

# 梁理論の精密化に関する二、三の試み (その 2)

Some Attempts on the Refinement of Modern Engineering Theory of Beams (II)

—Saint-Venant の振り問題—

—Saint-Venant's Torsion Problems—

川 井 忠 彦\*・藤 谷 義 信\*

By Tadahiko Kawai and Yoshinobu Fujitani

前号において梁理論の生い立ちについて述べ、断面剛と断面内無応力の仮定にもとづく梁の変位関数について論じた。そして従来の Bernoulli-Euler に始まり、Saint-Venant を経て Vlasov によって完成された梁の工学的理論が断面剛の仮定だけから導けることを示した。その際導入された Saint-Venant の振り問題について考察し、石鹸膜類推法、薄肉梁の剪断流解析に触れ、最後に任意断面の Saint-Venant の振り問題の解析ならびに振りに関する諸断面定数の決定法について述べる。

## 1. 緒 論

一般に棒または梁のような細長い弾性体の両端に偶力を加えて振ると、両端の境界に近い部分を除けば、ほぼ振り率 (rate of twist) が一定の変形状態が実現することが知られている。(図 2.1 参照)

このような変形状態を一様振り (uniform torsion) あるいは Saint-Venant の振りと呼んでいることは周知のとおりである。この問題は 1853 年 Saint-Venant によってみごとに厳密解が求められたのを記念して、Saint-Venant の振り問題と呼ばれているわけであるが、その重要さは、解の一部が与えられた場合、その残りの部分の解を推察し、ある形においてそれを支配する微分方程式を導き、与えられた境界条件のもとで解くという、い

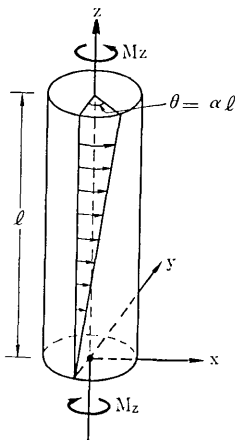


図 2.1 一様振りの状態 (Saint-Venant の振り)

わゆる半逆法 (semi-inverse method) を提案した点にあると思われる。まず次節では Saint-Venant の振りの問題についてその理論の概要を復習整理することにする。

## 2. Saint-Venant 振りの理論の概要

本節ではまず従来の Saint-Venant 振りの理論を仮想仕事の原理より定式化し、その支配方程式と境界条件を導く。次に振りの応力関数を導入し、石鹸膜類推法 (method of soap-film analogy) について論じ、中空棒の振りについて考察する。

### (1) Saint-Venant の振り問題の仮想仕事の原理による定式化

Saint-Venant の振りは図 2.1 に示すように振れ率  $\theta'$  が一定の場合の変形問題であり、 $\theta' = \alpha$  とおくと前号で述べたように変位関数は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= -\alpha y z \\ V(x, y, z) &= \alpha x z \\ W(x, y, z) &= \alpha \omega(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

この式から応力成分は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} = G \alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} = G \alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \\ \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

さて梁の両端面において働く振りモーメントを  $M_z$  とすれば、両端面の相対回転角は  $\alpha l$  ( $l$  は梁の長さ) で与えられるから、この問題に対する仮想仕事方程式

$$\delta V - \delta W_{ez} = 0$$

は容易に次式のようなになる。

$$\delta \iiint \frac{1}{2} G \alpha^2 \left\{ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dx dy dz - M_z l \delta \alpha = 0 \quad (2.3)$$

(2.3) 式の変分は  $\alpha$  と  $\omega$  についてとられるので、次式のように変形される。

$$\int_0^l G \alpha^2 dz \iint \left\{ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) \delta \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \delta \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right\} dx dy + l(GK\alpha - M_z) \delta \alpha = 0 \quad (2.4)$$

$\delta \alpha$  の任意性から、(2.4) 式より次の式が得られる。

$$M_z = GK\alpha \quad (2.5 a)$$

ここに、 $K$  は Saint-Venant の振り定数と呼ばれるも

\* 東京大学生産技術研究所 第 2 部

ので次式で与えられる.

$$K = \iint \left\{ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dx dy \quad (2.5 b)$$

そして,  $\delta \omega$  に関しては次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \int G \alpha^2 l \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial n} + x \cos(n, y) - y \cos(n, x) \right\} \delta \omega ds \\ & - \iint G \alpha^2 l \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \delta \omega dx dy = 0 \quad (2.6) \end{aligned}$$

したがって,  $\delta \omega$  の任意性から次のような  $\omega$  に関する偏微分方程式と境界条件が得られる.

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad (2.7 a)$$

境界条件は単一連結領域の場合, 境界上で

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = y \cos(n, x) - x \cos(n, y) \quad (2.7 b)$$

が成立しなければならない. ここに  $n$  は断面の境界  $s$  において立てた外向きの法線を表わし,  $(n, x), (n, y)$  は法線  $n$  と  $x, y$  軸のなす角を表わす.

さて (2.1) 式で与えられる変位関数は一価連続でなければならないから,  $\omega(x, y)$  もまた一価連続の調和関数でなければならない. したがって, この問題は領域内で調和方程式を満足し, 境界上でその法線微係数が与えられた値をとる関数を求めるポテンシャル論第二種境界値問題 (Neumann の問題と呼ばれている) の特別な場合に相当する.

そしてこの問題は応用数学の主要テーマの一つとして壮麗な理論体系ができあがっていることを付言しておく.

さて (2.2) 式で与えられる応力分布の合力は  $z=l$  の断面に作用する振りモーメントに等価であることを簡単に証明することができる. すなわち,

$$\iint \tau_{xz} dx dy = \iint \tau_{yz} dx dy = 0 \quad (2.8)$$

$$M_z = \iint (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dx dy = G K \alpha \quad (2.9 a)$$

ここに

$$K = \iint \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \omega}{\partial y} - y \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dx dy \quad (2.9 b)$$

である. また, Saint-Venant の振り問題においては回転軸の位置は任意の点にとりうることも証明される. これらの数学的な議論は標準的な弾性学の教科書に述べられているのでここでは省略するが, (2.5 b) 式と (2.9 b) 式が同じであることのみ証明しておく. そのためには次の恒等式が成立しなければならないことになる.

$$\begin{aligned} & \iint \left( y \frac{\partial \omega}{\partial x} - x \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dx dy \\ & = \iint \left\{ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2.10) \end{aligned}$$

(2.10) 式が成立することは次のようにして証明される.

$$\begin{aligned} & \iint \left( y \frac{\partial \omega}{\partial x} - x \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dx dy \\ & = \oint \omega \left( y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds} \right) ds \\ & = \oint \omega (y \cos(n, x) - x \cos(n, y)) ds \\ & = \oint \omega \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \quad (\because (2.7 b) \text{ 式より}) \quad (2.11 a) \end{aligned}$$

と変形される. ところが Green の定理から

$$\oint \omega \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = \iint \left\{ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2.11 b)$$

であるから (2.11 a) と (2.11 b) 式より (2.10) 式が証明されたことになり, (2.5 b) 式と (2.9 b) 式の  $K$  は全く同じものであることがわかる.

Saint-Venant の振り問題はまた  $\omega(x, y)$  の代りにそれと共役な調和関数を用いて解析する場合もしばしば行なわれる. すなわち  $\phi(x, y)$  は次の Cauchy-Riemann の方程式を満足する関数とする.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (2.12)$$

このような共役関数  $\phi(x, y)$  は梁の断面内で

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.13 a)$$

を満足し, 周辺上で

$$\phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C \quad (2.13 b)$$

を満足しなければならないことを証明することができる.

そして (2.13 a), (2.13 b) 式を満足する解も一義的に定まることが証明され, その解を求める問題を Dirichlet の問題と呼んでいる.

