UDC 539.384：531.224

梁理論の精密化に関する二，三の試み (その1)

Some Attempts on the Refinement of Modern Engineering Theory of Beams

──梁理論の基礎──

──Basis of the Beam Theory──

川 井 忠 彦*，藤 谷 義 信*
Tadahiko KAWAI and Yoshinobu FUJITANI

航空機，宇宙ロケット，船舶，橋梁，鉄道車両，大型機械構造など数多くの構造物のなかには梁として取り扱われる構造が少なくない．梁理論は過去数世紀にわたって建設され，今日見られるような輝かしい構造工学の発展の礎となった理論である．このすばらしい人類の遺産もよく吟味してみるといくつかの問題点を含んでおり，その合理化に向かって撓まぬ努力が続けられている．ここに紹介するのは川井研究室で過去数年間に行なわれた梁理論精密化のための研究の概要である．

1. 緒　　言

最近，技術革新の進展とともに，各種構造物の大型化，軽量化が各工学分野で問題になってきており，航空機，宇宙ロケット，船舶，橋梁，自動車，鉄道車両や大型機械もしだいに薄板溶接構造にかわりつつある．このような薄板構造の中には，薄肉梁理論を適用してその構造設計が行なわれているものが少なくない．

梁理論は Bernoulli-Euler の曲げ理論に端を発し，過去3世紀にわたって建設され，今日における輝かしい構造工学発展の礎となった理論である．

しかしながらこのすばらしい人類の学問的遺産もよく吟味してみるとその根底にはいくつかの問題点を含んでおり，その合理化，精密化に向かって多くの構造技術者が撓まぬ努力を続けている．梁理論の問題点は一言でいうならば，捩り変形および剪断変形に対する理論の不完全さにすべて起因すると考えられる．すなわち

(a) 梁の曲げ理論は横荷重に対する剪断歪ゼロの仮定の上に建設されている．ところが，実際には剪断応力が存在するのでその分布をやむをえず応力の平衡方程式の積分から求めている．Saint-Venant の提案した半逆法 (semi-inverse method) はこのような方法であり，剪断応力と剪断歪とを結びつける材料の剪断弾性係数 G を無限大と考えるというような苦しい解釈をせざるをえない．

(b) 梁の曲げ捩り理論はもともと，薄肉開断面材を対象にして構成されたものであって，中実断面材に対する配慮が不十分なところがあり，統一的理論という点で欠陥がある．

(c) 一様断面の直線梁の場合でも，任意形状の断面に対する捩りの諸断面定数を求める実用的計算法が確立されていない．

(d) 変断面あるいは曲り梁に対する曲げ捩り理論の展開は未だ十分でない．

(e) 剪断変形の影響を厳密に評価しようとすると勢い3次元弾性論の立場から議論せざるをえなくなり，剪断変形のみならず，断面変形の影響も考慮に入れた梁理論の展開へと向かっていくことになる．この問題は梁理論における最後の残された問題であろう．

(f) 梁柱の曲げ捩り座屈の基礎平衡方程式を仮想仕事の原理から導き出す場合いくつかの問題点がある．特に捩りモーメントに関する座屈方程式の寄与項の評価が非常にむずかしいが，それは一つには梁の剪断変形理論の不備によるものと思われ，もう一つの重要な点は捩りモーメントが非保存力 (nonconservative force) であるか否かによるものと思われる．

構造力学の学問体系に盤石の基礎を与えている梁理論も上に述べたように未だいくつかの問題点を含んでおり，その解決によって一段と理論の精密化と適用範囲の拡大が期待できることは明らかである．次節では梁理論がどのようにして形成されていったかを簡単に紹介する．

2. 梁理論発展の歴史的経過

緒言でも述べたように梁理論は Bernoulli-Euler の曲げの理論に端を発し，Saint-Venant, H. Wagner, S. P. Timoshenko, E. Reissner, V. Z. Vlasov らを始めとして多数の世界的学者の貴重な業績の上にはぐくまれながら3世紀にわたって生長を続けてきたのである．

その歴史をたどってみると，Bernoulli-Euler の梁の曲げ理論と Saint-Venant の捩りおよび剪断変形理論が結びついて梁の古典的理論あるいは材料力学的理論が完成されるまでの時期 (1654～1886) を第1世代，航空工学や船舶工学の勃興にともなって構造物の軽量化に対する認識が高まり，構造用形材について Bach の行なった梁の曲げ捩りの実験，それに続く H. Wagner の曲げ捩り理論の誕生，S. P. Timoshenko の先駆的研究，E. Reissner の剪断遅れ (shear lag) の理論を経て，V. Z. Vlasov が梁の曲げ捩り理論を体系づけるまでの時期 (1910～1958) を第2世代と呼ぶことにしよう．そして後者の時期を梁の近代的工学理論あるいは梁の弾性学的理論の展開期と呼ぶことにしよう．

* 東京大学生産技術研究所　第2部

ここで梁の材料力学的理論とは捩りについて Saint-Venant の捩り，剪断変形についても2次元理論の段階までの理論をさし，梁の弾性学的理論とは Vlasov によって体系化された梁の曲げ捩り理論を意味し，E. Reissner の提唱した剪断遅れ理論（3次元剪断変形理論）と組み合わさって新しい梁の工学的理論が形成され今日に至っていると考えられる．ところが梁の剪断変形理論を厳密に考えていくと，勢い断面変形も同時に考慮せざるをえなくなることを前にも述べた．すなわちこれからの梁理論としては剪断変形や断面変形の影響を考慮に入れたものでなければならず，また，さらに変断面や初期の曲率・捩率の影響も考えた理論ということになろう．このような未来の梁理論の発展期を第3世代とすれば，われわれはこの第3世代の梁理論の展開に向かって地道な努力を続けていかなければならない。このような梁理論の発展史をわかりやすくチャートに示したのが図1である．

