

流体力学における Matched Expansion 法

The Method of Matched Expansions in Fluid Mechanics

成瀬 文雄*

Humio NARUSE

まず Matched Expansion 法の概要を説明する。つぎに普通の摂動法ではうまくとけない Navier-Stokes 方程式の境界値問題の代表例として、一様なおそい流れまたは一様なはやい流れのなかに3次元任意物体がおかれたばあいを考え、この方法の適用によってこの問題がどのようにとかれてゆくかを説明する。

1. あらまし

従属変数 q , 独立変数 r の微分方程式または境界条件のなかに現われるパラメータ ε が非常に小さいとき、普通 $q(r) = q_0(r) + \varepsilon q_1(r) + \dots$ と展開してとこうとする。このような摂動法ではうまくとけないときに、いろいろの工夫がなされるが、これを総称して特異摂動法とよぶ。

Matched Expansion 法はこの特異摂動法のうちの一つであって、考慮されている領域を二つの領域 (ばあいによっては三つ以上の) にわけ、各領域でその領域に適した展開を行ない、共通領域での matching によって足りない境界条件を補足しながら漸近展開の解を決定してゆく方法である。

いまこの方法が流体力学に応用された代表的な例として、一様な縮まない流れのなかに物体がおかれたばあいについて考える。このばあいの支配方程式は Navier-Stokes 方程式であり、方程式に現われるパラメータは Reynolds 数 R_ε である。この Reynolds 数が大きいかまたは小さいとき、普通の摂動法で (速度や圧力を $1/R_\varepsilon$ または R_ε で展開して) とこうとしても、うまくとけないことが分っていた。まず Reynolds 数が大きいとき、Prandtl (1905) は流れの領域を完全流体と境界層領域にわけてとく方法 (この方法は Matched Expansion 法の第1近似を求めることに相当する) を開発することによってこの問題をとくことに成功し、それ以来境界層方程式について多くの研究¹⁾ がなされてきた。また Reynolds 数が小さいばあいには、非線形項を線型化した Oseen 方程式¹⁾ で問題を解析する方向で研究が進められてきたが、1955年頃から Kaplun, Cole, Lagerstrom, Proudman, Pearson などにより、Matched Expansion 法で Navier-stokes 方程式をとく研究が進められ、多くの成果^{2), 3), 4), 5)} があげられた。

本解説では、この摂動法の本質を見易くするために説明の重点を、内外両域における展開の構成、共通領域における matching, その結果としての境界条件の決定におくことにする。また2次元流または軸対称流では流れ

の関数が用いられ、matching も流れの関数でなされるばあいが多いが、ここでは流れの関数で流れが表示できない一般的なばあい (3次元任意物体のまわりの流れおよび軸対称物体のときでも流れが3次元になるばあい) を含めて取り扱うため速度および圧力を用いての matching を考えることにする。

2. 漸近展開と Matched Expansion 法

いま微分方程式または境界条件に現われる小さいパラメータを ε としよう。Matched Expansion 法は全領域を二つの領域にわけて (三つ以上の領域にわけることもある。このばあいは上記の小さいパラメータは二つ以上現われる)、それぞれの領域で適切な漸近展開を行ない共通領域での matching によって足りない境界条件を補足しながらといてゆき、与えられた方程式の漸近展開の解を決定してゆく方法である。したがってまづ漸近展開の定義について簡単に説明し、つづいて Matched Expansion 法の概要についてのべることにする。

i) 漸近列と漸近展開

いま関数列 $\phi_n(\varepsilon)$ があって

$$\varepsilon \rightarrow 0: \phi_{n+1}(\varepsilon) = o(\phi_n(\varepsilon))$$

すなわち

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_{n+1}(\varepsilon) / \phi_n(\varepsilon) = 0$$

をみたすとき、 $\phi_n(\varepsilon)$ を漸近列という。いまこれら漸近列の和を考えて

$$\varepsilon \rightarrow 0: F(\varepsilon) = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(\varepsilon) + o(\phi_N(\varepsilon))$$

をみたすとき、 $\sum_{n=1}^N a_n \phi_n(\varepsilon)$ は $F(\varepsilon)$ の N 項の漸近展開といわれる。ここで $\phi_n(\varepsilon)$ を $\phi_n(\varepsilon; x)$ におきかえると、 $F(\varepsilon; x)$ の漸近展開についても全く同じように定義することができる。

ii) Matched Expansion 法

ここで全領域を二つの領域にわけてとくばあいを説明する。三つ以上にわけてとくばあいにはこれを拡張して考えればよい。

いま与えられた領域が曲線座標 $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ で表示されるとし、 $\bar{\xi} \sim O(\varepsilon^{-\alpha})$, $\alpha \geq 0$ の領域を外部領域、 $\bar{\xi} \sim O(\varepsilon^\beta)$,

* 東京大学生産技術研究所 第1部

$\beta \geq 0$ の領域を内部領域と考えよう。つぎに外部領域および内部領域を表わすため二つの新座標をえらび、この新座標では各領域がそれぞれ $O(1)$ の量として表示されるものとする。すなわち

$$\xi = \varepsilon^\alpha \bar{\xi}, \quad \Xi = \varepsilon^{-\beta} \bar{\Xi} \quad (1)$$

で ξ および Ξ を定義するとき、 $(\xi, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ は外部領域で適切な新座標であり、 $(\Xi, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ は内部領域で適切な新座標となる (図1参照)。

たとえばはやり流れのなかに物体がおかれているばあいを考えるときには、外部領域は完全流体の領域であり、内部領域は境界層の領域である。したがって $\bar{\xi}$ 軸としては物体の壁に直角な座標軸をとればよく、また $\varepsilon = 1/R_0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$ とおけばよい (5. 参照)。

ここでこれらの新座標を用いて、ある物体量 $f(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \varepsilon)$ が外部および内部領域でそれぞれ

$$\text{外部領域: } f \sim \sum_{i=1}^k \delta_i(\varepsilon) f_i(\xi, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) \quad (2)$$

$$\text{内部領域: } f \sim \sum_{i=1}^k \Delta_i(\varepsilon) F_i(\Xi, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) \quad (3)$$

のごとく展開されたとする。微分方程式として Navier-Stokes 方程式を予想しているばあいには、 f を速度ベクトルと考えてもよく、また速度の各成分や圧力と考えてもよい。したがって f, f_i, F_i はベクトルまたはスカラーである。 f_i, F_i に対する方程式は (2), (3) をもとの微分方程式に代入することによって得られるが、これをとくためには普通はじめに与えられた境界条件だけでは不足で、 f_i に対しては外部領域の内側の境界条件を、また F_i に対しては内部領域の外側の境界条件