(2) 振りの応力関数と石鹼膜類推法

ここで, 次のような振りの応力関数  $\Psi$  を導入する.

$$\Psi = \phi(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (2.14)$$

そうすると

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= G \alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) = G \alpha \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \right) \\ &= G \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \tau_{yz} &= G \alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) = -G \alpha \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - x \right) \\ &= -G \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

となる. また容易に  $\Psi(x, y)$  は次の Poisson の方程式を満足することが証明できる.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -2 \quad (2.16 a)$$

また, 単一連結領域の場合は境界  $C$  で

$$\Psi = 0 \quad (2.16 b)$$

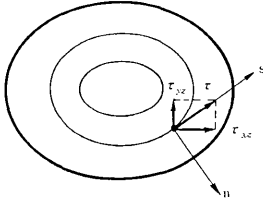


図 2.2 Saint-Venant の振り問題における剪断応力線

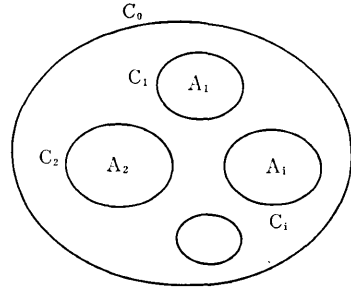


図 2.3 複連結領域

となる。

さて梁の断面内で

$$\Psi(x, y) = \text{const} \quad (2.17)$$

とおいて得られる平面曲線群を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial s} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= -\frac{1}{G\alpha} \left( \tau_{yz} \frac{dx}{ds} - \tau_{xz} \frac{dy}{ds} \right) = 0 \end{aligned}$$

または、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} \quad (2.18)$$

となる。すなわち(2.17)式で与えられる平面曲線群を考えると、その点における接線の方向は振りの剪断応力  $\tau$  の方向を示していることになるので、これらの曲線を剪断応力線 (lines of shearing stress) と呼んでいる (図 2.2 参照)。また、 $\Psi$  の法線微係数を計算すると容易に次の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial n} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \\ &= -\frac{1}{G\alpha} \{ \tau_{yz} \cos(n, x) - \tau_{xz} \cos(n, y) \} \\ &= -\frac{1}{G\alpha} \left( \tau_{yz} \frac{dy}{ds} + \tau_{xz} \frac{dx}{ds} \right) \\ &= -\frac{1}{G\alpha} \sqrt{(\tau_{xz})^2 + (\tau_{yz})^2} = -\frac{1}{G\alpha} \tau \quad (2.19) \end{aligned}$$

次に関数  $\Psi$  を使って Saint-Venant の振り定数を表わすことを考えると

$$\begin{aligned} M_z &= \iint (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dx dy \\ &= -G\alpha \iint \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} K &= -\iint \left( x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 2 \iint \Psi dx dy \quad (2.20) \end{aligned}$$

が得られる。(2.20)式を導くには Green の定理と境界条件 (2.16 b) を用いている。(2.20)式は、断面が境界線  $C$  で限られている梁の振り定数は曲面  $z = \Psi(x, y)$  と平面  $z = 0$  の間に閉じ込められた空間の体積の 2 倍に

等しいということを示しており、L. Prandtl によって始めて提唱された Saint-Venant の振り問題の石鹸膜類推法による実験的解法の根拠を与えている。その詳細については標準的な弾性学の本を参考にされたい。

### (3) 複連結領域の Saint-Venant の振り問題

これまでの議論は断面が単一連結領域の梁の振り問題についてのみ論じてきたが、複連結領域 (multiply connected region) の Saint-Venant の振り問題について考える。図 2.3 に示すように外周  $C_0$  の内部に含まれる単一連結の孔  $C_1, C_2, \dots, C_n$  がある断面の振り問題を考えると、(2.7 a) 式で与えられる微分方程式は  $C_0$  の内部で  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の外部の領域に対して成立し、かつ境界条件 (2.7 b) 式は境界線  $C_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$  の上で成立しなければならないことになる。 $\omega(x, y)$  と共役な振り関数  $\phi(x, y)$  を導入した場合は境界条件のみがつぎのように修正される。

$$\phi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + k_i \quad \text{on } C_i (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.21)$$

ここで  $k_i$  は一般に境界線  $C_i$  上で互に異なる定数値をとるが、そのうちの 하나가独立で他の定数は振り関数  $\phi(x, y)$  が与えられた領域内で一価連続となるように決定しなければならない。さらに応力関数  $\Psi(x, y)$  を用いた場合その境界条件は次のように与えられる。

$$\Psi = k_i \quad \text{on } C_i (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (2.22)$$

この場合(2.20)式で与えられる Saint-Venant の振り定数  $K$  は次式のように修正される。

$$\begin{aligned} K &= 2 \iint \Psi dx dy + \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \Psi (y dx - x dy) \\ &= 2 \left( \iint \Psi dx dy + \sum_{i=1}^n k_i A_i \right) \quad (2.23) \end{aligned}$$

ここに  $A_i$  は境界線  $C_i$  の取囲む面積を表わす。

### 3. 薄肉梁の振り理論

前節において Saint-Venant 振りの理論についてその概要を述べたが、ゆがみ関数  $\omega(x, y)$  が直接、あるいは  $\phi(x, y)$  または  $\Psi(x, y)$  を介して、解析的にせよ数値的にせよ求められれば前号 (1.46) および (1.61) 式を

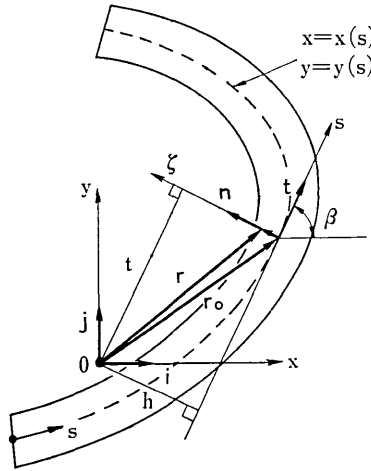


図 2.4 薄肉梁における使用座標系

用いて与えられた断面の振りに関する諸定数, すなわち, Saint-Venant の振り定数  $K$ , 曲げ振り剛性  $EI_s$ , 剪断中心  $S$  の位置などを容易に決定することができる。しかしながら, 実際の中実断面材の場合  $\omega(x, y)$  が解析的に求められるのは二, 三の特殊な断面に限られており, 解析は大部分数値解法に頼らざるを得ないのが現状である。ところが薄肉断面材の場合には板厚が薄いという仮定を利用して  $\omega(x, y)$  や  $\phi(x, y)$  に関する単純化した微分方程式を導くことができ, これらは容易に積分できるので振りに関する諸断面定数を陽に表わすことが可能となる。このような薄肉梁の理論が電子計算機の出現以前の時代, つまり 1930 年から 1950 年頃までの時代において航空機構造を中心として軽量構造 (light weight structure) の開発に大きな貢献をしてきたことは記憶に新しいところである。

本節においてはこのような薄肉梁の Saint-Venant の振り問題の解析法についてまず述べ, さらに振りに関する諸断面定数の計算公式について解説する。

(1) 薄肉断面材の Saint-Venant 振りの理論

薄肉梁の場合, まず図 2.4 に示したように肉厚中心線に沿って  $s$  座標および法線方向に  $z$  座標をとれば, 薄肉断面上の点  $(s, z)$  の位置ベクトル  $r$  は次式で表わされる。

$$r = r_0 + z n \tag{2.24}$$

ここに,  $r_0$  は肉厚中心線 ( $x = x(s), y = y(s)$ ) の位置ベクトルで

$$r_0 = x(s) i + y(s) j \tag{2.25}$$

であり, また  $n$  は法線ベクトルで次式のように表わされる。

$$n = -\sin \beta i + \cos \beta j \tag{2.26}$$

一方, 断面全体に固定された  $x-y$  座標系においては,  $r$  ベクトルは次式のように表わされる。

$$r = x i + y j \tag{2.27}$$

よって, (2.24) 式~(2.27) 式より次の関係が得られる。

$$x = x(s) - z \sin \beta, \quad y = y(s) + z \cos \beta \tag{2.28}$$

さて,  $x-y$  座標系で表わされた Saint-Venant の振り問題の変位関数 (2.1) 式は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U_0(s, z, \zeta) &= -\alpha(y(s) + z \cos \beta) \\ V_0(s, z, \zeta) &= \alpha(x(s) - z \sin \beta) \\ W_0(s, z, \zeta) &= \alpha \omega(s, \zeta) \end{aligned} \right\} \tag{2.29}$$

(2.29) 式の面内変位 ( $U_0, V_0$ ) は  $x-y$  座標系に関して表わされているので, これを局部座標系  $s-z$  に関する変位 ( $U, V$ ) に変換するには, 次の変換式を用いよう。

$$\left\{ \begin{array}{l} U \\ V \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} U_0 \\ V_0 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \left(1 - \frac{z}{R}\right) \cos \beta & \left(1 - \frac{z}{R}\right) \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} U_0 \\ V_0 \end{array} \right\} \tag{2.30}$$

ここに,  $R = R(s)$  は断面中心線の  $s$  点における曲率半径を表わし, 次の関数がある。

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{R} n, \quad \frac{1}{R} = \frac{d\beta}{ds} \tag{2.31}$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore U(s, z, \zeta) &= \left(1 - \frac{z}{R}\right) (U_0 \cos \beta + V_0 \sin \beta) \\ &= \alpha \left(1 - \frac{z}{R}\right) (h(s) - z) \\ V(s, z, \zeta) &= -U_0 \sin \beta + V_0 \cos \beta \\ &= \alpha t(s) z \\ W(s, z, \zeta) &= \alpha \omega(s, \zeta) \end{aligned} \right\} \tag{2.32}$$