以上のような梁理論の発展史のあらましを背景にその

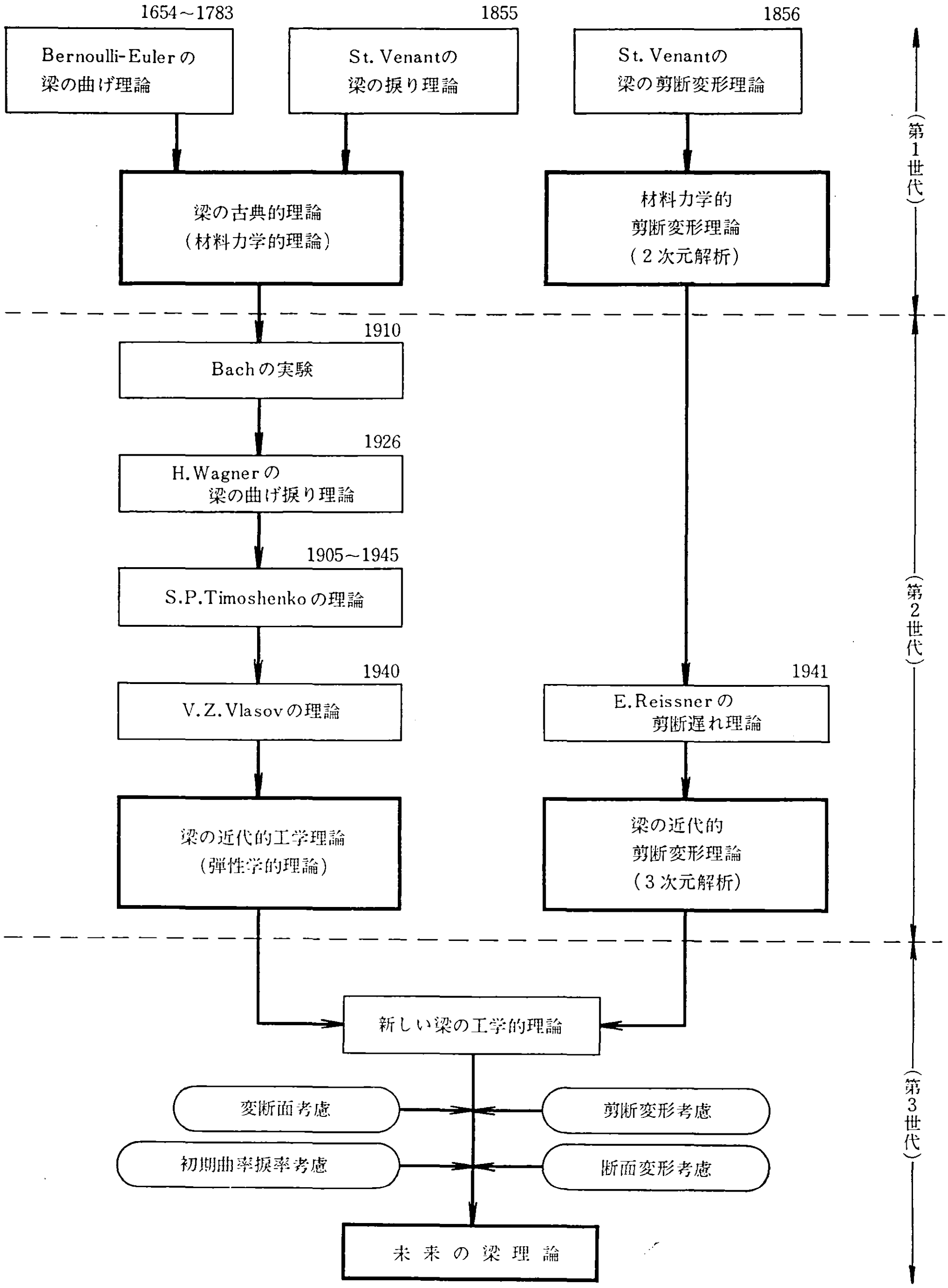


図1　梁理論の歴史的経過

理論の展開に大きな貢献をした人々の横顔について若干触れてみよう.

(i) 数学一家 Bernoulli

Bernoulli 家はオランダのアントワープの出身で, 宗教上の迫害を受けてオランダをのがれ, 16 世紀末スイスのバーゼルに移ったといわれている. そして 17 世紀末から 1 世紀以上にわたって多くの有名な数学者を生んだのである.

まず Jacob Bernoulli*(1654—1705) は弟の John とともに Leibnitz (1646—1716) に始まる微積分学の発展に大きな貢献をなし, 梁の撓みを解析し, 曲率と曲げモーメントが比例関係にあることを見いだした.

John Bernoulli (1667—1748) は Jacob の弟で 17 世紀の生んだ最も偉大な数学者といわれており, 仮想仕事の原理を構成したと伝えられている.

Daniel Bernoulli (1700—1782) は "Hydrodynamica" の著者で, John Bernoulli の息子でもあり梁の弾性曲線理論に貢献した. 弟子 L. Euler に弾性曲線の方程式を導くのに変分法 (calculus of variations) を用いるべきであると教えた. 梁の撓み振動の基礎方程式を導き, L. Euler はその積分解を与えた.

(ii) Leonard Euler (1707—1783)

John Bernoulli がバーゼル大学で教鞭をとっていた当時ヨーロッパ各地から数多くの優秀な学生が集まったといわれているが, その中でも L. Euler は傑出した門下生であったようで, 1727 年弱冠 20 才でセントペテルスブルグのロシア科学院の会員になり, その時代に有名な "力学" を書いて, 質点運動の微分方程式とその積分を求めて運動が決定される過程を明らかにした.

その頃また弾性曲線論に興味を示し, 梁の振動解析を行なった. 1744 年最初の変分学の本を出版, その中で始めて弾性曲線理論を組織的に取り扱った (懸垂線 (Catenary) の問題, エラスティカ (Elastica) の問題や梁の振動など). 17 世紀末から 18 世紀初頭に輩出した大数学者はすべて Euler の弟子である. 60 才を過ぎて両眼がほとんど失明状態となったが, 助手に新しい問題とその解法を説明, 問題を解かせて論文を作らせた. 1766 年から 1783 年の間に何と 400 編にのぼる論文を書き, 彼の死後 30 年以上にわたってロシア科学院から彼の論文が発表され続けたといわれている. また現在のソビエトの数理科学が高い水準にあるのはこの L. Euler 以来の伝統によるといわれている.

(iii) Barré de Saint-Venant (1797—1886)

著名な農業経済の専門家を父に 1797 年にフランスで生まれ, 数学に早くから天才的才能を発揮, 16 才の時 École Polytechnique の入試に合格たちまちクラスのトップになったといわれている. 1814 年 3 月に起きた戦争の際に反戦運動を行なったため, その卓越した才能, 精力, 向学心にもかかわらず, フランス国内では工学者としての名声がなかなか上がらなかった. 1855 年および 1856 年彼の名を不朽なものにした梁の曲げおよび捩りの理論を有名な memoirs に発表, また動力学にも興味をもち, 衝突物体による梁の撓みおよび縦振動の問題を研究した. Saint-Venant の画期的な捩りに関する論文は 1853 年フランス科学院に提出され, 論文の審査は Cauchy, Poncelet, Piobert および Lamé が当ったが, 非常に大きな感銘を与えたといわれている. これが彼の有名な半逆法 (semi-inverse method) を提案した論文である. この論文がきっかけとなって材料力学を理論弾性学の基礎の上に立って精密化していこうという動きが始まったのである.

(iv) Stephen P. Timoshenko

材料力学および構造力学の分野であまりにも有名であるが昨年西独でなくなったといわれている. この人の多彩な業績の中には数々の梁理論の問題に関する研究がある. すなわち一端を固定した I 形梁の捩り問題を解析し, 実験結果とよくあうようにするには Saint-Venant の捩りの他にフランジの曲げに基づく付加捩りモーメントを考慮に入れるべきであることを論じ, 今日よく知られている曲げ捩りの基礎式

$$C\theta' - C_1\theta''' = T$$

を導いた (1905—1906). 彼はすでに 1904 年に捩りに対して弱い十字形断面柱の捩り座屈理論を発表, 1936 年に名著 "座屈理論" を出版, 1945 年薄肉開断面材の曲げ, 捩りおよび安定理論を体系づけた.

