化器は、同一径路を通る帯域に着目すると、すべて中継器の役割を担っており、相互情報量、平均二乗誤差の二つの評価基準に依存しない、同一の最適等化特性を持ち、伝送路系を構成している。



これに対して、末端等化器は2つの評価基準により、その最適特性が異なる。しかし同一径路を通る帯域に着目すれば I-§4, §5 の末端等化器と同一の特性となっており、このことには変りはない。

§8では、以上の各章の適用例として具体的な接続関係の与えられた中継網の最適化を行ない、更に単純な直列系、並列系との対応関係も示した。

§9, §10では径路選択の問題を扱い、§9では、情報源受信者が一対の場合について径路選択の条件とその意味及びアルゴリズムを示し、§10では複数対の情報源受信者を持つ系への拡張と径路選択のアルゴリズムについて述べた。

これらの結果として、一般的な中継網の最適化と云う広い視野からのアナログ中継系の最適構成とその機能についての解釈を可能とし、I-§6, §7で示された“伝送路系”その他の概念が最適なアナログ中継系に共通の一般的な概念であり、更に伝送路系の等価雑音が、径路選択の

判定関数となる等、統一的な理解に有用な事実が明らかとなった。

尚 Ⅲ-§7.3 の定理は、相互情報量のもとで最適な送信等化特性を現わしているが、Ⅰ-§4 で与えた解は、この定理の示す解の  $SNR \gg 1$  の近似解となっている。これは Ⅲ-§7.4 の証明が  $SNR \gg 1$  の仮定をその求解の過程で用いなかった事に起因するもので、Ⅰ-§4 においても同様の手法を用いれば正確な解が与えられるが、Ⅲ-§7.4 の証明は Ⅰ-§4 の結果から解が予想されることを利用して初めて可能となった証明方である為 Ⅰ-§4 の証明はそのまま残した。

## 結 語

“Ⅰ”、“Ⅱ”、“Ⅲ”の結果を通じて アナログ中継システムの最適構成が種々の場合について示されると共に、それらの最適系に共通する“伝送路系”“中継単位”“システム等化”“伝送路系の等価雑音”といった概念が明らかとなり、中継器を持たない系も含めた、一般のアナログ伝送系に対する統一的な理解を与えることができた。

一言で云えば 局所的最適解である中継単位が等価伝送路である“伝送路系”を構成し、この等価伝送路に対する等化項である“システム等化”及び情報源白色化機能を組み合わせて、アナログ伝送系の最適系が構成されることになる。網状の接続関係を持つ系は、“単一経路の定理”により、単純な接続関係を持つ系に帰着する。この時“伝送路系の等価雑音”が経路選択の判定関数の役割を果たす。又、この関数により、複数の情報源受信者対を持つ系も、単純な接続関係を持つ最適系の組み合わせ問題に帰着する。

“伝送路系”と云う 等価伝送路の概念に一度到達し、これにより物理的な意味が理解されると、“単一径路の定理”も最適解の構造も極めて当然のこととして理解され、それまでの複雑な解析手順が無駄な作業であったようにも思えてくる。しかしこれはむしろ、最適構成の持つ簡明な構造に感嘆すべきであって、解析手順はそこに到達するまでに必要な道程と考えるべきであらう。

しかし、最適構成に共通するいくつかの概念が理解されたこの時点で振り返ってみると、最適解に対する見通しがきく為、各部分で行なった解析に回り道が目立つ。

例えば、前にも触れたが、I-§4.3, §4.4 における解析は、III-§6.4, §7.4 と比較しても同一の対象をより限定された範囲で扱っているが、はるかに複雑な手順となっている。しかし、III-§6.4, §7.4 の手法は、I-§4.3, §4.4 の複雑な手順により得られた結果に基づいて始めて可能となった手法である。この意味で I-§3.4, §4.4 の手順はあえてそのままにした。細かい点では、この意味の手順の

複雑さは各所に残っているように見える。

更に本論文の範囲に限らず、例えば“アナログ”中継機能の改善限界に関する検討結果<sup>(14),(16)</sup>等も、本論文の“伝送路系の等価雑音”の概念を用いれば、判定関数を中継器間隔  $S_{\text{span}}$  の関数とみなして

$$\frac{\partial D(S_{\text{span}})}{\partial S_{\text{span}}} = \frac{\partial}{\partial S_{\text{span}}} \left( \sum_k \frac{\sqrt{\lambda_k N_{k+1}}}{|T_{k+1}|} \right)$$

の正負を計算することで容易に結論することができるといえる。

“アナログ”中継システム更には一般に“アナログ”伝送系の最適構成についての議論は、本論文の議論であらまし完了したように思う。しかし I-§2.1, §3.5 で触れたように、中継システム(あるいは伝送系)の真の最適化には、本論文で定義した最適化基準と情報源受信者対の持つ評価基準との整合の問題が解決される必要がある。これは極めて本質的な問題であるが、解析に際して異質の物に対する一種の価値体系を必要とする問題であり、容易に解決し得る性質のものではない。