ここに (図 2.4 参照)

$$\left. \begin{aligned} h(s) &= x(s) \sin \beta - y(s) \cos \beta \\ t(s) &= x(s) \cos \beta + y(s) \sin \beta \end{aligned} \right\} \tag{2.33}$$

したがって,  $s-z$  座標系における剪断応力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= G \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial s} \right) \\ &= G \alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial s} + \left(1 - \frac{z}{R}\right) (h(s) - z) \right) \\ \tau_{z\zeta} &= G \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right) = G \alpha \left( \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} + t(s) \right) \end{aligned} \right\} \tag{2.34}$$

よって, (2.15) 式と同様にしてゆがみ関数  $\omega(s, \zeta)$  と応力関数  $\Psi(s, \zeta)$  の間には次の関係が存在する。

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = \frac{\partial \omega}{\partial s} + \left(1 - \frac{z}{R}\right) (h(s) - z) \tag{2.35 a}$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} + t(s) \tag{2.35 b}$$

さて (2.35 a) 式を  $\zeta$  で, (2.35 b) 式を  $s$  で微分して辺々相減すれば  $\Psi(s, \zeta)$  に関する Poisson の方程式が

次のように求められる。ここで  $\frac{\partial t}{\partial s} = 1 - \frac{h}{R}$  の関係を用いた。

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} + 2 \left( 1 - \frac{\zeta}{R} \right) = 0 \quad (2.36)$$

薄肉梁の場合、 $\frac{\zeta}{R}$  は 1 に比して無視できると考えられるから

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} = -2 \quad (2.37)$$

が得られる。

(2) 薄肉開断面材の Saint-Venant 振りの理論

さて今考えている断面が薄肉開断面の場合には断面は単一連結領域となるから、境界条件は次式で与えられる。

$$\Psi = 0 \quad \text{on } C \quad (2.38)$$

さて Prandtl の石鹼膜類推より、細長い膜の撓み変形においては

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} \doteq 0$$

とおくことができるから、(2.37)式は

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} = -2 \quad (2.39)$$

となり、(2.38)式の境界条件を満足する解は次式で与えられる。

$$\Psi(s, \zeta) = \left( \frac{\delta(s)}{2} \right)^2 - \zeta^2 \quad (2.40)$$

ここに  $\delta(s)$  は薄肉梁の肉厚を表わしている。

したがって (2.20) 式より、薄肉開断面材の Saint-Venant の振り定数  $K$  は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} K &= 2 \int_0^b ds \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left\{ \left( \frac{\delta(s)}{2} \right)^2 - \zeta^2 \right\} d\zeta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^b (\delta(s))^3 ds \end{aligned} \quad (2.41)$$

ここに  $b$  は薄肉開断面肉厚中心線  $s$  の終端を表わす。この公式は材料力学でよく知られている公式である。したがって今断面が図 2.5 で与えられる  $n$  辺多角形断面で与えられる場合には  $i$  番目の辺の長さ  $l_i$  と肉厚  $\delta_i$  とすれば、Saint-Venant の振り定数  $K$  は次式で

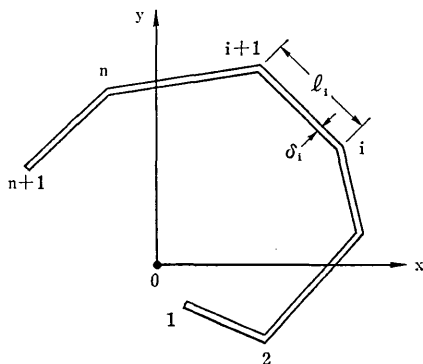


図 2.5 薄肉多角形開断面

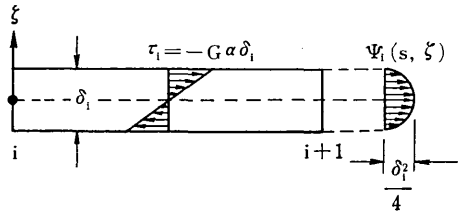


図 2.6  $i$  辺の応力分布

与えられる。

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} l_i \delta_i^3 \quad (2.42)$$

また  $i$  番目の辺のへりに沿って働く剪断応力  $\tau_i$  は図 2.6 を参考にして次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_i &= \frac{\delta_i^2}{4} - \zeta^2 \\ \therefore \tau_i &= G \alpha \frac{\partial \Psi_i}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta = \pm \delta_i/2} = \mp G \alpha \delta_i \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

ところが (2.5 a) 式より

$$\tau_i = \mp \frac{M_z \delta_i}{K} \quad (2.44)$$

となる。

また (2.40) 式を (2.35 a, b) 式に代入すれば容易に次のような式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial s} &= - \left( 1 - \frac{\zeta}{R} \right) (h(s) + \zeta), \\ \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} &= - \left( t(s) - \frac{\delta}{2} \frac{d\delta}{ds} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

この式を積分してゆがみ関数  $\omega(s, \zeta)$  は次のように表わされる。

$$\omega(s, \zeta) = - \int_0^s h(s) ds - t(s) \zeta + \omega_0 \quad (2.46)$$

ただし、 $\omega_0$  は座標原点のゆがみ量を表わしている。また (2.46) 式の誘導にあたって  $\zeta$  と  $\delta$  の高次の項は薄肉の仮定から無視することにした。この (2.46) 式は薄肉梁の曲げ振り理論の基礎となる公式で、すでに多くの人々によって提案され、V. Z. Vlasov が扇形面積の法則 (law of sectoral area) と呼んでいるものに外ならない。さてゆがみ関数  $\omega(s, \zeta)$  が (2.46) 式で与えられると、振りに関する諸断面定数は前号で述べた一般論に従って容易に求めることができる。

まず  $S_w$  を求める。定義により

$$\left. \begin{aligned} S_w &= \int_0^b \omega(s, \zeta) \delta(s) ds = -\bar{S}_w + \omega_0 A \\ \text{ここに} \\ \bar{S}_w &= \int_0^b \bar{\omega}(s) \delta(s) ds, \quad \bar{\omega}(s) = \int_0^s h(s) ds \\ A &= \int_0^b \delta(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

となる。よって、正規化されたゆがみ関数  $\omega_n(s, \zeta)$  は次

式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_n(s, \zeta) &= -\bar{\omega}(s) - t(s)\zeta + \frac{\bar{S}_\omega}{A} \\ &= -\bar{\omega}_n(s) - t(s)\zeta \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

ここに

$$\bar{\omega}_n(s) = \bar{\omega}(s) - \frac{\bar{S}_\omega}{A}$$

(2.48) 式を用いて  $I_\omega, I_{\omega x}, I_{\omega y}$  を計算すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} I_\omega &= \iint (\omega_n(s, \zeta))^2 ds d\zeta = \int_0^b (\bar{\omega}_n(s))^2 \delta(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{12} \int_0^b (t(s))^2 (\delta(s))^3 ds \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} I_{\omega x} &= \iint x \omega_n(s, \zeta) ds d\zeta \\ &= - \int_0^b x \bar{\omega}_n(s) \delta(s) ds \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} I_{\omega y} &= \iint y \omega_n(s, \zeta) ds d\zeta \\ &= - \int_0^b y \bar{\omega}_n(s) \delta(s) ds \end{aligned} \quad (2.51)$$

したがって剪断中心  $S(x_s, y_s)$  の座標は前号(1.61)式により次のように決定される。

$$x_s = -\frac{I_{\omega y}}{I_{yy}}, \quad y_s = \frac{I_{\omega x}}{I_{xx}} \quad (2.52 a)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \int_0^b (x(s))^2 \delta(s) ds \\ I_{yy} &= \int_0^b (y(s))^2 \delta(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (2.52 b)$$

である。さて以上にあげた (2.47) より (2.52) 式までの諸公式を用いて薄肉開断面材の諸断面定数が計算できるわけであるが、その計算を行うにあたって二、三の注意すべき点をあげるならば以下のとおりである。

(i) 通常図心を扇形面積計算の極に選ぶ、また薄肉断面上の任意の点を  $s$  の原点にとって計算しても差し支えないが、ゆがみゼロの位置があらかじめわかっている場合は、その点を  $s$  の原点に選んだ方が計算が簡単になる。なんとすれば求められるゆがみ分布はすでに正規化されて求まるからである。