を補足しなければならない。この補足すべき境界条件を決定する方法について考えてみよう。

展開 (2), (3) はおたがいに無関係になされるのではない。展開 (2) および (3) がともに有効な共通領域 (上記のようなばあいに、この領域が存在することについては iii) を参照) では、内部展開 (2) によって得られた f の値も外部展開によって得られた f の値も考慮せられた精度の範囲内において一致するように、展開が構成されねばならない。展開をこのように構成することを matching という。いま

$$\xi = \varepsilon^\gamma \bar{\xi}, \quad \alpha > \gamma > -\beta \quad (4)$$

で $\bar{\xi}$ を定義して、 $\bar{\xi} \sim O(1)$ の領域を共通領域であると考えよう (この妥当性についても iii) を参照)。

変換 (1) および (4) より

$$\xi = \varepsilon^{\alpha-\gamma} \bar{\xi}, \quad \Xi = \varepsilon^{-\gamma-\beta} \bar{\Xi} \quad (5)$$

であるから、共通領域 ($\bar{\xi} \sim O(1)$) では $\xi \ll 1$, $\Xi \gg 1$ と考えてよい。したがってこの領域で有効な級数解として、 $f_i(\xi, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ のときには $\xi \ll 1$ として展開された解を、 $F_i(\Xi, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ のときには $\Xi \gg 1$ として展開された解をもってくればよい。

いま $f_1(\xi, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ が

$$\left. \begin{aligned} f_1(\xi, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) &= 1a_1 + 1a_2 \xi + 1a_3 \xi^2 + \dots, \\ 1a_n &= 1a_n(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

のようなべき級数に展開されること、 $f_2, f_3, \dots, F_1, F_2, \dots$ もまたそれぞれ整数べきの級数に展開されること、および $\delta_1(\varepsilon) = 1$ を仮定しよう。このとき外部解および内部解はそれぞれ共通領域で、つぎのような級数解をもたねばならない。

$$\begin{aligned} f &\sim (\delta_1(\varepsilon) (1a_1 + 1a_2 \xi + 1a_3 \xi^2 + \dots) + \delta_2(\varepsilon) (2a_1 \xi^{-1} + 2a_2 \xi + 2a_3 \xi^2 + \dots) + \delta_3(\varepsilon) (3a_1 \xi^{-2} + 3a_2 \xi^{-1} + 3a_3 \xi + \dots) + \dots) \quad (7) \\ &\sim (\Delta_1(\varepsilon) (1A_1 + 1A_2 \Xi^{-1} + 1A_3 \Xi^{-2} + \dots) + \Delta_2(\varepsilon) (2A_1 \Xi + 2A_2 \Xi^2 + 2A_3 \Xi^3 + \dots) + \Delta_3(\varepsilon) (3A_1 \Xi^2 + 3A_2 \Xi^3 + 3A_3 \Xi^4 + \dots) + \dots) \quad (8) \end{aligned}$$

ここで $m a_n, m A_n$ ($m=1, 2, \dots; n=1, 2, \dots$) は $\bar{\eta}, \bar{\zeta}$ の関数で、ベクトルまたはスカラーである。(7), (8) を $\bar{\xi}$ で表示して同一の形となるためには、

$$\left. \begin{aligned} \delta_2(\varepsilon) &= \varepsilon^\nu, \quad \delta_3(\varepsilon) = \varepsilon^{2\nu}, \dots \\ \Delta_1(\varepsilon) &= 1, \quad \Delta_2(\varepsilon) = \varepsilon^\nu, \quad \Delta_3(\varepsilon) = \varepsilon^{2\nu}, \dots \\ \nu &= \alpha + \beta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

および

$$\left. \begin{aligned} 1a_1 &= 1A_1, \quad 1a_2 = 2A_1, \quad 1a_3 = 3A_1, \dots \\ 2a_1 &= 1A_2, \quad 2a_2 = 2A_2, \quad 2a_3 = 3A_2, \dots \\ 3a_1 &= 1A_3, \quad 3a_2 = 2A_3, \quad 3a_3 = 3A_3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

が成立しておればよい。展開 (7), (8) のように、 f_i, F_i が整数べきの級数に展開されるばあいには、(9), (10) を拡張して

$$\begin{aligned} \delta_n(\varepsilon) &= \Delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^{(n-1)\nu}, \quad m a_n = n A_m \\ (m=1, 2, \dots; n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる。

しかし一般に f_i, F_i は整数べきの級数で展開される

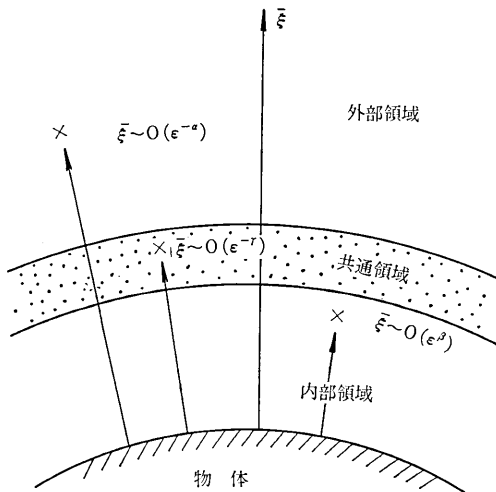


図1 外部、内部および共通領域

とは限らない。比較的よくでてくるのは対数関数である。このときには (11) のような一般法則は成立しないが、共通領域で両方の展開の解が一致するように解を構成してゆきさえすれば正しい漸近展開の解が得られる。そのとき $\delta_n(\varepsilon)$ または $\Delta_n(\varepsilon)$ のところに $\varepsilon^n \log \varepsilon$ のような形の項が入ってくるばあいが多い。

iii) 共通領域

共通領域の範囲は、(7)、(8)の展開がともにその領域内で漸近展開になっていることを要求すればきまる。級数(7)が $\varepsilon \rightarrow 0$ のときの漸近展開になるために必要な条件は、(7)に(5)、(9)を代入しかつ $\xi \sim O(1)$ とおけば、 $\gamma > -\beta$ であることがわかる。同様にして級数(8)が $\varepsilon \rightarrow 0$ のときの漸近展開であるために必要な γ の条件は $\alpha > \gamma$ である。したがって(4)で ξ を定義するとき、 $\alpha > \gamma > -\beta$ であるならば $\xi \sim O(1)$ の領域を共通領域と考えてよいことがわかる。

ここでいま共通領域として、(7)、(8)が平均して最も収束のよいところを選ぶとしよう。そのためには $\gamma = (\alpha - \beta)/2$ ととればよい。共通領域をこのように選んで、(7)、(8)の展開が n 項まで計算されたとき、 f としては $O(\varepsilon^n)$ まで(共通領域では $O(\varepsilon^{n/2})$ まで)正しい漸近展開の解が得られたことになる。

iv) 補足すべき境界条件

Navier-Stokes 方程式のように、 q, p のごとき物理量に対して2階の偏微分方程式のばあいを考える。さて f_1, F_1 のみたす微分方程式をとくためには、新しい境界条件を補足する必要がある。この境界条件は、共通領域での matching の結果から得られた関係式(10)を用いればよい。