(v) H. Wagner

1926 年 C. Weber が論じた薄肉開断面材の剪断流を考慮した捩り理論をもとにして柱の捩り座屈の理論をダンチッヒ工科大学 25 周年記念論文集に発表し, これが今日の柱の曲げ捩り座屈理論の本格的出発点となった.

(vi) Vasilli Zakharovich Vlasov (1906—1958)

1924 年モスクワ地形測量院の地質学部に入り, 1926 年モスクワ高等工科大学の土木工学科の入試に合格, 卒業と同時に土木工学科で教鞭をとるようになり, 1937 年有名な "殻の構造力学" の論文を発表して工学博士の学位を獲得, 1943 年モスクワ数学会会員, 1953 年にはソビエト科学アカデミの文通会員に選ばれる. Vlasov は全生涯を薄肉構造の研究に捧げた. 彼は自分の研究業績を集大成して "薄肉開断面材"(1940), "薄肉空間系の構造力学"(1949), "殻の一般理論とその応用" (1949) を出版した. そしてその最初の本で 1 級, 他の 2 冊で 2 級スターリン賞を受けている. 薄肉構造解析理論の現代における世界的権威である.

* I. Todhunter and K. Pearson "A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials" Cambridge at the University Press (1886) によれば James Bernoulli の名で記載されている.

以上梁理論の発展史上語らないわけにいかない主要な工学者や数学者について述べたが，ここで流体力学の世界的権威である Ludwig Prandtl の学位論文について述べておきたい．彼は 1875 年ミュンヘンの近郊で生まれ，ミュンヘン工科大学を卒業し，A. Föppl 教授の助手となった．1899 年狭い矩形断面梁の横倒れ座屈 (Kipperscheinung) の論文を発表して学位を得ている．これが柱の曲げ捩り座屈理論の間接的な出発点となっているのである．

また Eric Reissner はまだ健在で，殻構造理論の分野で世界的に知られている数学者であり，1941 年に発表した剪断遅れ理論は3次元剪断変形理論を始めて展開した最初の論文として世界の注目を集めた．最近ブームを呼んでいる有限要素解析法で板殻の構造解析の基礎となる Hellinger-Reissner の原理は彼の業績の一つとして有名であることを付言しておく．

3.　梁理論の出発点

“梁”または“柱”と呼ばれている構造物はその断面の寸法がその長さに比して非常に小さい構造物であると定義することができる．このような細長い構造物の特徴としてわれわれがとらえることのできた性質は“断面不変”の仮定であると思われる．普通，梁の曲げ理論の根本仮定として Bernoulli-Euler らの提唱したいわゆる“平面保持” (planes remain plane) の仮定が採用されているが，V. Z. Vlasov は“断面不変”の仮定がその出発点であると主張している．著者もその考えに賛成であり，以下この“断面不変”の仮定について話を進めていくことにする．著者はこの“断面不変”の仮定の解釈に二つの立場があると考える．すなわち

（ⅰ）断面がひずまない（断面剛の仮定）

（ⅱ）断面内の応力分布が他の応力成分に比較して無視できる．（断面内無応力の仮定）

の2つがあり，梁理論の基礎仮定としては前者の方をとる．いま断面一様で図心軸が直線を保つ棒の一端面内に図2に示すような直角座標系をとり，棒の任意の点の変

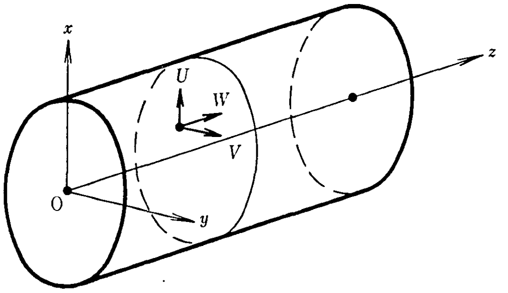


図 2　梁の座標系

位ベクトルを (U, V, W) で表わすと次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} U&=U(x,y,z)\\ V&=V(x,y,z)\\ W&=W(x,y,z)\end{aligned}\right\}\qquad(1.1)$$

さて（ⅰ）の仮定にしたがう場合には断面内に生ずる歪成分 $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ は無視するという立場をとる．すなわち

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\gamma_{xy}=0\qquad(1.2)$$

そしてさらに横荷重による剪断歪 $\gamma_{xz}^{(b)}, \gamma_{yz}^{(b)}$ は無視する．

$$\gamma_{xz}^{(b)}=\gamma_{yz}^{(b)}=0\qquad(1.3)$$

これが従来の梁理論の立場であることをあとで説明するが，（ⅱ）の仮定の立場では次式に示すような条件式を表わす．

$$\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0\qquad(1.4)$$

まず（ⅰ）の仮定をとった場合，梁の変位関数はどのような形で与えられるか考えてみよう．まず (1,2) 式より

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x&=\frac{\partial U}{\partial x}=0\quad\therefore\quad U=U(y,z)\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial V}{\partial y}=0\quad\therefore\quad V=V(x,z)\end{aligned}\right\}\qquad(1.5)$$

となることがわかる．さて3番目の条件式 $\gamma_{xy}=0$ は

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}=0$$

で与えられ，この式と (1.5) 式より

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-\theta(z),\quad \frac{\partial V}{\partial x}=\theta(z)\qquad(1.6)$$

とおくことができる．ここに $\theta(z)$ は z の任意の関数である．(1.6)式を積分すると次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} U(x,y,z)&=u(z)-y\theta(z)\\ V(x,y,z)&=v(z)+x\theta(z)\end{aligned}\right\}\qquad(1.7)$$

この式は断面剛の仮定をすれば，いわゆる“梁”の断面内の変位は平行移動 $(u(z),\ v(z))$ と回転 $\theta(z)$ からなる剛体変位であることを示している．さて (1.7) 式で与えられる断面変位に随伴すべき梁の軸方向の変位 $W(x, y, z)$ は次のようにして求められる．すなわち軸方向の変位 $W(x,y,z)$ を曲げ変形による変位 $W^{(b)}(x,y,z)$ と捩り $\theta(z)$ による変位 $W^{(t)}(x,y,z)$ の和で与えられると仮定する．

$$W(x,y,z)=W^{(b)}(x,y,z)+W^{(t)}(x,y,z)\qquad(1.8)$$

さて $W^{(b)}(x,y,z)$ は (1.3) 式より次の微分方程式を満足しなければならない．

$$\frac{\partial W^{(b)}}{\partial x}+u'(z)=0,\quad \frac{\partial W^{(b)}}{\partial y}+v'(z)=0\qquad(1.9)$$

この方程式は容易に積分できて次のような一般解が得られる．

$$W^{(b)}(x,y,z)=w(z)-xu'(z)-yv'(z)\qquad(1.10)$$

ここに $w(z)$ は z の任意関数であり，′ は z に関する微分を表わしている．

次に捩り変形による軸方向の変位 $W^{(t)}(x,y,z)$ からは次式のような剪断歪が得られる．

$$\gamma_{xz}^{(t)}=\frac{\partial W^{(t)}}{\partial x}-y\theta',\ \gamma_{yz}^{(t)}=\frac{\partial W^{(t)}}{\partial y}+x\theta'\qquad(1.11)$$