(ii) 剪断中心を扇形の極に選び、扇形面積計算をして求めた正規化されたゆがみ分布  $\omega_n$  は純捩りに対する真のゆがみ分布を与え、これより  $I_\omega$  が直接計算される。

(iii) 扇形面積の正負については、扇形の極に関して時計まわりの方向に作られるものを正とする。

また、薄肉断面のゆがみ関数の特性について注意すべき点を列挙すれば次のとおりである。

(1) 対称軸をもつ断面では、その軸上でゆがみは生

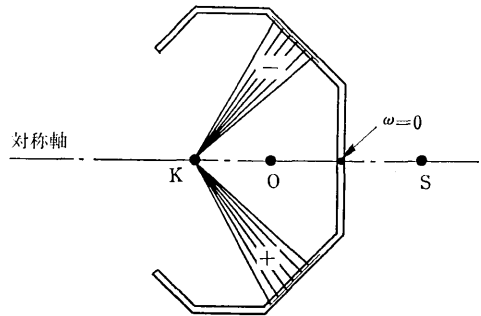


図 2.7 対称軸をもつ断面

じない。薄肉断面の場合、この特性は次のようにして説明される (図 2.7 参照)。まず扇形の極とすべき剪断中心または図心は必ずこの対称軸上にある。そしてこの対称軸上の点を極とし、肉厚中心線と対称軸との交点を  $s$  の原点としこの点のゆがみをゼロとして扇形面積を計算すれば、前記 (iii) により必ず正規化されたゆがみ分布が得られる。そして極を固定した場合の正規化されたゆがみ分布の解は唯一つしかないことを考えれば、対称軸上の点ではゆがみゼロであることが結論される。この特性は薄肉断面に限らず成立する。

(2) 薄肉断面内直線辺のゆがみは線形に変化する。なぜならば、直線辺上の扇形面積 (この場合三角形面積) の増分は  $h ds$  ( $h = \text{const}$ ) で与えられるからである (図 2.8 参照)

(3) 一点に集まる線分のみからなる薄肉断面では、その扇形面積を計算して得られるゆがみ分布は平面を保持し、 $\omega_n$  分布はゼロとなる。なぜならば線分  $i$  の扇形面積 (この場合三角形面積) の増分  $dS$  は、

$$dS = h_i ds = \overline{OK} dy \quad (2.53)$$

となり (図 2.9 参照)、すべての線分上のゆがみの増分は  $\overline{OK}$  への垂直距離 (正負を考える) の増分に比例することになり、断面全体のゆがみ分布は平面を保持することになるからである。また扇形の極を線分の集まる点に選べば、すべての線分上のゆがみゼロという解が得られ、解の唯一性よりこのゆがみ

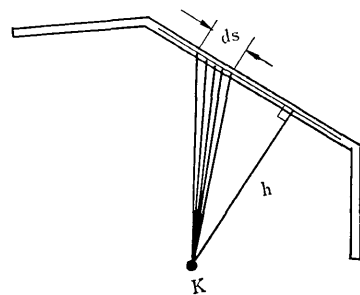


図 2.8 直線辺

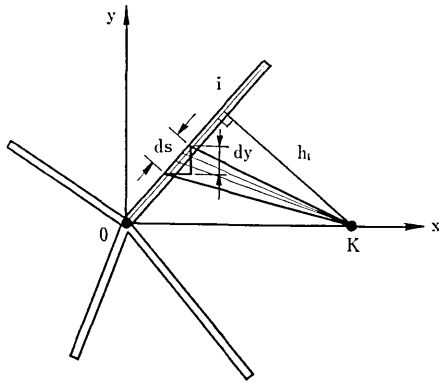


図 2.9 一点に集る直線辺

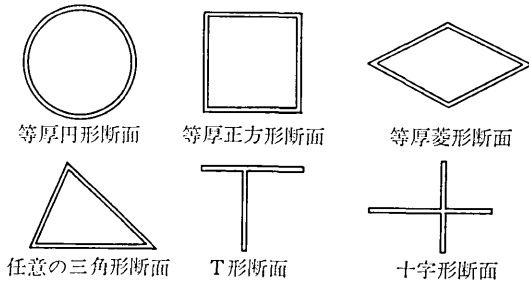


図 2.10 ゆがみの生じない薄肉断面の例

分布は真の解  $\omega_s$  分布を与える。そして、このときの極である集合点は剪断中心となる。

(4) 以上の特性を考慮すると、図 2.10 に示すような断面は振りを受けてもゆがみを生じないことがわかるであろう。これらの断面では  $I_{\omega}^{(1)} = 0$  であり、したがって単一材の場合には一様振りの状態が実現する。

(3) 薄肉閉断面材の Saint-Venant 振りの理論

薄肉閉断面材の場合 (2.37) で与えられる Poisson の方程式を次の境界条件のもとで解く問題に帰着する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{外周上で } \Psi = 0 \\ \text{内周上で } \Psi = k \end{array} \right\} \quad (2.54)$$

この方程式の解は図 2.11 および (2.40) 式を参考にして、

$$\Psi = \left( \frac{\delta(s)}{2} \right)^2 - \zeta^2 + k \left( \frac{\zeta}{\delta(s)} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.55)$$

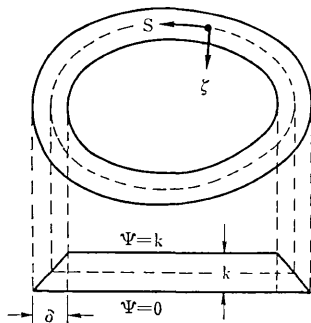


図 2.11 薄肉閉断面の振り問題の薄膜類推

とおくことができる。ここに  $\frac{\partial \Psi}{\partial s} \doteq 0$  の近似を用いていることは前に述べたとおりである。

さて石鹸膜類推から断面に加わる振りモーメントは次式で与えられる。

$$M_z = 2G\alpha \left( \iint \Psi ds d\zeta + 2kA \right) \quad (2.56)$$

A は内部境界 C の囲む面積を表わしている。

この式に (2.55) 式を代入して積分を実行すれば次のようになる。

$$M_z = 2G\alpha \left( \oint \frac{1}{6} (\delta(s))^3 ds + \frac{k}{2} \oint \delta(s) ds + 2kA \right) \quad (2.57)$$

さて (2.57) 式右辺の最初の二つの線積分項は最後の項に比較して小さいので、普通は無視している。したがって、

$$M_z = 2kG\alpha A \quad (2.58)$$

を得る。ところが石鹸膜類推から、

$$\tau = G\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = G\alpha \left( -2\zeta + \frac{k}{\delta} \right) \doteq G\alpha \left( \frac{k}{\delta} \right) \quad (2.59)$$

となり、(2.59) 式を (2.58) 式に代入すれば

$$M_z = 2\tau\delta A \quad (2.60)$$

が得られる。さてゆがみ  $\omega$  は孔のまわりを一周させるともとの値にもどるはずであるから、

$$\begin{aligned} \oint \omega &= \oint \frac{\partial \omega}{\partial s} ds = \oint \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds \\ &= \oint \left\{ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + y \right) \frac{\partial x}{\partial s} - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} + x \right) \frac{\partial y}{\partial s} \right\} ds \\ &= \oint \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} ds + \oint (y dx - x dy) = 0 \\ \therefore \oint \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} ds &= 2A \end{aligned} \quad (2.61)$$

が得られる。

したがって、(2.59) および (2.61) 式を用いて、

$$\oint \tau ds = 2G\alpha A \quad (2.62)$$

が得られる。この式にさらに (2.60) 式の  $\tau$  を代入し、K の定義より、

$$\frac{M_z}{2A} \oint \frac{ds}{\delta} = 2G\alpha A = 2A \left( \frac{M_z}{K} \right)$$

となる。

$$\therefore K = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} \quad (2.63)$$

$$\alpha = \frac{M_z}{4GA^2} \oint \frac{ds}{\delta} \quad (2.64)$$

が得られる。これらの関係式は Bredt-Batho の公式と呼ばれている。さて (2.35 a, b) および (2.55) 式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial s} &= -\left(1 - \frac{\zeta}{R}\right) (h(s) - \zeta) + \left(-2\zeta + \frac{k}{\delta(s)}\right) \\ \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} &= \left(\delta(s) - k \frac{\zeta}{\delta(s)^2}\right) \frac{\partial \delta(s)}{\partial s} - t(s) \doteq -t(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