たとえば物理的考察から f_1 が既知であるとしよう。このとき F_1 に対する補足境界条件は、(10)の $1a_1 = 1A_1$ を用いかつ共通領域として $\gamma = (\alpha - \beta)/2$, $\xi = 1$ を選んで

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon^{-\nu/2}: F_1 \rightarrow 1a_1 \tag{12}$$

を得る。ここで $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^{-\nu/2}$ を $\varepsilon \rightarrow \infty$ とおきかえても、このおきかえによって生ずる誤差は $O(\varepsilon^{\nu/2})$ と考えられるから、(12)のかわりに

$$\varepsilon \rightarrow \infty: F_1 \rightarrow 1a_1 \tag{13}$$

としてよい。(13)と最初から与えられた境界条件を用いて、 F_1 に対する方程式がとけ $1A_2$ が決定されたとしよう。このとき再び(10)を用いて、 f_2 に対する補足境界条件は

$$\xi \rightarrow 0: f_2 \rightarrow 1A_2 \xi^{-1} \tag{14}$$

となる。境界条件として(14)を補足して、 f_2 の方程式がとければ、つぎに F_2 に対する境界条件として

$$\varepsilon \rightarrow \infty: F_2 \rightarrow 1a_2 \varepsilon + 2a_2 \tag{15}$$

が得られる。ここで $1a_2 \varepsilon$ の項は境界条件として要求しなくても、方程式が正しくとけているときに自動的にみだされることが多く、普通境界条件として

$$\varepsilon \rightarrow \infty: [F_2]_0 \rightarrow 2a_2 \tag{16}$$

がえらばれる。ここで $[F_2]_0$ は F_2 を $\varepsilon \gg 1$ として展開したときに現われる ε^0 項 (ε によらない項)を表わすものとする。

このようにして、一つ方程式がとければ、その解を利用して新しい境界条件を作り、また別の方程式をとくという手順を繰り返して、

外部展開の第1近似 \rightarrow 内部展開の第1近似 \rightarrow 外部展開の第2近似 \rightarrow 内部展開の第2近似 \rightarrow の順にといてゆくことができる。なお内部展開の第1近似がはじめにわかることももちろんあるし、また上記のように規則的にことが進まないばあいもしばしばある。

3. Navier-Stokes 方程式

物体のまわりの縮まない流れの場を支配する方程式は Navier (1823), Stokes (1845) によって導出された Navier-Stokes 方程式である。

$$\frac{\partial \mathbf{q}^*}{\partial t} + \mathbf{q}^* \cdot \nabla \mathbf{q}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{q}^* + \mathbf{x}, \quad \nabla \cdot \mathbf{q}^* = 0 \tag{17}$$

ここで ρ は密度、 \mathbf{q}^* は速度ベクトル、 p^* は圧力、 μ は粘性率、 \mathbf{x} は体積力を表わす。

いま速度 U の一様流中に物体(代表的長さ l , 球ならば半径をとる)がおかれたばあいを考える。圧力 p^* はおそい流れでは $U\mu/l$ の order であり、はやい流れでは ρU^2 の order であることに注意して、つぎのように無次元変数を定義する。

$$\bar{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}^*}{U}, \quad \bar{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{l} \begin{cases} R_* \ll 1: \bar{p} = p^*/U\mu, \\ R_* \gg 1: \bar{p} = p^*/\rho U^2, \end{cases} \quad R_* = \frac{lU\rho}{\mu} \tag{18}$$

以下において体積力のない定常流を仮定する。このとき Navier-Stokes 方程式および境界条件はつぎようになる。

$$R_* \ll 1: \Delta \bar{\mathbf{q}} - \nabla \bar{p} = R_* \bar{\mathbf{q}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{q}}, \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} = 0 \tag{19}$$

$$R_* \gg 1: \bar{\mathbf{q}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{q}} + \nabla \bar{p} = (1/R_*) \Delta \bar{\mathbf{q}}, \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} = 0 \tag{20}$$

$$\bar{\mathbf{r}} \rightarrow \infty: \bar{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{i}, \quad \bar{p} \rightarrow \bar{p}_\infty; \quad \bar{\mathbf{r}} = f(\theta, \varphi): \bar{\mathbf{q}} = 0 \tag{21}$$

ここで \mathbf{i} は主流方向の単位ベクトルで、物体の形は球座標 $(\bar{r}, \theta, \varphi)$ を用いて $\bar{\mathbf{r}} = f(\theta, \varphi)$ で与えられるとした。

4. おそい流れ

おそい一様な流れの中に $\bar{\mathbf{r}} = f(\theta, \varphi)$ の形の3次元物体がおかれているとする。 $R_* \ll 1$ のばあいを考えて、(19)の解を普通の摂動法によって、すなわち $\bar{\mathbf{q}}, \bar{p}$ を R_* によりつぎのように展開して、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{q}} &= \bar{\mathbf{q}}_1(\bar{\mathbf{r}}) + R_* \bar{\mathbf{q}}_2(\bar{\mathbf{r}}) + R_*^2 \bar{\mathbf{q}}_3(\bar{\mathbf{r}}) + \dots \\ \bar{p} &= \bar{p}_1(\bar{\mathbf{r}}) + R_* \bar{p}_2(\bar{\mathbf{r}}) + R_*^2 \bar{p}_3(\bar{\mathbf{r}}) + \dots \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

とくことが試みられた。(22)を(19)、(21)に代入して

$$\Delta \bar{\mathbf{q}}_1 - \nabla \bar{p}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}_1 = 0 \tag{23}$$

$$\bar{\mathbf{r}} \rightarrow \infty: \bar{\mathbf{q}}_1 \rightarrow \mathbf{i}, \quad \bar{p}_1 \rightarrow \bar{p}_\infty; \quad \bar{\mathbf{r}} = f(\theta, \varphi): \bar{\mathbf{q}}_1 = 0 \tag{24}$$

$$\Delta \bar{\mathbf{q}}_2 - \nabla \bar{p}_2 = \bar{\mathbf{q}}_1 \cdot \nabla \bar{\mathbf{q}}_1, \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}_2 = 0 \tag{25}$$

$\bar{r} \rightarrow \infty: \bar{q}_2 \rightarrow 0, \bar{p}_2 \rightarrow 0; \bar{r} = f(\theta, \varphi): \bar{q}_2 = 0$ (26) が得られる. 方程式(23)は Stokes の方程式(1851)で, (24)の境界条件のもとに解がある. しかし(26)をみたす(25)の解は存在しないことが知られている ($\bar{r} = f(\theta, \varphi)$ が2次元物体であるときには \mathbf{q}_1 の解さえ存在しない. これを Stokes のパラドックスという).