さて捩り変形による軸方向の変位 $W^{(t)}(x,y,z)$ からは軸応力 σ_z が生じないとすれば，3次元弾性論より z 軸方向の応力の平衡方程式は次のようになる．

$$\frac{\partial \tau_{xz}^{(t)}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}^{(t)}}{\partial y}=0 \tag{1.12}$$

ここでは軸方向に働く物体力は存在しないものとする．そこで (1.11) 式を (1.12) 式に代入すれば次のような $W^{(t)}$ に関する調和方程式が得られる．

$$\frac{\partial^2 W^{(t)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W^{(t)}}{\partial y^2}=0 \tag{1.13}$$

さて未知関数 $W^{(t)}$ に関する境界条件は，簡単なために梁の断面を図 3 に示すような単一連結領域とすれば

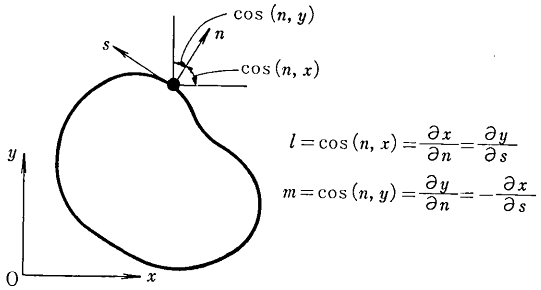


図 3　n, s の方向

梁の表面における無応力の条件：

$$\tau_{xz}^{(t)}l+\tau_{yz}^{(t)}m=0 \tag{1.14}$$

ここに $l=\cos(n,x)$ $m=\cos(n,y)$

より求めることができる．すなわち (1.11) 式を (1.14) 式に代入して

$$\frac{\partial W^{(t)}}{\partial n}=\theta'(z)\{y\cos(n,x)-x\cos(n,y)\} \tag{1.15}$$

が得られる．ここに n は境界上において外向きに立てた法線方向を表わしている．

ところで今考えている振りの問題では軸応力 $\sigma_z^{(t)}=0$ を仮定していることから

$$\frac{\partial W^{(t)}}{\partial z}=0 \tag{1.16}$$

でなければならないから，(1.15) 式を参考にして

$$W^{(t)}(x,y,z)=\theta'(z)\omega(x,y) \tag{1.17}$$

のように仮定すると，まず (1.16) 式より

$$\theta'(z)=\alpha=\text{一定} \tag{1.18}$$

であり，(1.13) 式は

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}=0 \tag{1.19}$$

また，境界条件 (1.15) 式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial n}=y\cos(n,x)-x\cos(n,y) \tag{1.20}$$

と与えられる．(図 3 参照)

また新たに関数 $\phi(x,y)$ を次のように仮定する．

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial y}&=\frac{\partial W^{(t)}}{\partial x}-y\theta'\\-\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial x}&=\frac{\partial W^{(t)}}{\partial y}+x\theta'\end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

そうすると応力の平衡方程式 (1.12) 式は自動的に満足されるから，(1.21) 式の第 1 式を y で，第 2 式を x で微分して，両辺それぞれ減ずれば容易に

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=-2G\theta' \tag{1.22}$$

が得られる．

また，境界条件 (1.14) 式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}l-\frac{\partial \phi}{\partial x}m=0$$

で与えられる．ところが法線の方向余弦 (l,m) には図 3 を参考にして次のような関係式が成立する．

$$l=\cos(s,y)=\frac{\partial y}{\partial s},\quad m=-\cos(s,x)=-\frac{\partial x}{\partial s} \tag{1.23}$$

したがって境界条件は

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}=0 \quad \therefore \quad \phi=\text{一定} \tag{1.24}$$

で与えられる．

以上に述べた振りの理論が，Saint-Venant の名を不朽ならしめた振り理論であることは説明するまでもないところであろう．そして $\omega(x,y)$ は Saint-Venant のゆがみ関数 (warping function)，$\phi(x,y)$ は振りの応力関数 (stress function) である．Saint-Venant の振り問題については次号で詳細に述べる予定であるから これ以上述べないことにするが，梁の曲げ振り理論の出発点においては $\theta'(z)=$一定，すなわち Saint-Venant の振りあるいは一様振り (uniform torsion) 以外の場合にも (1.17) 式が成立すると仮定するのである．

したがって軸方向の変位関数 $W(x,y,z)$ は次式で与えられることになる．

$$W(x,y,z)=w(z)-xu'(z)-yv'(z)+\theta'(z)\omega(x,y) \tag{1.25}$$

この式の右辺の第 1 項は梁の軸方向の一様伸縮，第 2 項，第 3 項はよく知られた Bernoulli-Euler の梁の曲げ理論の基礎式であり，最後の項が Saint-Venant の振り理論を拡張した梁の曲げ振り理論 (warping torsion theory) の基礎式を与えるのである．

以上において断面剛の仮定から出発して梁の変位関数が軸方向の一様変位 $w(z)$，断面内の一点の平行変位 $(u(z), v(z))$ とそのまわりの回転 $\theta(z)$ の 4 つの関数により，(1.7) 式および (1.25) 式により与えられることがわかったわけである．次にもう一つの仮定すなわち断面内無応力の仮定 (1.4) 式を採用した場合，梁の変位関数がどのように与えられるか考えてみよう．

さて 3 次元弾性論より

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\{(1-\nu)\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y+\nu\varepsilon_z\}\\\sigma_y&=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\{\nu\varepsilon_x+(1-\nu)\varepsilon_y+\nu\varepsilon_z\}\\\sigma_z&=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\{\nu\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y+(1-\nu)\varepsilon_z\}\\\tau_{yz}&=G\gamma_{yz},\quad \tau_{zx}=G\gamma_{zx},\quad \tau_{xy}=G\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

この応力一歪関係は等方性弾性体の場合に成立するが，この式に $\sigma_x=\sigma_y=0$ をその第1，第2式に導入すれば

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=-\nu\varepsilon_z \tag{1.27}$$

の関係が得られ，この式を第3式に代入すれば

$$\sigma_z=E\varepsilon_z \tag{1.28}$$

が導出される．さて(1.27)式より

$$\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}=0 \tag{1.29}$$

また(1.26)式を用いて $\tau_{xy}=0$ から

$$\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}=0 \tag{1.30}$$

が求められる．この2つの式から容易に

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0\\&\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

が得られる．すなわち梁の断面内の変位 $(U(x,y,z), V(x,y,z))$ は座標 x, y に関して調和関数であることを(1.31)式は要求している．そこで2次元直角座標系で表わされた調和関数列を次の式で定義すると，

$$\phi_{n0}+i\phi_{0n}=(x+iy)^n \quad (n=2,3,\cdots\cdots) \tag{1.32}$$

梁の変位関数 (U, V, W) は(1.27)式の関係を用いて一般に次式のように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned}U(x,y,z)&=u(z)-y\theta(z)-\nu w_1'(z)x\\&\quad-\nu\sum_{n=2}^{\infty}\{w_{n0}'(z)\phi_{n0}(x,y)+w_{0n}'(z)\phi_{0n}(x,y)\}\\V(x,y,z)&=v(z)+x\theta(z)-\nu w_1'(z)y\\&\quad-\nu\sum_{n=2}^{\infty}\{w_{n0}'(z)\phi_{0n}(x,y)-w_{0n}'(z)\phi_{n0}(x,y)\}\\W(x,y,z)&=w_0(x,y)+w_1(z)\\&\quad+\sum_{n=2}^{\infty}n\{w_{n0}(z)\phi_{n-1,0}(x,y)\\&\quad+w_{0n}(z)\phi_{0,n-1}(x,y)\}\end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