が得られるから、ゆがみ関数  $\omega(s, \zeta)$  は次式で与えられることになる。

$$\omega(s, \zeta) = k \int_0^s \frac{ds}{\delta} - \int_0^s h(s) ds - t(s)\zeta + \omega_0 \quad (2.66)$$

しかるに、(2.58), (2.63) 式より

$$k = \frac{M_z}{2G\alpha A} = \frac{K}{2A} = \frac{2A}{\int \frac{ds}{\delta}} \quad (2.67)$$

であるから

$$\omega(s, \zeta) = \frac{2A}{\int \frac{ds}{\delta}} \int_0^s \frac{ds}{\delta} - \int_0^s h(s) ds - t(s)\zeta + \omega_0 \quad (2.68)$$

が得られる。(2.68) 式は単一連結閉断面薄肉梁の振りに対するゆがみ関数を与える。このようにしてゆがみ関数  $\omega(s, \zeta)$  が求まれば、次にその正規化を行い、(2.47) 式～(2.52) 式を用いて振りに関する諸断面定数を決定するための公式が以下のように求められる。

(i) 正規化されたゆがみ関数  $\omega_n$

$$\omega_n(s, \zeta) = \gamma(s) - \bar{\omega}(s) - t(s)\zeta - \frac{\bar{S}_\omega}{A} \quad (2.69 a)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \gamma(s) &= \frac{2A}{\int \frac{ds}{\delta}} \int_0^s \frac{ds}{\delta}, \quad \bar{\omega}(s) = \int_0^s h(s) ds \\ \bar{S}_\omega &= \int \gamma(s) \delta(s) ds - \int \bar{\omega}(s) \delta(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (2.96 b)$$

(ii)  $I_\omega$

$$\begin{aligned} I_\omega &= \iint (\omega_n(s, \zeta))^2 ds d\zeta \\ &= \int (\gamma(s))^2 \delta(s) ds + \int (\bar{\omega}(s))^2 \delta(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{12} \int (t(s))^2 (\delta(s))^3 ds + \left(\frac{\bar{S}_\omega}{A}\right)^2 \int \delta(s) ds \\ &\quad - 2 \int \gamma(s) \bar{\omega}(s) \delta(s) ds - \frac{2\bar{S}_\omega^2}{A} \end{aligned} \quad (2.70)$$

(iii)  $I_{\omega x}$

$$\begin{aligned} I_{\omega x} &= \iint x(s) \omega_n(s, \zeta) ds d\zeta \\ &= \int x(s) \gamma(s) \delta(s) ds - \int x(s) \bar{\omega}(s) \delta(s) ds \end{aligned} \quad (2.71)$$

(iv)  $I_{\omega y}$

$$I_{\omega y} = \iint y(s) \omega_n(s, \zeta) ds d\zeta$$

$$= \int y(s) \gamma(s) \delta(s) ds - \int y(s) \bar{\omega}(s) \delta(s) ds \quad (2.72)$$

(v) 剪断中心の座標  $(x_s, y_s)$

$$x_s = -\frac{I_{\omega y}}{I_{yy}}, \quad y_s = \frac{I_{\omega x}}{I_{xx}} \quad (2.73 a)$$

により求められることは前述したとおりである。ここに

$$I_{xx} = \int (x(s))^2 \delta(s) ds, \quad I_{yy} = \int (y(s))^2 \delta(s) ds \quad (2.73 b)$$

また剪断中心まわりの曲げ振り剛性  $I_{\omega^{(v)}}$  は前号 (1.62 b) 式より容易に計算される。

#### 4. 梁の曲げ振り応力分布

さて梁が分布または集中振りモーメントを受けて純振り変形を生ずる場合、その変形を支配する方程式は前号 (1.62 a) 式より

$$EI_{\omega^{(v)}} \theta'''' - GK \theta'' = m_z \quad (2.74)$$

で与えられる。また断面内の振りモーメントを  $M_z$  とすれば次のような関係式が成立する。

$$M_z = M_z^{**} + M_z^* \quad (2.75 a)$$

$$M_z^{**} = GK \theta' \quad (2.75 b)$$

$$M_z^* = -EI_{\omega^{(v)}} \theta''' \quad (2.75 c)$$

さて梁の曲げ振りによって生ずる軸応力を  $\sigma_\omega$  とすれば前号 (1.42), (1.43) 式より容易に次の関係式が得られる。

$$\sigma_\omega = E \theta''(z) \omega_n(x, y) \quad (2.76)$$

今新たに次式で与えられる断面力を定義する。

$$M_{\omega^{(v)}} = \iint \sigma_\omega \omega_n dx dy = EI_{\omega^{(v)}} \theta'' \quad (2.77)$$

この  $M_{\omega^{(v)}}$  を Vlasov は Bimoment と名づけている。(2.75 c), (2.76), (2.77) 式の間には次の関係式が成立つことは容易に理解できる。

$$\sigma_\omega = \frac{M_{\omega^{(v)}} \omega_n}{I_{\omega^{(v)}}} \quad (2.78)$$

$$M_z^* = -\frac{dM_{\omega^{(v)}}}{dz} \quad (2.79)$$

さて曲げ振り応力  $\sigma_\omega$  は正規化されたゆがみ分布  $\omega_n$  と同じ強さの分布を示すことになるので、断面内にはこれとつりあうための剪断応力  $(\tau_{xz}^*, \tau_{yz}^*)$  が一般に分布することになる。すなわち 3 次元弾性論の  $z$  軸方向のつりあい方程式のみを書き出すと次のようになる。

$$\frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} = 0 \quad (2.80)$$

ここで物体力の  $z$  成分の存在は無視している。このつりあい方程式と梁の両端および側面上での境界条件を満足する剪断応力分布を求める問題の議論は次号以下に述べることにし、ここでは話を薄肉断面材の場合に限って論ずることにしよう。薄肉断面材の場合、その板厚方向の剪断応力は小さいとして無視することができ、剪断応



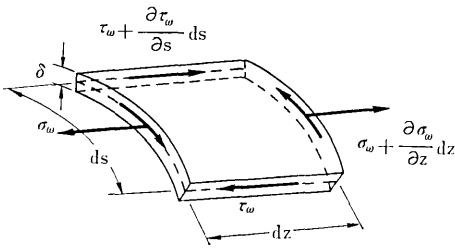


図 2.12 薄肉梁内部の曲げ振り応力  $\sigma_\omega$  と剪断応力  $\tau_\omega$  の関係

力としては板厚中心線の接線方向に沿って働く成分  $\tau_\omega$  の分布を求めればよいことになる。(図 2.12 参照)

図 2.12 を参考にしてその微小要素のつりあい方程式を立てて積分すると次のような式が得られる。

$$\tau_\omega \delta = - \int_0^s \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial z} \delta ds + \tau_\omega(0) \delta(0) \quad (2.81)$$

この式に (2.76) 式を代入すれば

$$\tau_\omega \delta = - E S_\omega(s) \theta'''' + \tau_\omega(0) \delta(0) \quad (2.82)$$

ここに

$$S_\omega(s) = \int_0^s \omega_{n1} \delta(s) ds \quad (2.83)$$

が得られる。したがってこの曲げ振り剪断応力  $\tau_\omega$  が作る振りモーメントは  $M_z^0$  に等しくなるはずである。すなわち、薄肉開断面の場合は容易に

$$\begin{aligned} \int_0^b \tau_\omega \delta h^{(s)} ds &= - E \theta'''' \int_0^b S_\omega \left( - \frac{\partial \omega_{n1}}{\partial s} \right) ds \\ &= - E \theta'''' \int_0^b \omega_{n1}^2 \delta ds \\ &= - E I_\omega^{(s)} \theta'''' = M_z^0 \end{aligned}$$

となることが確認される。そして、(2.75c) 式と (2.82) 式を組合せて次の式が得られる。

$$\tau_\omega = \frac{M_z^0 S_\omega(s)}{I_\omega^{(s)} \delta(s)} + \tau_\omega(0) \left( \frac{\delta(0)}{\delta(s)} \right) \quad (2.84)$$

(2.84) 式は開断面材でも閉断面材でも成り立つ公式であるが、閉断面の場合は少し複雑になる。まず開断面材の場合には  $\tau_\omega(0)$  はゼロとおいても一般性を失わない。なぜならば、(2.81) 式の積分の下限を断面の一端にとればそこでは  $\tau_\omega(0) = 0$  となるからである。