## 謝辞

五年にわたる 大学院の生活を通じて、指導教官  
として 研究面で 終始 適切な 御指導をいただき、  
又、 日常 公私を問わず 種々の 御配慮をいただ  
いた 瀧保夫教授に 心から 感謝いたします。

又 研究室における 打合せ等を通じ 御討論御  
助言 いただいた 羽鳥光俊助教授、又折に触れ  
御助言 いただいた 宮川洋教授、原島博講師に深  
謝いたします。

更に 打合せ あるいは 日常を通じて 種々御世  
話になった、 瀧研究室、宮川研究室、羽鳥研究  
室の諸賢に 感謝いたします。

## 参考文献

- (1) "Transmission Systems for Communications," Bell Telephone Laboratories, Inc., 1959.
- (2) Blecher, F.H. et al, "The L4 Coaxial System," B.S.T.J., Vol. 48, p. 819 (Apr, 1969).
- (3) Gammie, J. and S.D. Hathaway, "The TJ Radio Relay System," B.S.T.J., Vol. 39, p. 821 (July, 1960).
- (4) "TD-3 Microwave Radio Relay System," B.S.T.J., Vol. 47, p. 1143 (Sept. 1968).
- (5) F.J. Herr, "The L5 Coaxial System Transmission System Analysis," IEEE Trans., Vol. COM-22, No. 2, p. 190 (Feb. 1974).
- (6) F.C. Kelcourse and R.A. Tarbox, "The Design of Repeatered Lines for Long-Haul Coaxial Systems" IEEE Trans., Vol. COM-22, No. 2, p. 200 (Feb. 1974).
- (7) E.H. Angell and M.M. Luniewicz, "Low Noise Ultralinear Line Repeaters for the L5 Coaxial System," IEEE Trans., Vol. COM-22, No. 2, p. 206 (Feb. 1974).
- (8) Y.S. Cho, C.R. Crue and M.R. Giamusso, "Static and Dynamic Equalization of the L5 Repeatered Line" IEEE Trans., Vol. COM-22, No. 2, p. 212 (Feb. 1974).
- (9) J.S. Mayo, "A Bipolar Repeater for Pulse Code Signals," B.S.T.J. Vol. 41, p. 25 (Jan. 1962).
- (10) M.R. Aaron, "PCM Transmission in the Exchange Plant," B.S.T.J., Vol. 41, p. 99 (Jan. 1962).



- (11) H. Cravis and T.V. Crater, "Engineering of T1 Carrier System Repeated Lines," B.S.T.J., Vol. 42, p. 431 (Mar. 1963).
- (12) 瀧, 小林, "簡易再生中継系の機能限界と実現上の問題点," 信学論(A), Vol. 56-A, No. 6, p. 353 (昭48-06).
- (13) T.H.E. Ericson and U.J.S. Johansson, "High-Capacity Digital Line Links," IEEE Trans. Vol. COM-21, No. 6, p. 680 (Jan. 1963).
- (14) 瀧, 小林, "Hybrid 中継系の情報伝送速度について," 昭48 信学全大 1832.
- (15) 瀧, 小林, "単位情報伝送速度当りのコストに因る Hybrid 中継系の検討," 昭46 信学全大 1568.
- (16) 川島, 大槻, 筆本, 栗田, 富盛, "デジタル中継系に対する一考察," 信学論(A), Vol. 53-A, No. 5, p. 228 (昭45-05).
- (17) 川島, 筆本, 片桐, 富盛, "PCM 中継の二つの検討," 信学誌, Vol. 49, No. 11, p. 310 (1966-11).
- (18) A.L. Hodgkin and A.F. Huxley, "A Quantitative Description of Membrane Current and Its Application to Conduction and Excitation in Nerve," J. Physiol 117, p. 500 (Aug. 1952).
- (19) R. FitzHugh, "Impuls and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane," Biophysical J., 1, p. 445 (July, 1961).
- (20) 佐藤, "アクティブ線路," 信学誌, Vol. 50, No. 8, p. 1481 (昭42-08).
- (21) H.D. Crave, "Neuristor-A Novel Device and System Concept," Proc. IRE, Vol. 50, No. 10, p. 2048 (Oct. 1962).
- (22) J. Nagumo, S. Arimoto and S. Yoshizawa, "An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon," Proc. IRE, Vol. 50, No. 10, p. 2061 (Oct. 1962).