現在のように3次元物体を仮定するとき, (22)のような展開では $\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ が何故うまく求まらないのであろうか, その理由について考えてみよう. そのために Stokes の方程式(23)を導出するときに仮定された

$$\Delta \bar{\mathbf{q}}_1 \gg R_e \bar{\mathbf{q}}_1 \cdot \nabla \bar{\mathbf{q}}_1 \quad (27)$$

が矛盾なくみたまされているかどうかを調べてみることにする. 境界条件(24)をみたす(23)の解は物体より遠くで

$$\bar{r} \gg 1: \bar{\mathbf{q}}_1 \sim \mathbf{i} + \frac{\alpha(\theta, \varphi)}{\bar{r}} + O\left(\frac{1}{\bar{r}^2}\right), \bar{p} \sim \frac{b(\theta, \varphi)}{\bar{r}^2} + O\left(\frac{1}{\bar{r}^3}\right) \quad (28)$$

の形をもつ. したがって $\bar{r} \gg 1$ で $\Delta \bar{\mathbf{q}}_1 \sim O(1/\bar{r}^3), R_e \bar{\mathbf{q}}_1 \cdot \nabla \bar{\mathbf{q}}_1 \sim O(R_e/\bar{r}^2)$ であるから, $\bar{r} \sim O(1/R_e)$ のとき

$$\Delta \bar{\mathbf{q}}_1 \approx R_e \bar{\mathbf{q}}_1 \cdot \nabla \bar{\mathbf{q}}_1 \quad (29)$$

となる. つまり $\bar{r} \sim O(1/R_e)$ の領域では仮定(27)が成立しないから, (22)の展開は適切でない. ここでこの領域を外部領域と考え, ここでは(18)と異なった適切な展開法を考えなくてはならない. また一方 $\bar{r} \sim O(1)$ のところでは(27)の仮定が成立し, (22)の展開が有効であると考えられる.

いまこの問題に2の方法を適用しよう. このとき曲線座標 $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$ としては球座標 (r, θ, φ) をえらび, $\varepsilon = R_e, \alpha = 1, \beta = 0$ ととればよい. 変換(1)にしたがって

$$\mathbf{r} = R_e \bar{\mathbf{r}}, \mathbf{R} = \bar{\mathbf{r}} \quad (30)$$

とおき, 外部および内部領域の座標としてそれぞれ (r, θ, φ) および (R, θ, φ) をとる.

つぎに外部領域でどのような展開が適切であるか考えてみよう. いま(28)から $\bar{r} \sim O(1/R_e)$ で

$$\bar{\mathbf{q}}_1 \sim \mathbf{i} + O(R_e), \bar{p}_1 \sim \bar{p}_\infty + O(R_e^2) \quad (31)$$

の性質をもつことがわかる. このことは $\bar{r} \sim O(1/R_e)$ における正しい展開すなわち外部展開において, 展開の初項 f_1 が一様流の状態を表わすことを予想させる(外部解においては慣性項を省略できない. このことは物理的には渦度の流れによる輸送を考慮に入れることになる. このような考慮は, 流れの状態が $\bar{r} \gg 1$ で一層一様流に近づくことを期待させる). そこで外部領域の展開は, (2), (9)を用いかつ $\varepsilon = R_e, \nu = 1$ において

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{i} + R_e \mathbf{q}_2(\bar{\mathbf{r}}) + R_e^2 \mathbf{q}_3(\bar{\mathbf{r}}) + \dots \\ \bar{p} &= \bar{p}_\infty + R_e p_2(\bar{\mathbf{r}}) + R_e^2 p_3(\bar{\mathbf{r}}) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

となる. また内部領域の展開は(3), (9)よりつぎのようになる.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{Q}_1(\mathbf{R}) + R_e \mathbf{Q}_2(\mathbf{R}) + \dots \\ \bar{p} &= P_1(\mathbf{R}) + R_e P_2(\mathbf{R}) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

いま外部解の第1近似は分っているから, 内部解の第

1近似 \mathbf{Q}_1, P_1 について考えてみる. 展開(33)を(19), (21)に代入して

$$\Delta \mathbf{Q}_1 - \nabla P_1 = 0, \nabla \cdot \mathbf{Q}_1 = 0 \quad (34)$$

$$R = f(\theta, \varphi): \mathbf{Q}_1 = 0 \quad (35)$$

が得られる. 方程式(34)をとくために必要な補足境界条件は, (13)において $1a_1 = \mathbf{i}$ または \bar{p}_∞ と考えて

$$R \rightarrow \infty: \mathbf{Q}_1 \rightarrow \mathbf{i}, P \rightarrow \bar{p}_\infty \quad (36)$$

となる. 方程式(34)は(23)と同一で, やはり Stokes の方程式であり, 境界条件(35), (36)をみたす解は $R \gg 1$ でつぎの性質をもつことが知られている⁶⁾.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &\sim \mathbf{i} - A \left(\frac{\hat{\mathbf{i}}}{R} + \frac{\hat{X} \mathbf{R}}{R^3} \right) + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \\ P_1 &\sim \bar{p}_\infty - 2A \frac{\hat{X}}{R^3} + O\left(\frac{1}{R^3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

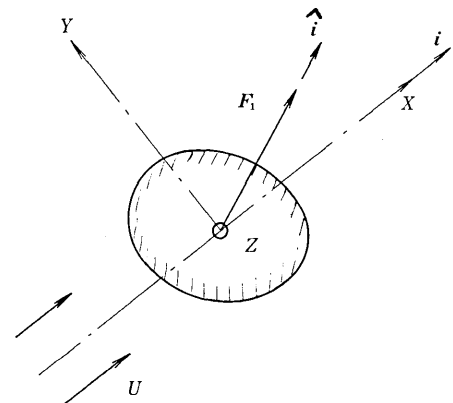


図2 Stokes の流れにおける主流と力の方向

図2に示されるように, \mathbf{i} は主流方向の, $\hat{\mathbf{i}}$ は働く力の方向の単位ベクトルで,

$$\hat{\mathbf{i}} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k} \quad (38)$$

をみたすとする. ここで $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は直角座標 (X, Y, Z) の座標軸方向の単位ベクトルである. また \hat{X} は

$$\hat{X} = lX + mY + nZ \quad (39)$$

で定義される. $R \gg 1$ のときの \mathbf{Q}_1, P_1 が(37)の形をしているとき, 物体に働く力 \mathbf{F}_1 は

$$\mathbf{F}_1 = 8\pi\mu U l A \hat{\mathbf{i}} \quad (40)$$

で与えられる⁶⁾.