ところが閉断面の場合には端点が存在しないから  $\tau_\omega(0)$  の値は断面が閉じているという条件から求めなければならない。つまり  $\tau_\omega(s)$  は原点においてスリットの入った静定断面の剪断応力とスリット端面に存在する不静定剪断応力  $\tau_\omega(0)$  の和で与えられることになる。 $\tau_\omega(0)$  を決める条件式は

$$\oint \gamma_\omega ds = \frac{1}{G} \oint \tau_\omega ds = 0 \quad (2.85)$$

で与えられる。ここに  $\gamma_\omega$  は曲げ振りによる剪断ひずみである。この式に (2.84) 式を代入すれば、

$$\tau_\omega(0) \delta(0) = - \frac{M_z^0}{I_\omega^{(s)}} \oint \frac{S_\omega(s)}{\delta(s)} ds \quad (2.86)$$

が得られる。この式を (2.84) 式に代入して結局次のような公式が得られる。

$$\tau_\omega = \frac{M_z^0}{\delta(s) I_\omega^{(s)}} \left[ S_\omega(s) - \frac{\oint \frac{S_\omega(s)}{\delta(s)} ds}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}} \right] \quad (2.87)$$

すなわち薄肉材の曲げ振り応力  $\sigma_\omega$  は (2.78) 式を用いて計算することができるが、 $M_\omega^{(s)}$  は応力の大きさを表わし  $\omega_{n1}$  は断面内の分布を表わしている。したがって  $\omega_{n1}$  の分布がわかっているれば、梁の曲げ振り解析を行って  $M_\omega^{(s)}$  を決定しさえすれば  $\sigma_\omega$  の分布は定まることになる。そして開断面の場合には (2.48) 式、単一連結閉断面の場合には (2.69 a, b) 式を用いて  $\omega_{n1}$  を求めることができ、さらに前号 (1.63) 式を用いて  $\omega_{n1}$  を求めることができる。これに対して曲げ振りの剪断応力  $\tau_\omega$  は開断面の場合には次式

$$\tau_\omega = \frac{M_z^0 S_\omega(s)}{I_\omega^{(s)} \delta(s)} \quad (2.88)$$

により、閉断面の場合には (2.87) 式により計算することができる。この場合も (2.88) 式中の  $S_\omega(s)$  または (2.87) 式の [ ] 内の関数が求められれば、梁の曲げ振り解析を行って  $M_z^0$  を決定するだけで  $\tau_\omega$  の分布が完全に決定されることになる。これらの関数の決定にはもちろん  $\omega_{n1}$  分布が必要であることはいうまでもないであろう。

さて任意断面の一樣直線梁 (長さ  $l$ ) がその剪断中心線に沿う分布振りモーメント  $m_z$  によって振られる場合、その平衡方程式は次式で与えられる。

$$E I_\omega^{(s)} \theta'''' - G K \theta'' = m_z \quad (2.89)$$

この方程式の一般解は  $T(z)$  をその特解として次のように与えられる。

$$\theta(z) = A + Bz + C \cosh \lambda z + D \sinh \lambda z + T(z) \quad (0 \leq z \leq l) \quad (2.90)$$

ここに

$$\lambda^2 = \frac{GK}{E I_\omega^{(s)}}$$

である。

この式は次のように無次元化しておくとう便利である。

$$\theta(\xi) = A + B\xi + C \cosh k\xi + D \sinh k\xi + T(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (2.91)$$

ここに

$$k^2 = \lambda^2 l^2 = \frac{GK l^2}{E I_\omega^{(s)}}, \quad \xi = \frac{z}{l}$$

(2.90), (2.91) 式で双曲線関数で表わされる部分が曲げ振りによる項であり、一次式の部分は Saint-Venant の

振り (一様振り) の項を示している。そして  $k \rightarrow 0$  と  
なれば  $EI_{\omega}^{(s)} \gg GK$  か  $l \ll 0$  であり, (2.89) 式の左辺  
第二項は無視できる。つまり数学的には梁の横撓みの式  
と一致する。これに対して  $k \rightarrow \infty$  となれば  $GK \gg EI_{\omega}^{(s)}$   
か  $l \gg 0$  を意味し, この場合は曲げ振りの項が無視され  
て, Saint-Venant の振り状態になる。一般に中実断面  
梁または薄肉閉断面梁の場合には曲げ振り剛性  $EI_{\omega}^{(s)}$   
は Saint-Venant の振り剛性  $GK$  に比較して無視でき  
る場合が多く, また薄肉開断面梁の場合でも梁の長さ  $l$   
が長くなると梁の両端を除いて大部分が一様振りの状態  
に近くなる。この点については生産研究第 16 巻第 1 号  
において論じたのでこれ以上述べないことにする。ここ  
では (2.89) 式の直交関数系を用いた解について少し述  
べておきたい。今 (2.89) 式の解が次のような梁のたわ  
み振動の固有関数系を用いて表わされたとしてよう。

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(z) \quad (2.92)$$

ここに  $\varphi_n(z)$  は次の方程式と与えられた境界条件を満足  
する固有関数である。

$$\varphi_n''''(z) = \left(\frac{\gamma_n}{l}\right)^4 \varphi_n(z) \quad (2.93)$$

ここに  $\gamma_n$  は第  $n$  番目の固有値を表わしている。

(2.92) 式を (2.89) 式に代入し, その両辺に  $\varphi_n(z)$  を  
掛けて  $z$  につき 0 から  $l$  まで積分すれば次のような未定  
係数  $C_n$  に関する方程式が得られる。

$$EI_{\omega}^{(s)} \left(\frac{\gamma_n}{l}\right)^4 C_n - GK \sum_{m=1}^{\infty} C_m A_{mn} = T_n \quad (2.94 a)$$

ここに,

$$A_{mn} = \int_0^l \varphi_m''(z) \varphi_n(z) dz \quad (2.94 b)$$

$$T_n = \int_0^l m_z^{(s)}(z) \varphi_n(z) dz \quad (2.94 c)$$

である。したがって (2.94 a) 式を解いて  $C_n$  を決定す  
れば (2.92) 式より梁の振り変形状態が決定されること  
になる。

今一例として両端単純支持の梁が分布振りモーメント

$$m_z = m_0 \varphi_n(z) \quad (2.95 a)$$

ここに

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi z}{l} \quad (2.95 b)$$

を受ける場合を考察すると

$$\left. \begin{aligned} \gamma_n &= n\pi, \quad A_{mn} = -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \delta_{mn} \\ T_m &= m_0 \delta_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

となるから  $C_m = 0$  ( $m \neq n$ )

$$\left. \begin{aligned} EI_{\omega}^{(s)} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \left\{ 1 + \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \frac{GK}{EI_{\omega}^{(s)}} \right\} C_n &= m_0 \\ \therefore C_n &= \frac{m_0}{EI_{\omega}^{(s)} (n\pi/l)^4} \cdot \frac{1}{1 + (k/n\pi)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

$$\therefore \theta(z) = \frac{m_0 \left\{ 1 + \left(\frac{k}{n\pi}\right)^2 \right\}}{EI_{\omega}^{(s)} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4} \varphi_n(z) \quad (2.98)$$

となる。

したがってこの例で曲げ振り応力  $\sigma_{\omega}$  と曲げ振り剪断  
応力  $\tau_{\omega}$  を比較すると次式が得られる。

$$\left| \frac{\tau_{\omega}}{\sigma_{\omega}} \right| = \left| \frac{M_z^{(s)} S_{\omega} \cdot I_{\omega}^{(s)}}{\delta I_{\omega}^{(s)} \cdot M_{\omega} \omega_{ns}} \right| = \left| \frac{S_{\omega} \cdot \varphi_n'''}{\delta \omega_{ns} \cdot \varphi_n''} \right|$$

すなわち

$$\left| \frac{\tau_{\omega}}{\sigma_{\omega}} \right| = \frac{S_{\omega}}{\delta \omega_{ns}} \left( \frac{n\pi}{l} \right)$$

となる。ところで I 形断面の場合には次のような式が得  
られる (図 2.15 参照)。

$$|S_{\omega}^{(\max)}| = \frac{b^2 d \delta}{16}, \quad |\omega_{ns}^{(\max)}| = \frac{bd}{4}$$

したがって,

$$\left| \frac{\tau_{\omega}^{(\max)}}{\sigma_{\omega}^{(\max)}} \right| = \frac{n\pi}{4} \left( \frac{b}{l} \right) \quad (2.99)$$

一般の場合  $b/l$  は小さいと考えられるので

$$\tau_{\omega}^{(\max)} < \sigma_{\omega}^{(\max)}$$

となる。すなわち両端単純支持梁が (2.95 a) 式で与えら  
るような分布振りモーメントを受ける場合, その曲げ振  
り剪断応力  $\tau_{\omega}$  の分布は無視できるであろうという結論  
が得られたことになる。