この式で w_{30}, w_{03} の項までとった変位関数の式を作ると次のように与えられる．

$$\left.\begin{aligned}U(x,y,z)&=u(z)-y\theta(z)-\nu w_1'(z)x\\&\quad-\nu w_{20}'(x^2-y^2)-2\nu w_{02}xy\\&\quad-\nu w_{30}'(x^3-3xy^2)-\nu w_{03}'(z)(3x^2y-y^3)\\V(x,y,z)&=v(z)+x\theta(z)-\nu w_1'(z)y\\&\quad-2\nu w_{20}'(z)xy+\nu w_{02}'(x^2-y^2)\\&\quad-\nu w_{30}'(z)(3x^2y-y^3)+\nu w_{03}'(z)(x^3\\&\quad-3xy^2)\\W(x,y,z)&=w_0(x,y)+w_1(z)+2w_{20}(z)x\\&\quad+2w_{02}(z)y+3w_{30}(z)(x^2-y^2)\\&\quad+6w_{03}(z)xy\end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

この式と断面剛の仮定にもとずいて導かれた変位関数の式 (1.7) および (1.25) 式を比較してみると，$\nu=0$ の場合，梁の断面内変位は断面剛の場合と同じになるが，軸方向の変位に関しては従来の梁の剪断変形論を一歩進めた変位関数の場を与えることになる．$\nu\neq0$ とすると(1.34)式は剪断変形のみならず断面変形をも考慮に入れた新しい梁理論の出発点を与えることになる．Saint-Venant の発表した有名な片持梁の自由端に集中横荷重を受ける梁の剪断変形を考慮に入れた曲げ理論は，(1.34 式の特別な場合の変位関数を用いて展開されていることを注意しておきたい．さて(1.33)式を用いた新しい梁理論の展開も可能であるが，この点に関しての議論はしばらくおき，後日紹介することにしたい．最後に梁の曲げ理論の出発点となっている Bernoulli-Euler の平面保持の仮定について考えてみよう．

Bernoulli-Euler の仮定は変形前図心軸に垂直であった平面は変形した軸に垂直な平面を構成し，また面内の歪は存在しないという条件である．

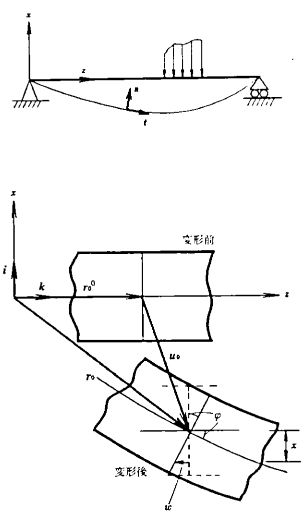
簡単のために図4に示すような梁の座標軸をとった場合，梁の曲げは x-z 平面内でのみ起り，その変位関数は次式のように与えられるとする．

$$\left.\begin{aligned}U(x,y,z)&=u(z),\qquad V(x,y,z)=0\\W(x,y,z)&=w(x,y,z)\end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

さて z 軸は曲げ変形を受けて撓むことになるが，その任意の z 断面における単位の接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{t}=\left(\frac{u'}{\sqrt{u'^2+(1+w_z')^2}},0,\frac{1+w_z'}{\sqrt{u'^2+(1+w_z')^2}}\right) \tag{1.36}$$

ここに $w_z=w(0,0,z)$ である．



$r_0^{(0)}=zk$

$u_0=u(z)i+w(o,o,z)k$

$r_0=r_0^{(0)}+u_0=u(z)i+(z+w)k$

$t=\dfrac{\partial r_0}{\partial z}/|r_0|$

$w=-x\varphi$

図 4　Bernoulli-Euler の仮定

ところで図4より

$$\sin\varphi=\cos(s,x)=\frac{u'}{\sqrt{u'^2+(1+w_z')^2}} \tag{1.37}$$

であるから Bernoulli-Euler の仮定は次式のように与えることができる.

$$w(x,y,z)=-x\varphi \tag{1.38}$$

したがって(1.37)式と(1.38)式より次のような $w(x,y,z)$ に関する非線形の偏微分方程式が得られる.

$$w=-x\sin^{-1}\left(\frac{u'}{\sqrt{u'^2+(1+w_z')^2}}\right) \tag{1.39-a}$$

この式は断面の回転角 φ が小さくて $\sin\varphi\fallingdotseq\varphi$ とおけるならば

$$w=-\frac{xu'}{\sqrt{u'^2+(1+w_z')^2}} \tag{1.39-b}$$

となる. しかるに梁の線素の長さを ds とすれば

$$ds^2=\{u'^2+(1+w_z')^2\}dz^2$$

$$\therefore\quad ds=\sqrt{u'^2+(1+w_z')^2}dz$$

という式が得られる. したがって梁の軸の長さが曲げ変形によって変わらないと仮定できる場合には(1.39-b)式から

$$w=-xu' \tag{1.40}$$

が得られる. この場合剪断歪 γ_{xz} を計算すると

$$\gamma_{xz}=u'+\frac{\partial w}{\partial x}=u'-u'=0$$

となり, 曲げによる剪断歪を無視したことと同等になる.

4. 梁の工学的理論の展開

以上において従来の Bernoulli-Euler より Saint-Venant, Timoshenko, Vlasov らによって打ち立てられた梁の工学的理論の出発点となる変位関数式が "断面不変" の仮定のみを基礎として導けることを示した. そこで, 本節では仮想仕事の原理から梁の変形を支配する基礎平衡方程式が導かれることを示すことにする.

まず "断面剛" の仮定より導かれた変位関数の表示式を改めて再録すると

$$\left.\begin{aligned}U(x,y,z)&=u(z)-y\theta(z)\\ V(x,y,z)&=v(z)+x\theta(z)\\ W(x,y,z)&=w(z)-xu'(z)-yv'(z)\\ &\quad+\theta'(z)\omega(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

となる. この式から梁の変形の歪成分を求めると次のようになる.

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_z&=w'(z)-xu''(z)-yv''(z)\\ &\quad+\theta''(z)\omega(x,y)\\ \gamma_{xz}&=\theta'(z)\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}-y\right),\quad \gamma_{yz}=\theta'(z)\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}+x\right)\\ \varepsilon_x&=\varepsilon_y=\gamma_{xy}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

したがって材料が等方性弾性体であると仮定すると, 次のような応力成分の式が得られる.

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_z=E'\varepsilon_z,\quad \tau_{xz}=G\gamma_{xz},\quad \tau_{yz}=G\gamma_{yz}\\ &\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.43}$$

ここに $E'=\dfrac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ である.