つぎに外部展開の第2近似について考えてみよう. 展開(32)と変換(30)を(19), (21)に代入して, \mathbf{q}_2, p_2, p_3 に対する方程式および境界条件がつぎのように見出される.

$$\nabla^2 p_2 = 0 \quad (41)$$

$$r \rightarrow \infty: p_2 = 0 \quad (42)$$

$$\Delta \mathbf{q}_2 - \nabla p_3 - \frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial x} = 0, \nabla \cdot \mathbf{q}_2 = 0 \quad (43)$$

$$r \rightarrow \infty: \mathbf{q}_2 \rightarrow 0, p_3 \rightarrow 0 \quad (44)$$

ここで $x = R_e X$ である. 方程式(43)に対する補足境界条件は, (10), (14), (37)を用いて

$$r \rightarrow 0: \mathbf{q}_2 \rightarrow -A \left(\frac{\hat{\mathbf{i}}}{r} + \frac{\hat{x}\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (45)$$

となる。ここで上式の $\hat{x} = R \cdot \hat{X}$ である。

まづ方程式(41)および境界条件(42)より

$$p_2 = 0 \quad (46)$$

ときまる。つぎに境界条件(44), (45)をみたす(43)の解は Fourier 変換を使って求めることができる。方程式(43)の代りに

$$\Delta \mathbf{q}_2 - \Delta p_3 - \frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial x} = 8\pi A \delta(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{i}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{q}_2 = 0$$

を用いて, \mathbf{q}_2, p_3 の Fourier 変換された関数 $\tilde{\mathbf{q}}_2, \tilde{p}_3$ を求め逆変換してやればよい。このようにして得られた \mathbf{q}_2, p_3 は境界条件(44)をみたすとともに $r \rightarrow 0$ のとき t の展開形をもつ。

$$r \rightarrow 0: \left. \begin{aligned} \mathbf{q}_2 &\sim -A \left(\frac{\hat{\mathbf{i}}}{r} + \frac{\hat{x}\mathbf{r}}{r^3} \right) + A \left(\frac{1}{2} l \hat{\mathbf{i}} + \frac{3}{4} m \mathbf{j} + \frac{3}{4} n \mathbf{k} \right) \\ &\quad + A \left(-\frac{3}{4} \frac{\hat{x}}{r} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\hat{x}}{4r} \hat{\mathbf{i}} + \frac{l}{4} \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{x\hat{x}\mathbf{r}}{4r^3} \right) + O(r) \\ p_3 &\sim -2A \frac{\hat{x}}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

つぎに内部展開の第 2 近似 \mathbf{Q}_2, P_2 に対する方程式を考えて見よう。展開(33)を(19), (21)に代入して

$$\Delta \mathbf{Q}_2 - \nabla P_2 = \mathbf{Q}_1 \cdot \nabla \mathbf{Q}_1, \quad \Delta \cdot \mathbf{Q}_2 = 0 \quad (48)$$

$$R = f(\theta, \varphi): \mathbf{Q}_2 = 0 \quad (49)$$

が得られる。また補足すべき境界条件は(10), (16), (46) (47)より

$$R \rightarrow \infty: \left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_2 &\rightarrow \frac{1}{2} l A \hat{\mathbf{i}} + \frac{3}{4} m A \mathbf{j} + \frac{3}{4} n A \mathbf{k} \\ &\quad + A \left(-\frac{3}{4} \frac{X}{R} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\hat{X}}{4R} \hat{\mathbf{i}} + \frac{l\mathbf{R}}{4R} - \frac{X\hat{X}\mathbf{R}}{4R^3} \right) \\ P_2 &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

となる。ここで

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_{21} + \mathbf{Q}_{22}, \quad P_2 = P_{21} + P_{22} \quad (51)$$

とかいて, (48)~(50)をつぎのように分解しよう。

$$\Delta \mathbf{Q}_{21} - \nabla P_{21} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{Q}_{21} = 0 \quad (52)$$

$$R \rightarrow \infty: \left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_{21} &\rightarrow \frac{1}{2} l A \hat{\mathbf{i}} + \frac{3}{4} m A \mathbf{j} + \frac{3}{4} n A \mathbf{k}, \quad P_{21} \rightarrow 0 \\ R = f(\theta, \varphi): \mathbf{Q}_{21} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\Delta \mathbf{Q}_{22} - \nabla P_{22} = \mathbf{Q}_1 \cdot \nabla \mathbf{Q}_1, \quad \nabla \cdot \mathbf{Q}_{22} = 0 \quad (54)$$

$$R \rightarrow \infty: \left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_{22} &\rightarrow A \left(-\frac{3X}{4R} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\hat{X}}{4R} \hat{\mathbf{i}} + \frac{l\mathbf{R}}{4R} \right. \\ &\quad \left. - \frac{X\hat{X}\mathbf{R}}{4R^3} \right), \quad P_{22} \rightarrow 0 \\ R = f(\theta, \varphi): \mathbf{Q}_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

このように分解するとき, 方程式および境界条件の性質を調べることによって, \mathbf{Q}_{21}, P_{21} は流れの方向を逆転したとき逆転する部分, \mathbf{Q}_{22}, P_{22} は流れの方向を逆転し

ても全然変化しない部分となっていることがわかる。

3次元任意物体に働く力は, (52)~(55)をとくことによって決定されるが, 一般論をこれ以上すすめることはむづかしい。ここでは上式より簡単な結論をひきだすため物体の形に制限を加え, 『流れの方向を逆にしたとき, 物体に働く力も逆転するような物体』を考えることにする。このような物体では, 物体に働く力を考えて, \mathbf{Q}_{22}, P_{22} より誘起される部分は 0 でなければならぬ。したがって物体に働く力を問題にするときには \mathbf{Q}_{21}, P_{21} からの寄与のみを考えればよい。

いま速度 $U\mathbf{j}$ 圧力 p_∞ および速度 $U\mathbf{k}$, 圧力 p_∞ の一様流中にこの物体がおかれたときの Stokes 近似の速度, 圧力, 物体に働く力をそれぞれ $\mathbf{Q}_1', P_1', \mathbf{F}_1'$ および $\mathbf{Q}_1'', P_1'', \mathbf{F}_1''$ としよう。方程式(46)は Stokes の方程式であるから(52)~(54)をみたす解は

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_{21} &= \frac{1}{2} l A \mathbf{Q}_1 + \frac{3}{4} m A \mathbf{Q}_1' + \frac{3}{4} n A \mathbf{Q}_1'' \\ P_{21} &= \frac{1}{2} l A (P_1 - \bar{p}_\infty) + \frac{3}{4} m A (P_1' - \bar{p}_\infty) \\ &\quad + \frac{3}{4} n A (P_1'' - \bar{p}_\infty) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

となり, またこのとき物体に働く力 \mathbf{F}_2 は

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{2} l A \mathbf{F}_1 + \frac{3}{4} m A \mathbf{F}_1' + \frac{3}{4} n A \mathbf{F}_1'' \quad (57)$$

で与えられる。結局 Stokes の流れがとけているとき, すなわち $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_1', \mathbf{F}_1''$ が既知のとき, 物体に働く力は第 2 近似まできまって, つぎのようになる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \frac{R_c}{8\pi\mu Ul} \left(\frac{1}{2} F_{1X} \mathbf{F}_1 + \frac{3}{4} F_{1Y} \mathbf{F}_1' + \frac{3}{4} F_{1Z} \mathbf{F}_1'' \right) + \dots \quad (58)$$