## 5. 二, 三の解析例

以上に述べた手法を用いて解析した二, 三の Saint-  
Venant の振り問題を中実断面, 薄肉開断面, 薄肉閉断  
面の順に紹介する。

### (i) 中実断面材の振り

中実断面材の場合その振り問題の解を解析的に求める  
ことは一般にきわめて難しいが, 二, 三の断面について解  
析解が陽な形で求まっている。その例を以下に示そう。

#### (a) 楕円断面

楕円断面の境界線の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

とすれば (2.16 a, b) 式の解は次式で与えられることは容  
易にチェックすることができる。

$$\Psi = -\frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} \left( \frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2} - 1 \right) \quad (2.100)$$

この式から (2.7 a, b) 式の解であるゆがみ関数  $\omega(x, y)$   
は次の形で求めることができる。

$$\omega(x, y) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy \quad (2.101)$$

したがって断面のゆがみの等高線は図 2.13 に示すように  
直角双曲線になる。 $\omega(x, y)$  は正規化しても変わらず, こ  
れは同時に  $\sigma_{\omega}$  の分布状態も表わしている。 (2.101)

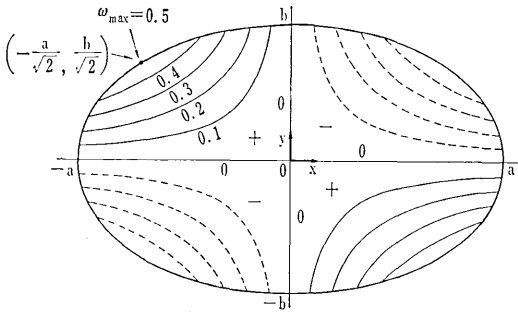


図 2.13 中実楕円断面の  $\omega$  分布  
 $(\times \frac{ab(a^2-b^2)}{a^2+b^2})$

式を用いて前号 (1.46) 式から振りの諸断面定数を求めれば次式ようになる。

$$I_{\omega x} = I_{\omega y} = 0$$

したがって図心  $O$  と剪断中心  $S$  は一致し

$$I_{\omega} = I_{\omega^{(s)}} = \frac{\pi}{24} \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)} a^3 b^3, \quad K = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2} \quad (2.102 a)$$

となる。そして他の断面定数も計算すれば

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \frac{\pi}{4} a^3 b, & I_{yy} &= \frac{\pi}{4} a b^3 \\ A &= \pi a b \end{aligned} \right\} \quad (2.102 b)$$

となる。中実断面の場合ゆがみの剪断応力 ( $\tau_{xz}^{\omega}, \tau_{yz}^{\omega}$ ) を決定することは簡単でない。この問題は次号以下で考察することにする。

(b) 正三角形断面

図 2.14 に示したような正三角形断面の場合には楕円の場合と同じように三つの境界線の方程式の積に  $-\frac{1}{2a}$  を掛けた式を作ればそれは  $\Psi$  であることが容易にわかる。すなわち

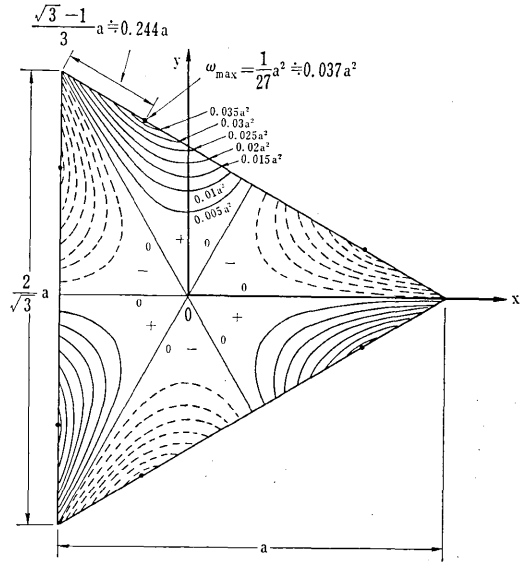


図 2.14 中実正三角形断面の  $\omega$  分布

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{2a} \left( x - \sqrt{3} y - \frac{2a}{3} \right) \times \left( x + \sqrt{3} y - \frac{2a}{3} \right) \left( x + \frac{a}{3} \right) \quad (2.103)$$

またこの式から  $\omega_n(x, y)$  は次式のように決定される。

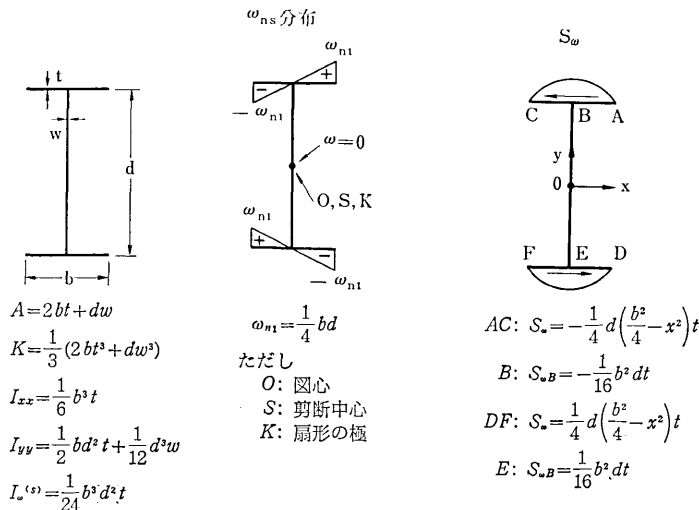
$$\omega_n(x, y) = \frac{1}{2a} (y^3 - 3x^2 y) \quad (2.104)$$

この場合も

$$I_{\omega x} = I_{\omega y} = 0$$

となり、図心  $O$  と剪断中心  $S$  は一致する。諸断面定数を計算すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{a^2}{\sqrt{3}}, & I_{xx} &= I_{yy} = \frac{a^4}{18\sqrt{3}} \\ K &= \frac{a^4}{15\sqrt{3}}, & I_{\omega} &= I_{\omega^{(s)}} = \frac{a^6}{5670\sqrt{3}} \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$



$$\begin{aligned} A &= 2bt + dw \\ K &= \frac{1}{3} (2bt^3 + dw^3) \\ I_{xx} &= \frac{1}{6} b^3 t \\ I_{yy} &= \frac{1}{2} bd^2 t + \frac{1}{12} d^3 w \\ I_{\omega^{(s)}} &= \frac{1}{24} b^3 d^2 t \end{aligned}$$

$\omega_{ns}$  分布  
 $\omega_{n1}$   
 $\omega=0$   
 $O, S, K$   
 $\omega_{n1}$   
 $\omega_{n1}$   
 $\omega_{n1}$   
 $\omega_{n1} = \frac{1}{4} bd$   
 ただし  
 $O$ : 図心  
 $S$ : 剪断中心  
 $K$ : 扇形の極

$$\begin{aligned} S_{\omega} \\ AC: S_{\omega} &= -\frac{1}{4} d \left( \frac{b^2}{4} - x^2 \right) t \\ B: S_{\omega B} &= -\frac{1}{16} b^2 dt \\ DF: S_{\omega} &= \frac{1}{4} d \left( \frac{b^2}{4} - x^2 \right) t \\ E: S_{\omega B} &= \frac{1}{16} b^2 dt \end{aligned}$$