よって梁の有する歪エネルギ V は次のように求められる.

$$V=\frac{1}{2}\iiint(E'\varepsilon_z^2+G\gamma_{xz}^2+G\gamma_{yz}^2)dxdydz \tag{1.44}$$

すなわち断面剛の仮定を厳密に守って理論を組み立てていくと修正された Young 率 E' を用いなければならないことになる. しかしながら断面剛の仮定を物理的に考えると Poisson 比 ν を無視することにもなるので, 従来の梁理論の立場をとって, E' を用いず E を使用することにする. さて (1.44) 式に (1.42) 式を代入し, x,y について積分すると次式が得られる.

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{2}\iiint E(w'-xu''-yv''+\theta''\omega)^2dxdydz\\ &\quad+\frac{1}{2}\iiint G\theta'^2\left\{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}+x\right)^2\right\}dxdydz\\ &=\frac{1}{2}\int_0^l(EAw'^2+EI_{xx}u''^2+EI_{yy}v''^2+EI_\omega\theta''^2\\ &\quad-2EJ_xw'u''-2EJ_yw'v''+2ES_\omega w'\theta''\\ &\quad+2EI_{xy}u''v''-2EI_{\omega x}u''\theta''-2EI_{\omega y}v''\theta'')dz\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_0^l GK\theta'^2dz\end{aligned} \tag{1.45}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}&A=\iint dxdy,\quad J_x=\iint xdxdy\\ &J_y=\iint ydxdy,\quad S_\omega=\iint\omega dxdy\\ &I_{xx}=\iint x^2dxdy,\quad I_{yy}=\iint y^2dxdy\\ &I_\omega=\iint\omega^2dxdy,\quad I_{\omega x}=\iint x\omega dxdy\\ &I_{\omega y}=\iint y\omega dxdy,\quad I_{xy}=\iint xydxdy\\ &K=\iint\left\{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}+x\right)^2\right\}dxdy\end{aligned}\right\} \tag{1.46}$$

(1.46)式は梁の変形を支配する諸断面定数の定義式を与えるものである. A は断面積, J_x, J_y および S_ω は, x,y,ω に関する断面の一次モーメント, $I_{xx}, I_{yy}, I_\omega, I_{\omega x}$ $I_{\omega y}, I_{xy}$ は x,y,ω に関する種々の断面二次モーメントを表わし, K はよく知られた Saint-Venant の振り定数の定義式である. また梁の曲げ振り理論では EI_ω のことを曲げ振り剛性 (warping torsional rigidity) と呼んでいる.

次に梁に働く外力の仮想仕事の式 δW_{ex} を求めてみよう. いま外力としては物体力 (X,Y,Z) と両端面 ($z=0$, $z=l$) に働く表面力 (F_x,F_y,F_z) を考えることにすれば次の式が得られる.

$$\delta W_{ex}=\iiint(X\delta U+Y\delta V+Z\delta W)dxdydz$$
$$-\iint_{z=0}(F_x\delta U+F_y\delta V+F_z\delta W)dxdy$$
$$+\iint_{z=l}(F_x\delta U+F_y\delta V+F_z\delta W)dxdy \quad (1.47)$$

さて(1.47)式に(1.41)式を代入して x, y についての積分を実行すると次のようになる.

$$\delta W_{ex}=\int_0^l(q_x\delta u+q_y\delta v+p\delta w+m_z\delta\theta-m_x\delta v'+m_y\delta u'+m_\omega\delta\theta')dz+(\bar{V}_x\delta u+\bar{V}_y\delta v+\bar{P}\delta w+\bar{M}_z\delta\theta-\bar{M}_x\delta v'+\bar{M}_y\delta u'+\bar{M}_\omega\delta\theta')\Big|_{z=0}^{z=l} \quad (1.48)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
&q_x(z)=\iint Xdxdy, \quad q_y(z)=\iint Ydxdy\\
&p(z)=\iint Zdxdy,\\
&m_z(z)=\iint(xY-yX)dxdy\\
&m_y(z)=-\iint xZdxdy, m_x(z)=\iint yZdxdy\\
&m_\omega(z)=\iint \omega Zdxdy,\\
&\bar{V}_x=\iint F_xdxdy, \quad \bar{V}_y=\iint F_ydxdy\\
&\bar{P}=\iint F_zdxdy,\\
&\bar{M}_z=\iint(xF_y-yF_x)dxdy\\
&\bar{M}_y=-\iint xF_zdxdy\\
&\bar{M}_x=\iint yF_zdxdy\\
&\bar{M}_\omega=\iint \omega F_zdxdy
\end{aligned}\right\} \quad (1.49)$$

である.

以上において梁の歪エネルギ V の式(1.45)と梁に働く外力の仮想仕事式 δW_{ex} (1.48) 式が求められたから仮想仕事の原理の式

$$\delta V-\delta W_{ex}=0 \quad (\delta u, \delta v, \delta w, \delta\theta) \quad (1.50)$$

に(1.45)式および(1.48)式を代入, δV については部分積分を行なって変形していくと結局次のような式が得られる.

$$\begin{aligned}
&[(EI_{xx}u''+EI_{xy}v''-EJ_xw'-EI_{\omega x}\theta'')\delta u'\\
&+(-EI_{xx}u'''-EI_{xy}v'''+EJ_xw''+EI_{\omega x}\theta''')\delta u+(EI_{xy}u''+EI_{yy}v''-EJ_yw'-EI_{\omega y}\theta'')\delta v'\\
&+(-EI_{xy}u'''-EI_{yy}v'''+EJ_yw''+EI_{\omega y}\theta''')\delta v+(-EJ_xu''-EJ_yv''+EAw'+ES_\omega\theta'')\delta w\\
&+(-EI_{\omega x}u''-EI_{\omega y}v''+ES_\omega w'+EI_\omega\theta'')\delta\theta'+(EI_{\omega x}u'''+EI_{\omega y}v'''-ES_\omega w''-EI_\omega\theta'''+GK\theta')\delta\theta\\
&-\{(\bar{V}_x+m_y)\delta u+(\bar{V}_y-m_x)\delta v+\bar{P}\delta w+(\bar{M}_z+m_\omega)\delta\theta-\bar{M}_x\delta v'+\bar{M}_y\delta u'+\bar{M}_\omega\delta\theta'\}]\Big|_0^l\\
&+\int_0^l[(EI_{xx}u''''+EI_{xy}v''''-EJ_xw'''-EI_{\omega x}\theta'''')\delta u+(EI_{xy}u''''+EI_{yy}v''''-EJ_yw'''-EI_{\omega y}\theta'''')\delta v\\
&+(EJ_xu'''+EJ_yv'''-EAw''-ES_\omega\theta''')\delta w+(-EI_{\omega x}u''''-EI_{\omega y}v''''+ES_\omega w'''+EI_\omega\theta''''-GK\theta'')\delta\theta\\
&-\{(q_x-m_y')\delta u+(q_y+m_x')\delta v+p\delta w+(m_z-m_\omega')\delta\theta\}]dz=0
\end{aligned} \quad (1.51)$$

さて (1.51) 式は変位 u, v, w, θ の仮想変位に関して成立するのであるから, 次のような4つの方程式と境界条件を容易に導くことができる.