- (23) 中原, 清水, 高坂, " タイミング再生機能を有するパルス能動線路," 信学誌, Vol.49, No.11, p.2225(昭41-11).
- (24) J.E.Mazo, J.Salz and L.A.Shepp, "Error Rates on a Data Link with Nonlinear Regeneration," IEEE Trans., Vol.COM-21, No.6, p.671(June, 1962).
- (25) 松島, " 簡易中継器に因るPCM中継方式の一検討," 信学通信方式研資, CS68-7(昭43-05).
- (26) W.R.Bennet and J.Salz, "Binary Data Transmission over a Real Channel," B.S.T.J., Vol.42, p.2387(Sept.1963).
- (27) M.S.Doelz, E.T.Heald and D.L.Martin, "Binary Data Transmission Techniques for Linear Systems," Proc.IRE, Vol.45, p.656, (May, 1957).
- (28) P.Mertz, "Model of Impulsive Noise for Data Transmission," IRE Trans.Vol.CS-9, p.130(June, 1961).
- (29) A.Guida, "Optimum Tapped Delay Line for Digital Signals," IEEE Trans., Vol.COM-21, No.4, p.277(Apr.1973).
- (30) S.Benedetto, G.DeVincentiis and A.Luvison, "Error Probability in the Presence of Intersymbol Interference and Additive Noise for Multi-level Digital Signals," IEEE Trans., Vol.COM-21, No.3, p.181(March, 1973).
- (31) A.C.Salazar, "Design of Transmitter and Receiver Filters for Decision Feedback Equalization," B.S.T.J., Vol.53, No.3, p.503(March, 1974).
- (32) J.W.Smith, "The Joint Optimization of Transmitted Signal and Receiving Filter for Data Transmission," B.S.T.J., Vol.44, p.2363(Dec.1965).
- (33) T.Berger and D.W.Tufts, "Optimum Pulse Amplitude Modulation-Part I, Transmitter-Receiver Design and Bounds from Information Theory," IEEE Trans., Vol.IT-13, p.196(Apr.1967).

- (34) E.D.Sunde, Communication Systems Engineering Theory, John Wiley 1969.
- (35) K.H.Mueller, "A New Approach to Optimum Pulse Shaping in Sampled Systems Using Time-Domain Filtering," B.S.T.J., Vol.52, No.5, p.723 (May-June, 1973).
- (36) J.Salz, "Optimum Mean-Square Decision Feedback Equalization," B.S.T.J., Vol.52, No.8, p.1341 (Oct. 1973).
- (37) S.L.Freeny and R.W.Cang, "Hybrid Digital Transmission Systems- Part I, II," B.S.T.J., Vol.47, No.8, p.1633 (Oct. 1968).
- (38) C.E.Shannon, "Communication in the Presence of Noise," Proc. IRE, Vol.37, p.10 (Jan. 1949).
- (39) N.Wiener, "Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, John Wiley and Sons, Inc., 1949.
- (40) H.W.Bode and C.E.Shannon, "A Simplified Derivation of Linear Least-Square Smoothing and Prediction Theory," Proc. IRE, Vol.38, p.417 (Apr. 1950).
- (41) 尾佐竹, 田中, "最適通信方式-マトリクス変換による伝送路と情報の整合問題-", 信学論(A), Vol.52-A, No.12, p.513 (昭44-12).
- (42) 宮川, "連続的多重通信路の通信容量," 信学誌, Vol.42, No.3, p.22, (昭34-03).
- (43) E.A.Walvick, "On the Capacity of an Ensemble of Channels with Differing Parameters," B.S.T.J., Vol.49, p.415 (1970).
- (44) 辻井, 鎌田, 近藤, "多重伝送系の情報伝送速度を最大にする行列変換," 信学論(A), Vol.56-A, No.10, p.615 (昭48-10).

- (45) A.N.Kolmogorov, "On the Shannon Theory of Information Transmission in the Case of Continuous Signals," IRE Trans., Vol.IT-2, No.4, p.102 (Dec. 1956).
- (46) C.E.Shannon, "Coding Theorems for a Discrete Source with a Fidelity Criterion," IRE Nat. Conv.Rec., pt.4, p.142 (1959).
- (47) A.D.Wyner and J.Ziv, "Bounds on the Rate-distortion Function for Stationary Sources with Memory," IEEE Trans., Vol.IT-17, p.508 (Sep.1971).
- (48) T.Berger and W.C.Yu, "Rate-distortion Theory for Context-Dependent Fidelity Criteria," IEEE Trans., Vol.IT-18, p.378 (May, 1972).
- (49) S.I.Krich and T.Berger, "Coding for a Delay-Dependent Fidelity Criterion," IEEE Trans., Vol.IT-20, p.77 (Jan.1974).
- (50) H.C.Andrews, "Bibliography on Rate Distortion Theory," IEEE Trans., Vol.IT-17, p.198 (Mar.1971).
- (51) T.Berger, Rate Distortion Theory: A Mathematical Basis for Data Compression, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1971.
- (52) R.G.Gallager, Information Theory and Reliable Communication, New York; Wiley, 1968.