ここで F_{1X}, F_{1Y}, F_{1Z} は \mathbf{F}_1 の (X, Y, Z) 成分である(抵抗法則(58)は Cester⁹⁾によって上記の方法とは若干異なる方法で得られた)。

さてここで Oseen 方程式の解と Navier-Stokes 方程式の解との相違について考えてみよう。両者の違いは非線形項にあるから, その違いは \mathbf{Q}_{22}, P_{22} ではじめて現われる。したがって \mathbf{Q}_{22}, P_{22} による力が寄与しない上記の物体では, 物体に働く力は第 2 近似までを考慮して両方の解は同一結果を与えることになる。

抵抗式(58)は $\mathbf{i} = \hat{\mathbf{i}}$ であるとき(前後対称な軸対称物体が軸方向に流れをうけるとときや楕円体が主軸方向に流れをうけるとときなど), とくに簡単に

$$\mathbf{F} = \left(1 + \frac{F_1}{16\pi\mu Ul} R_c + \dots \right) \mathbf{F}_1 \quad (59)$$

となる。ここで \mathbf{F}_1 は Stokes の流れにより生ずる抵抗で, 半径 l の球のときには $6\pi\mu Ul \mathbf{i}$ とおけばよい。

上にのべられた Matched Expansion 法で最も高い精度まで計算されているのは球のばあいである。球の抵抗 D は Kaplun & Lagerstrom³⁾, Proudman &

Pearson⁵⁾ によってそれぞれ独立に $R_e^2 \log R_e$ の order まで, Chester & Breach⁷⁾ によって $R_e^3 \log R_e$ まで得られている. 後者によって得られた抵抗 D はつぎのようになる.

$$D = 6\pi\mu U l \left[1 + \frac{3}{8} R_e + \frac{9}{40} R_e^2 \left(\log R_e + \gamma + \frac{5}{2} \log 2 - \frac{323}{360} \right) + \frac{27}{87} R_e^3 \log R_e \right] \quad (60)$$

ここで γ は Euler の定数である. なおこの式には $R_e^2 \log R_e$, $R_e^3 \log R_e$ の項が含まれている. これは内部解の共通領域で有効な級数解 ((8) の F_3, F_4 のところ) に対数関数が現われ, そのための (9) ような標準形では matching がうまくゆかず, これらの項が付加される必要があったためである.

Navier-Stokes 方程式 (17) において, 体積力があるばあいには, 基礎方程式が (19) より複雑となる. しかしこのようなばあいにも Matched Expansion 法は大変有効で, 3次元任意物体や球のまわりのおそい流れについて, 体積力として Lorentz 力 (電磁流体)^{8),9)} Coriolis の力 (回転流体)¹⁰⁾, 浮力 (成層流体)^{11),12)}, 浮力と Coriolis の力 (成層回転流体)¹³⁾ をもつばあいがこの方法でいろいろ研究されている.

5. はやい流れ

一様なはやい流れすなわち Reynolds 数 R_e の大きい流れのなかに, 3次元または2次元の任意物体がおかれているばあいを考える. 物体の形はおそい流れのときと同じように球座標 $(\bar{r}, \theta, \varphi)$ を用いて, $\bar{r} = f(\theta, \varphi)$ で表わす. ただし2次元物体のときには球座標を円柱座標によみかえることとする. 普通の摂動法に従って, (20), (21) の解をつぎのように $1/R_e$ で展開して求めよう.

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= \bar{q}_1(\bar{r}) + (1/R_e) \bar{q}_2(\bar{r}) + \dots \\ \bar{p} &= \bar{p}_1(\bar{r}) + (1/R_e) \bar{p}_2(\bar{r}) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

展開 (61) を (20), (21) に代入して, まず \bar{q}_1, \bar{p}_1 に対する方程式および境界条件が決定される.

$$\bar{q}_1 \cdot \nabla \bar{q}_1 + \nabla \bar{p}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \bar{q}_1 = 0 \quad (62)$$

$$\bar{r} \rightarrow \infty: \bar{q}_1 \rightarrow \mathbf{i}, \quad \bar{p}_1 \rightarrow \bar{p}_\infty; \quad \bar{r} = f(\theta, \varphi): \bar{q}_1 = 0 \quad (63)$$

完全流体の方程式としてよく知られている (62) 式は, Navier-Stokes 方程式と比較して $\Delta \bar{q}_1/R_e$ が省略されている. その結果この方程式は Navier-Stokes 方程式と比較して方程式の階数がさがり, 境界条件 (63) を完全にみたすことができなくなる. このため (62) 式は, 物体上で $q_n = 0$ の条件でとかれていて, とかれた解は表面で $q_i \neq 0$ の性質をもつ (ここで q_n, q_i は表面に直角および接線方向の速度を表わす). いま物体表面で境界条件 (63) が要求されるとき, 表面に接して速度の不連続, すなわち強さ ∞ の渦度層があることになる. この渦度層は粘性によって拡散し, ある厚さ δ になつておちつく. この厚さ δ は粘性項と慣性項がつり合うという条

件から, $\delta/l \sim O(R_e^{-1/2})$ にきまる. このような領域は境界層とよばれ, この領域では粘性項の省略を前提とした展開 (61) は正しくなく, 新しい展開が必要となる. すなわちこの領域が内部領域を構成し, この境界層の外側が外部領域を構成する.

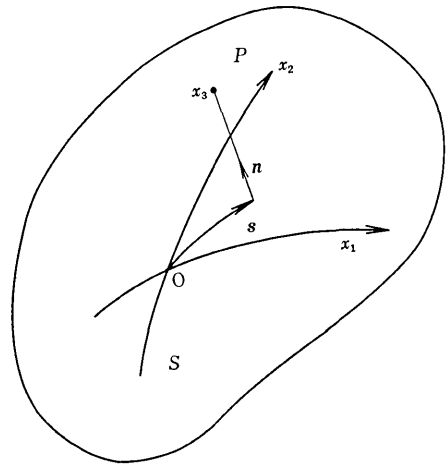


図3 内部領域を取扱うための座標系

いま内部領域を取扱うために適した座標系について考えて見よう. 図3のように原点を物体表面上にとり, P 点の位置 \bar{r} は

$$\bar{r} = s(x_1, x_2) + x_3 \mathbf{n}(x_1, x_2) \quad (64)$$

で表わす. なお \mathbf{n} は P から表面に下した垂線の方向の単位ベクトル, \mathbf{s} は表面 S 上の位置を表わすベクトル, (x_1, x_2) は直交曲線座標である.