(i) 変分 δu に関して

$$EI_{xx}u''''+EI_{xy}v''''-EJ_xw'''-EI_{\omega x}\theta''''-q_x+m_y'=0 \quad (1.52\text{-a})$$

$z=0$ または l で

$$\left.\begin{aligned}
&(EI_{xx}u''+EI_{xy}v''-EJ_xw'-EI_{\omega x}\theta''-\bar{M}_y)\delta u'=0\\
&-(EI_{xx}u'''+EI_{xy}v'''-EJ_xw''-EI_{\omega x}\theta'''+\bar{V}_x+m_y)\delta u=0
\end{aligned}\right\} \quad (1.52\text{-b})$$

(ii) 変分 δv に関して

$$EI_{xy}u''''+EI_{yy}v''''-EJ_yw'''-EI_{\omega y}\theta''''-q_y-m_x'=0 \quad (1.53\text{-a})$$

$z=0$ または l で

$$\left.\begin{aligned}
&(EI_{xy}u''+EI_{yy}v''-EJ_yw'-EI_{\omega y}\theta''+\bar{M}_x)\delta v'=0\\
&-(EI_{xy}u'''+EI_{yy}v'''-EJ_yw''-EI_{\omega y}\theta'''+\bar{V}_y-m_x)\delta v=0
\end{aligned}\right\} \quad (1.53\text{-b})$$

(iii) 変分 δw に関して

$$EJ_xu'''+EJ_yv'''-EAw''-ES_\omega\theta'''-p=0 \quad (1.54\text{-a})$$

$z=0$ または l で

$$-(EJ_xu''+EJ_yv''-EAw'-ES_\omega\theta''+\bar{P})\delta w=0 \quad (1.54\text{-b})$$

(iv) 変分 $\delta\theta$ に関して

$$-EI_{\omega x}u''''-EI_{\omega y}v''''+ES_\omega w'''+EI_\omega\theta''''-GK\theta''-m_z+m_\omega'=0 \quad (1.55\text{-a})$$

$z=0$ または l で

$$\left.\begin{aligned}
&(-EI_{\omega x}u''-EI_{\omega y}v''+ES_\omega w'+EI_\omega\theta''-\bar{M}_\omega)\delta\theta'=0\\
&-(-EI_{\omega x}u'''-EI_{\omega y}v'''+ES_\omega w''+EI_\omega\theta'''-GK\theta'+\bar{M}_z+m_\omega)\delta\theta=0
\end{aligned}\right\} \quad (1.55\text{-b})$$

これらの式は座標原点や座標軸の方向を全く任意にとった場合の梁の平衡方程式であるので, u, v, w および θ はいずれも連成した複雑な式となっている. 普通の梁理

論においては座標原点を図心にとることが多い．この場合には $J_x=J_y=0$ となるからこの場合の平衡方程式は次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l} EI_{xx}u''''+EI_{xy}v''''-EI_{\omega x}\theta''''-q_x+m_y'=0 \\ EI_{xy}u''''+EI_{yy}v''''-EI_{\omega y}\theta''''-q_y-m_x'=0 \\ -EAw''-ES_\omega\theta'''-p=0 \\ -EI_{\omega x}u''''-EI_{\omega y}v''''+ES_\omega w'''+EI_\omega\theta'''' \\ \quad -GK\theta''-m_z+m_\omega'=0 \end{array}\right\} \tag{1.56}$$

さてこの式で，もし $S_\omega=0$ であれば w に関する平衡方程式は独立となる．Saint-Venant のゆがみ関数 $\omega(x,y)$ がこのような状態になっているとき，規準化 (normalize) されているといい $\omega_n(x,y)$ と記すことにする．さて任意のゆがみ関数 $\omega(x,y)$ は次の式により容易に規準化できる．

$$\omega_n(x,y)=\omega(x,y)-\frac{S_\omega}{A} \tag{1.57}$$

なぜならば

$$\iint\omega_n dxdy=\iint\left(\omega-\frac{S_\omega}{A}\right)dxdy=S_\omega-\left(\frac{S_\omega}{A}\right)A=0$$

となるからである．

さてこのようにゆがみ関数が規準化されている場合の梁の平衡方程式を書いてみると次式のようになる．

$$\left.\begin{array}{l} EI_{xx}u''''+EI_{xy}v''''-EI_{\omega x}\theta''''=q_x-m_y' \\ EI_{xy}u''''+EI_{yy}v''''-EI_{\omega y}\theta''''=q_y+m_x' \\ -EI_{\omega x}u''''-EI_{\omega y}v''''+EI_\omega\theta''''-GK\theta'' \\ \quad =m_z-m_\omega'{}^* \end{array}\right\}$$

$$EAw''+p=0 \tag{1.58}$$

(1.58)式でさらに座標軸の方向が断面の慣性主軸の方向にとられているとすれば $I_{xy}=0$ となるから，その u，v および θ に関する平衡方程式は次のように簡単化される．

$$\left.\begin{array}{l} EI_{xx}u''''-EI_{\omega x}\theta''''=q_x-m_y' \\ EI_{yy}v''''-EI_{\omega y}\theta''''=q_y+m_x' \\ -EI_{\omega x}u''''-EI_{\omega y}v''''+EI_\omega\theta'''' \\ \quad -GK\theta''=m_z-m_\omega'{}^* \end{array}\right\} \tag{1.59}$$

(1.59)式は始めの梁の平衡方程式(1.52～1.55)と比較すると著しく簡単化されているが，依然として曲げ変形 (u,v) と振り変形 θ は連成している状態にある．

そこでこの連成が断面内のある点 P の平行変位 (u_p, v_p) とそのまわりの回転に直して，この連成をとくことができるかどうか考えてみよう．それには(1.41)式に立ち帰り次の関係式をまず求める必要がある．

$$\left.\begin{array}{l} u_p=u-y_p\theta \\ v_p=v+x_p\theta \end{array}\right\} \tag{1.60}$$

この式を (1.59)式に代入して u, v を消去すれば次のような式が得られる．

$$\begin{array}{l} EI_{xx}u_p''''+E(y_pI_{xx}-I_{\omega x})\theta''''=q_x-m_y' \\ EI_{yy}v_p''''-E(x_pI_{yy}+I_{\omega y})\theta''''=q_y+m_x' \\ E(I_\omega-y_pI_{\omega x}+x_pI_{\omega y})\theta''''-GK\theta''-EI_{\omega x}u_p'''' \\ \quad -EI_{\omega y}v_p''''=m_z+q_xy_p-q_yx_p \\ \quad -(m_\omega'+m_y'y_p+m_x'x_p) \end{array}$$

したがって，いま

$$x_s=-\frac{I_{\omega y}}{I_{yy}},\quad y_s=\frac{I_{\omega x}}{I_{xx}} \tag{1.61}$$

なる点 S を P 点としたとすれば (1.59) 式は次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l} EI_{xx}u_s''''=q_x-m_y' \\ EI_{yy}v_s''''=q_y+m_x' \\ EI_\omega{}^{(s)}\theta''''-GK\theta''=m_z{}^{(s)}-m_\omega'{}^{(s)} \\ EAw''=-p \end{array}\right\} \tag{1.62-a}$$