図 2.15 薄肉 I 形断面

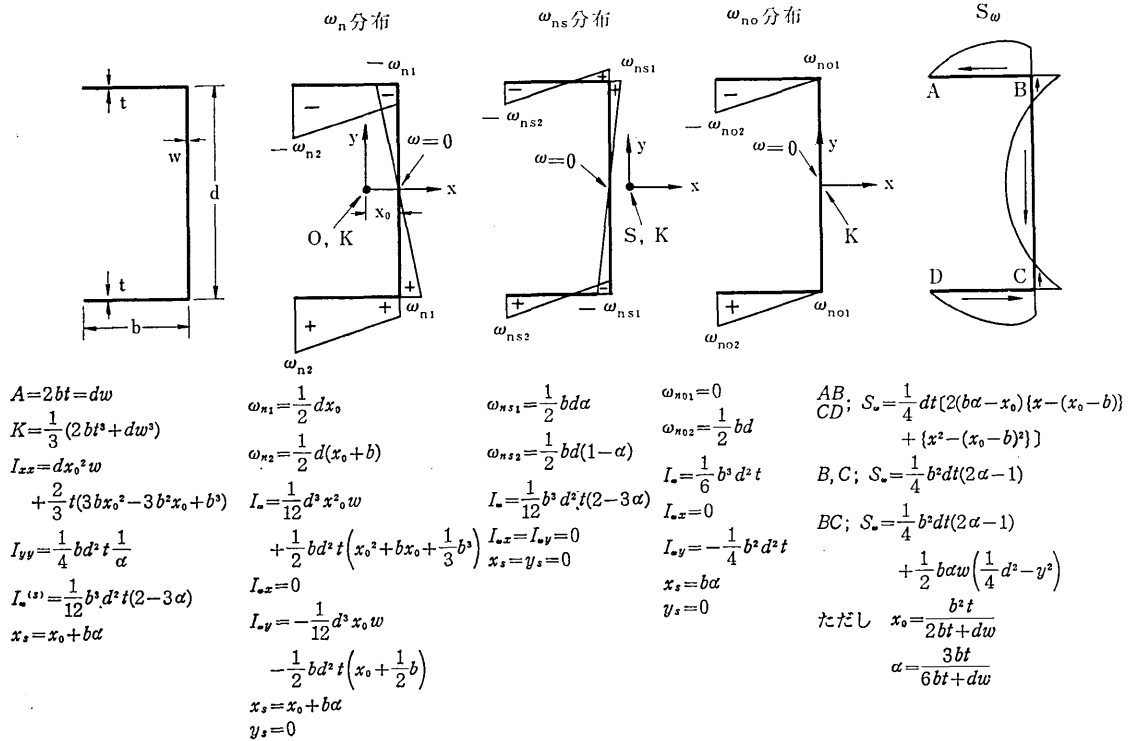


図 2.16 薄肉溝形断面

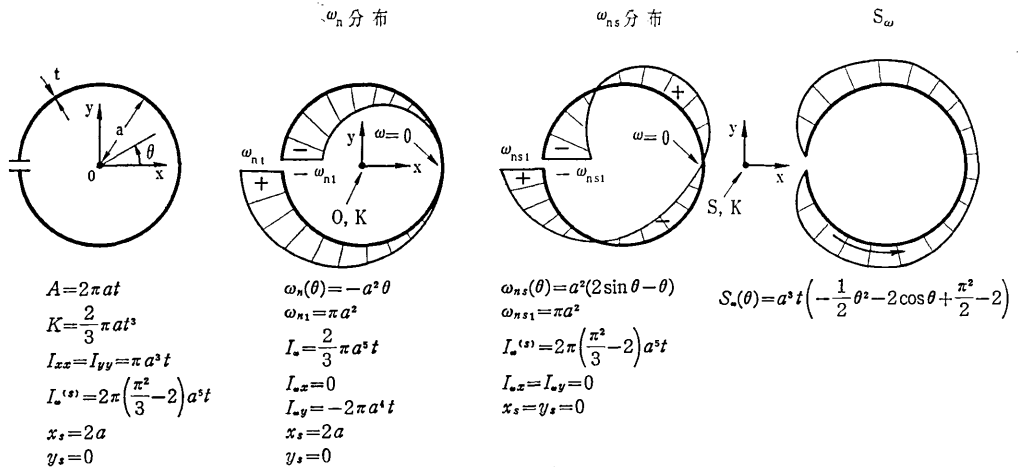


図 2.17 スリット入り薄肉円形断面

(ii) 薄肉閉断面材の振り

計算例として I 形断面，溝形断面およびスリット入り円形断面の三つについてのみ示すが，いずれも標準的な弾性学の教科書に記載されている典型的例題であるから，その計算結果の記述にとどめたい．溝形断面については座標原点 0 を図心，剪断中心，ウェブの midpoint とした三つの場合について計算した結果を特に示しておいた。

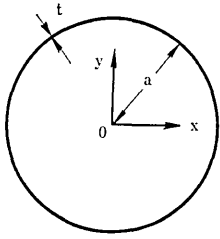
(a) I 形断面 (図 2.15)

(b) 溝形断面 (図 2.16)

(c) スリット入り円形断面 (図 2.17)

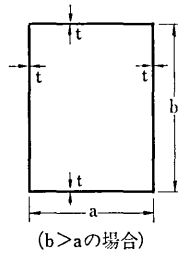
(iii) 薄肉閉断面材の振り

閉断面の振り問題は開断面のそれに比較して計算が複雑になるので，一般の多隔壁閉断面材の解析については次号 (その 3) で取り扱う。



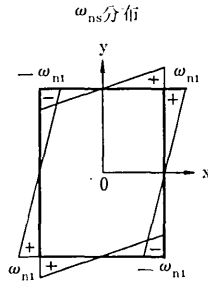
$$\begin{aligned}
 A &= 2\pi at & \omega_{ns}(\theta) &= 0 \\
 K &= 2\pi a^3 t & S_\omega(\theta) &= 0 \\
 I_{xx} &= I_{yy} & &= \pi a^3 t \\
 I_\omega &= 0 \\
 x_s &= y_s & &= 0
 \end{aligned}$$

図 2.18 薄肉円形閉断面

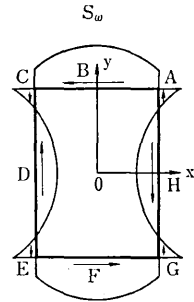


( $b > a$  の場合)

$$\begin{aligned}
 A &= 2(a+b)t \\
 K &= \frac{2a^2b^2}{a+b}t \\
 I_{\omega(s)} &= \frac{a^2b^2(a-b)^2}{24(a+b)}t \\
 I_{xx} &= \frac{1}{6}a^2(a+3b)t \\
 I_{yy} &= \frac{1}{6}b^2(3a+b)t \\
 x_s &= y_s = 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \omega_s(x, y) &= \frac{b-a}{a+b}xy \\
 \omega_{n1} &= \frac{ab(b-a)}{4(a+b)}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 AG, CE; S_\omega &= \frac{a(b-a)t}{4(a+b)}y^2 - \alpha \\
 AC, EG; S_\omega &= -\frac{b(b-a)t}{4(a+b)}x^2 + \frac{ab(b-a)t}{16} - \alpha \\
 A, C, E, G; S_\omega &= \frac{ab(a-b)^2}{24(a+b)} \\
 B, F; S_\omega &= -\frac{ab(a-b)(a+2b)t}{48(a+b)} \\
 D, H; S_\omega &= -\frac{ab(a-b)(2a+b)t}{48(a+b)} = -\alpha
 \end{aligned}$$

図 2.19 薄肉箱形閉断面

ここでは円形断面と矩形断面の場合について結果だけ述べることにする。

(a) 円形断面 (図 2.18 参照)

この場合にはゆがみ  $\omega(x, y)$  は存在しない。

ここで、注目すべきことは、開断面 (スリット入り円形断面) に比べて  $K$  の値は、 $2\pi a^3 t / (2/3)\pi a t^3 = 3(a/t)^2$  倍となり、 $a/t=10$  の場合、300 倍となることである。

(b) 矩形断面 (図 2.19 参照)

### 6. 結 論

梁理論の精密化の上での大きな問題点である Saint-Venant の捩り問題についてその解析法の概要を説明し、二三の簡単な断面についてその計算例を示した。次号では多隔壁断面や複雑な形状断面の場合にも適用できる有限要素解析法を中心に実用計算方法について概説する予定である。  
(1973 年 5 月 1 日受理)

### 参 考 文 献

- 1) S.P. Timoshenko: "Theory of Elasticity", McGraw-Hill Book Co., New York, 2nd ed. (1951)
- 2) I.S. Sokolnikoff: "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill Book Co., New York, 2nd ed. (1956)
- 3) 倉西正嗣: "弾性学", 日本機械学会 (昭和 42 年 4 月)
- 4) 寺沢一雄, 松浦義一: "材料力学 (上)", 海文堂 (昭和 41 年 9 月)
- 5) 小松定夫: "薄肉構造物の理論と計算 I", 山海堂 (昭和 44 年 11 月)
- 6) 林毅: "軽構造の理論とその応用 (上)", 日本科学技術連盟, (1966. 9)
- 7) T.V. ゴロンバス著, 福本嘯士, 西野文雄共訳: "鋼構造部材と骨組", 丸善 (昭和 45 年 10 月)
- 8) J.P. デンハルトーク著, 水野正夫訳: "材料力学", 養賢堂 (昭和 46 年 6 月)
- 9) V.Z. ウラソフ著, 奥村敏恵共訳: "薄肉弾性ばりの理論", 技報堂 (昭和 42 年 9 月)
- 10) 川井忠彦: "薄肉開断面材の弾性力学 (I)", 生産研究, 第 16 巻, 第 1 号 (昭和 39 年 1 月)