さてここで, この問題に 2 の方法を適用しよう. 内部および外部領域を特徴づける座標 \bar{x} は x_3 であり, また $\varepsilon, \alpha, \beta$ はそれぞれ $\varepsilon = 1/R_e$, $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$ ととればよい. 変換 (1) にしたがって

$$X_3 = R_e^{1/2} x_3 \quad (65)$$

とおけば, (x_1, x_2, X_3) が内部領域を表わす新座標となる. なお外部領域は $\bar{r} \sim O(1)$ の領域であるから, (x_1, x_2, x_3) で表わしてもよく, また物体の形に応じて別の座標系を用いてもよい. しかし共通領域では matching のために (x_1, x_2, x_3) が使用されるべきである.

つぎに各領域で適切な展開について考えてみよう. 外部領域の展開は \mathbf{q}, \mathbf{p} に対し (2), (9) を適用しかつ $\varepsilon = 1/R_e$, $\nu = 1/2$ とおいて

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}_1 + R_e^{-1/2} \mathbf{q}_2 + R_e^{-1} \mathbf{q}_3 + \dots \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_1 + R_e^{-1/2} \mathbf{p}_2 + R_e^{-1} \mathbf{p}_3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

が得られる. また内部領域の展開は, \mathbf{q} の (x_1, x_2, x_3) 成分 u, v, w および \mathbf{p} に対し, (3), (9) を適用して

$$\left. \begin{aligned} u &= U_1 + R_e^{-1/2} U_2 + \dots \\ v &= V_1 + R_e^{-1/2} V_2 + \dots \\ w &= W_1 + R_e^{-1/2} W_2 + \dots \\ \mathbf{p} &= \mathbf{P}_1 + R_e^{-1/2} \mathbf{P}_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

となる.

ここでまず内部解の W_1 について考えてみる。いま内部領域で w がどの程度の order の量であるかを調べてみる。連続の方程式より $\partial w/\partial x_3 \sim O(1)$ が得られ、つぎにこの式を x_3 で積分しかつ $x_3=0$ で $w=0$ を用いることによって、内部領域で $w \sim O(R_*^{-1/2})$ であることが分る。したがって

$$W_1=0 \tag{68}$$

が決定される。

つぎに外部解 q_1, p_1 のみたす方程式および境界条件を調べてみよう。方程式(66)を(20), (21)に代入して

$$q_1 \cdot \nabla q_1 + \nabla p_1 = 0, \quad \nabla \cdot q_1 = 0 \tag{69}$$

$$r \rightarrow \infty: q_1 \rightarrow i, \quad p_1 \rightarrow \bar{p}_\infty \tag{70}$$

が得られる。ここで $r = \bar{r}$ とおいた、方程式(69)に対する補足境界条件は、 w を(7), (8)の f と考え、(10)を適用して(このとき $1A_1=0$ である)、

$$x_3 \rightarrow 0: w \rightarrow 0 \text{ or } r \rightarrow f(\theta, \varphi); \quad q_n \rightarrow 0 \tag{71}$$

となる。方程式(69)は境界条件(70), (71)のもとに、解が決定される。速度 q_1 の (x_1, x_2, x_3) 成分を u_1, v_1, w_1 とするとき、これらの速度成分は物体付近(共通領域)で通常のばあいつぎのようなべき級数で展開されてよい。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &\sim 1a_1 + 1a_2 x_3 + O(x_3^2) \\ v_1 &\sim 1b_1 + 1b_2 x_3 + O(x_3^2) \\ w_1 &\sim 1c_2 x_3 + O(x_3^2) \end{aligned} \right\} \tag{72}$$

また q は渦無し ($\text{rot } q=0$) であるから、 p_1 は Bernoulli の定理より

$$p_1 \sim \bar{p}_\infty + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1a_1^2 + 1b_1^2) - (1a_1 1a_2 + 1b_1 1b_2)x_3 + O(x_3^2) \tag{73}$$

で与えられる。ここで $1a_1, 1a_2, 1b_1, 1b_2, 1c_2$ はいづれも x_1, x_2 の関数であり、また $1a_1, 1b_1$ は完全流体の力学における表面速度の (x_1, x_2) 成分である。

つぎに問題となるのは、内部解 U_1, V_1, W_2, P_1 であるから、これらに対する方程式を求めよう。Navier-Stokes 方程式(20)を曲線座標 (x_1, x_2, x_3) でかいて、これらの式に(65), (67)を代入し、 $O(1)$ の項をのこすとき¹⁾,

$$\left. \begin{aligned} &\frac{U_1}{h_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{V_1}{h_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + W_2^2 \frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{U_1 V_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ &\quad - \frac{V_1^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial X_3^2} \\ &\frac{U_1}{h_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{V_1}{h_2} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + W_2^2 \frac{\partial V_1}{\partial X_3} - \frac{U_1^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ &\quad + \frac{U_1 V_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial P_1}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial X_3^2} \\ &\frac{\partial P_1}{\partial X_3} = O(R_*^{-1/2}) \\ &\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 U_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 V_1) \right\} + \frac{\partial W_2}{\partial X_3} = 0 \\ &h_1 = \left| \frac{\partial s}{\partial x_1} \right|, \quad h_2 = \left| \frac{\partial s}{\partial x_2} \right| \end{aligned} \right\} \tag{74}$$

が得られる。方程式(74)は境界層方程式としてよく知られていて、物体上の境界条件は

$$X_3=0: U_1=V_1=W_2=0 \tag{75}$$

である。また補足境界条件は、(13)の F_1 を U_1 , または V_1 , または P_1 と考えて

$$X_3 \rightarrow \infty: U_1 \rightarrow 1a_1, \quad V_1 \rightarrow 1b_1, \quad P_1 \rightarrow \bar{p}_\infty + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1a_1^2 + 1b_1^2) \tag{76}$$

となる。境界層方程式(74)の解は、いろいろの形の物体に対し、境界条件(75), (76)のもとに解析的または数値的に研究されている。ここではさらに一般的議論をすすめるために、 U_1, V_1, W_2 の壁より遠い点での性質に注目してみよう。方程式(74)が(75), (76)のもとにとかれたとき、 U_1, V_1, W_2 は $X_3 \gg 1$ でつぎの形をもつ。

$$\left. \begin{aligned} U_1 &\sim 1a_1 + EDF \\ V_1 &\sim 1b_1 + EDF \\ W_2 &\sim 2C_1 X_3 + 2C_2 + EDF \end{aligned} \right\} \tag{77}$$

ここで EDF は $X_3 \gg 1$ のとき指数関数的に 0 に近づく項を意味する。上式において代数関数的に 0 に近づく項が存在しないことは境界層方程式の一つの特徴である。この理由はつぎのようにして説明される。