ここに

$$\left.\begin{array}{l} I_\omega{}^{(s)}=I_\omega-x_x{}^2I_{yy}-y_s{}^2I_{xx} \\ m_z{}^{(s)}=m_z+(q_xy_s-q_yx_s) \\ m_\omega{}^{(s)}=m_\omega+(m_yy_s+m_xx_s) \end{array}\right\} \tag{1.62-b}$$

すなわち梁の断面上で(1.61)式で定義される点の平行変位 (u_s, v_s) とそのまわりの回転を変位関数にとれば，梁の曲げ変形と振り変形は完全に分離することになる．

このような点を梁断面の剪断中心 (shear center) と呼び，$EI_\omega{}^{(s)}$ は剪断中心のまわりの曲げ振り剛性を示し，$m_z{}^{(s)}$ は剪断中心軸まわりの分布振りモーメントを表わすことになる．このようにしてわれわれは最終的に剪断中心の平行変位 (u_s, v_s) は Bernoulli-Euler の純曲げの方程式を，また振り変形 θ は H. Wagner が初めて導出した梁の曲げ振りの方程式を満足しなければならないことを結論づけることができた．これらの方程式はまた次のようにしても導くことができる．(1.41)式をまず次のように変形する．

$$\left.\begin{array}{l} U(x,y,z)=u_p(z)-(y-y_p)\theta(z) \\ V(x,y,z)=v_p(z)+(x-x_p)\theta(z) \\ W(x,y,z)=w(z)-xu_p'-yv_p'+\theta'\omega_{np}(x,y) \\ \text{ここに}\ \omega_{np}(x,y)=\omega_n(x,y)-xy_p+x_py \end{array}\right\} \tag{1.63}$$

このような変位関数を用いて梁の歪エネルギ V の式を導くこともできる．さて計算にあたり座標軸は断面の慣性主軸の方向にとってあり，ゆがみ関数 $\omega(x,y)$ は規準化されていると仮定する．そのような場合には前にも述べたように，

$$J_x=J_y\fallingdotseq S_\omega=I_{xy}=0$$

であるから，次のようなのようなVの表示式が得られる．

$$\begin{array}{l} V=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l(EAw'^2+EI_{xx}u_p''^2+EI_{yy}v_p''^2 \\ \quad +EI_\omega{}^{(p)}\theta''^2+GK\theta'^2-2EI_{\omega x}{}^{(p)}u_p''\theta'' \\ \quad -2EI_{\omega y}{}^{(p)}v_p''\theta'')dz \end{array} \tag{1.64-a}$$

---

*ここでは $Z(x,y,z)$ の合力は図心を通るものと仮定しておく．すなわち $\iint\omega_nZdxdy=\iint\omega Zdxdy=m_\omega$ である．

ここに

$$\left.\begin{aligned} I_\omega^{(p)} &= \iint \omega_{np}^2 dx^2 dy = I_\omega - x_p^2 I_{yy} - y_p^2 I_{xx} \\ I_{\omega x}^{(p)} &= \iint x\omega_{np} dxdy = I_{\omega x} - y_p I_{xx} \\ I_{\omega y}^{(p)} &= \iint y\omega_{np} dxdy = I_{\omega y} + x_p I_{yy} \end{aligned}\right\} \tag{1.64-b}$$

したがって $I_{\omega x}^{(p)}=I_{\omega y}^{(p)}=0$ となる点がすでに述べたように剪断中心 S であるからその座標 (x_s, y_s) は次式で決定されることになる．

$$x_s=-\frac{I_{\omega y}}{I_{yy}},\quad y_s=\frac{I_{\omega x}}{I_{xx}} \tag{1.61}$$

したがって剪断中心 S の平行変位 (u_s, v_s) とそのまわりの回転角 θ を用いて梁断面の変位を記述することにすれば，梁の歪エネルギ V の表示式は (1.64-b)式により簡単化され，次式のように与えられることになる．

$$V=\frac{1}{2}\int_0^l (EAw'^2+EI_{xx}u_s''^2+EI_{yy}v_s''^2 + EI_\omega^{(s)}\theta''^2+GK\theta'^2)dz \tag{1.65}$$

この式を仮想仕事方程式 $\delta V-\delta W_{ex}=0$ に代入すれば，(1.62-a, b)式が容易に導かれる．E. Trefftz はこのような考え方にしたがって剪断中心の概念を導入している．ところが“剪断中心”の定義の仕方は必ずしも統一されておらず，時おり問題となることがあるので稿を改めてこの点を少し考察してみたいと考えている．

5. 結　言

現代の構造工学の基礎となり，今日その理論の完全さについてあまり疑問をもたれていない梁理論についてその問題点を指摘し，その生い立ちの歴史を述べ，今日使用されている梁の近代的理論が，“断面不変”の仮定から断面が中実であると薄肉であるとに関係なく導き出せることを示した．そしてまた最も普通に用いられている剪断中心の定義を紹介し，曲げ振り変形の連成の仕方について考察を加えた．また“断面内無応力”の仮定から Saint-Venant が発表した理論を拡張した新しい理論の展開が可能であることも示した．第2，第3報（その2．その3）では Saint-Venant の振り問題の解析法について，特に薄肉断面材の場合の理論的解析法，任意断面の場合の有限要素解析法を中心に実例をあげて説明し，またその結果を用いた振りに関する諸断面定数の計算法についても言及する予定である．

(1973年3月29日受理)

参 考 文 献

1) 倉西　正嗣：“弾性学”，日本機械学会（昭和24年4月）
2) V.Z. ウラソーフ著，奥村敏恵外共訳：“薄肉弾性ばりの理論” 技報堂（昭和42年9月）
3) S.P.Timoshenko: “History of Strength of Materials”, McGraw Hill Book Co., New York (1953)
4) S.P. Timoshenko and N. Goodier: “Theory of Elasticity”, McGraw-Hill Book Co., New York, 2nd ed. (1951)
5) S.P. Timoshenko: “Strength of Materials, Part I & II”, Van Nostrand Co., Princeton, New Jersey (1963)
6) S.P. Timoshenko and J.M. Gere: “Theory of Elastic Stability”, McGraw-Hill Book Co., New York (1961)
7) A.E.H. Love: “A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,” Cambridge; University Press 4th ed. (1927)
8) I.S. Sokolnikoff: “Mathematical Theory of Elasticity”, McGraw-Hill Book Co., New York, 2nd ed. (1956)
9) K. Washizu: “Variational Methods in Elasticity and Plasticity”, Pergamon Press, Oxford (1966)
10) Y.C. ファン著，大橋義夫，村上澄男，神谷紀生共訳：“固体の力学／理論”，培風館（昭和45年4月）
11) 川井忠彦：“薄肉開断面材の弾性力学（Ⅰ～Ⅶ）”，生産研究，第16巻 1, 2, 4, 6, 8 号および第17巻 4, 5 号（昭和39年1月～昭和40年5月）
12) 川井忠彦：“梁の工学的理論について”（未発表），（昭和44年2月）