外部展開(66)の第1近似および第2近似は渦なしであるため $\Delta q_1=0$ と $\Delta q_2=0$ が成立する。前者の条件から q_3 もまた渦なしとなる。同様の議論をくり返して、結局外部解は渦なしの流れとなる。いま内部解の渦度 ($\text{rot } q$) を考えて、もしこの渦度が $X_3 \gg 1$ において代数関数的に減少する項を含むとすると、この項と外部解との matching を考えねばならない。ところが外部解は渦なしであるからこの matching は不可能である。したがって内部解の渦度は $X_3 \gg 1$ で指数関数的に減少しなければならない。渦度についてのこの要求をみたすためには、(77)に代数関数的に減少する項があってはならない。

以上の議論から速度の壁より遠くでの漸近形に、代数関数的に減少する項があってはならないことがわかるが、外部解に渦があるとき、たとえば粘性境界層の外側に磁気境界層があるときなどには、(77)のような漸近形をもたなくてもよいことに注意する必要がある。

つぎにさらに展開をするために、外部解の第2近似 q_2, p_2 について考えてみよう。展開(66)を(20), (21)に代入して

$$q_2 \cdot \nabla q_2 + q_2 \cdot \nabla q_1 + \nabla p_2 = 0, \quad \nabla \cdot q_2 = 0 \tag{78}$$

$$r \rightarrow \infty: q_2 \rightarrow 0, \quad p_2 \rightarrow 0 \tag{79}$$

が得られる。補足すべき境界条件は第1近似のばあいと同じように w の matching を考えることによって決定される。まず(10), (72), (77)を考慮して、 $1c_2=2C_1$ が成立せねばならないことがわかる。しかしこの条件は(72)も(77)もともに連続の方程式を満足していなければならないという要請から自動的に満足される。必要な境界条

件は, (10) の $2a_2=2A_2$ を用いてつぎのようにきまる.

$$x_3 \rightarrow 0: w_2 \rightarrow 2C_2 \text{ or } r \rightarrow f(\theta, \varphi): q_{2n} \rightarrow 2C_2 \quad (80)$$

このようにして q_n, p_2 は境界条件(79), (80)のもとに(78)をとくことによって決定され, この解の $x_3 \rightarrow 0$ の展開形がきまると, さらに内部群の第2近似へと進むことができる.

しかし球や楕円体のような有限の大きさの物体では, (i)流れの剥離がある. (ii)境界層方程式をとくことがむづかしい. (iii)境界層方程式の解だけで相当に役に立つなどの理由から, 第1近似(境界層方程式)までしか研究されていない. たとえば球のばあいには, この方程式は前方よどみ点からの距離で展開する方法などでとかれ, 壁に働く粘性抵抗や剥離点の位置などが決定されている¹⁾. 上記のような展開法で第2近似を研究するためには, そのまわりの流れが剥離しないような物体であることが望ましい. このような物体として下流に無限に拡がる放物体や半無限平板などが考えられる. とくに一様流中におかれた半無限平板のまわりの流れは, その幾何学的境界条件の簡単さも原因して, 最もよく研究されている. すなわちまず Blasius によって第1近似がとかれ¹⁾, つづいて Goldstein¹⁴⁾, 今井¹⁵⁾によっておのおの独立に, 放物座標を用いて第2近似(展開(67))における $O(R_e^{-1/2})$ の項は半無限平板のばあい幸いにも 0 となる, $O(R_e^{-1})$ の項および $O(R_e^{-1} \log R_e)$ の項がとかれた. しかし平板先端のごく近傍だけは(66), (67)のような展開法による解の適用範囲外にあり, したがってこの先端部分まで含めて有効な解析解を見出すというむづかしい問題が残されているように思われる.

6. む す び

2で Matched Expansion 法の概要が説明された. この Matched Expansion 法は流体力学の分野では, Reynolds 数が小さいかまたは大きいときの粘性流体の定常問題, 翼理論, 波の伝播の理論, 経過時間が小さいかまたは大きいときの粘性流体の非定常問題などに適用され, 多くの成功をおさめた. ここでは実際にとかれた多くの例について説明するのではなく, もっとも代表的と思われる二つの例, すなわち3次元任意物体が一様なおそい流れまたははやい流れのなかにおかれたばあいについて, 内外両領域における適切な展開, 共通領域における matching, その結果としての境界条件の決定に重点をおいて, なるべく詳しく解説した. この方法によ

てとかれた, 流体力学の分野における他の例については文献(16), (17)にいろいろ解説されているから, これらの文献を参照されたい.

(1973年3月29日受理)

参 考 文 献

- 1) L. Rosenhead: *Laminar Boundary Layer* (Oxford, 1963)
- 2) S. Kaplun: *Low Reynolds number flow past a circular cylinder*. *J. Math. Mech.* **6** (1957), 595
- 3) S. Kaplun and P.A. Lagerstrom: *Asymptotic expansions of Navier-Stokes solutions for small Reynolds numbers*. *J. Math. Mech.* **6** (1957), 585
- 4) P.A. Lagerstrom & J.D. Cole: *Examples illustrating expansion procedures for the Navier-Stokes equations*. *J. Rat. Mech. Anal.* **4** (1955), 817
- 5) J. Proudman & J.R.A. Pearson: *Expansions at small Reynolds numbers for flow past a sphere and a circular cylinder*. *J. Fluid Mech.* **2**(1957), 237
- 6) I. Imai: *Some applications for function theory of fluid dynamics*, The 2nd International ISME Symposium Fluid Machinery and Fluidics, Tokyo, Sept. 1972; 2, 15
- 7) W. Chester & D.R. Breach: *On the flow past a sphere at low Reynolds number*, *J. Fluid Mech.* **37** (1969), 751
- 8) J.D. Chang: *Stokes flow of a conducting fluid past an axially symmetric body in the presence of a uniform magnetic field*, *J. Fluid Mech.* **9** (1960), 473
- 9) W. Chester: *On Oseen's approximation*, *J. Fluid Mech.* **13** (1962), 557
- 10) S. Childress: *The slow motion of a sphere in a rotating, viscous fluid*. *J. Fluid. Mech.* **20**(1964), 305
- 11) 成瀬文雄: 成層流体中の球のおそい運動と特異摂動法数理解析研究所講究録 163 (1972), 146
- 12) 成瀬文雄: 成層粘性流体中の球の斜め運動, 日本物理学会分科会講演予稿集 4, 101 (1972.4)
- 13) 成瀬文雄・西島勝一: 成層回転流体中をすすむ球のおそい運動, 日本物理学会第27回年会予稿集, 4, 91 (1972.10)
- 14) S. Goldstein: *Flow of an incompressible viscous fluid along a semi-infinite flat plate*. *Tech. Rep. Eng. Res. Inst. Univ. Calif. No. HE-150-144*(1956)
- 15) I. Imai: *Second approximation to the laminar boundary layer flow over a flat plate*. *J. Aero. Sci.* **24** (1957), 155
- 16) Van Dyke: *Perturbation Methods in Fluid Mechanics* (Academic, New York 1964)
- 17) J.D. Cole: *Perturbation Methods in Applied Mathematics* (Blaidell Publishing, Waltham, Massachusetts, 1968)