研　究　速　報
UDC 656. 1. 057. 3-52 : 681. 323

# 交通流の経路指定のための最適配分アルゴリズム

Algorithm for the Optimal Assignmen of Vehicle Traffic

浜　田　　喬*・藤　田　一　彦*
Takashi HAMADA and Kazuhiko FUJITA

## 1. ま え が き

交通需要の増加によって引き起されている道路上の車の混雑，渋滞を緩和するために，現在では，信号機の系統的制御などが行なわれている．しかし，一方，車の需要は，近い将来には，流入制限等の強制的規制，あるいは，自動車に代わる新交通システムを導入しなければならない程，著しく増加してきている．ところが，このような方策を採り入れることができるのは，比較的遠い将来であると考えられ，現状では，他の手段で解決しなければならない問題が多数残されている．ここでは，現存する道路をより有効に利用して交通渋滞を緩和することを目的とした．交通流最適配分についての一つのアルゴリズムを示し，合わせて，数値計算を行なった結果を報告する．

## 2. 道路網の表現

ここで述べる最適配分とは，路上を走行する車に経路指定を行ない，特定の道路に車が集中して渋滞が起るのを防ぐために，強制配分を行なうものである．このような問題を数値計算によって解くので，道路網を車の走行する方向をそのリンクの方向と定めた．

リンク数 $l$，節点数 $n$

の方向性ネットワークで表現することにし，これを接続行列，$A=(a_{ij})$ で表わす．このとき，接続行列 $A$ の内容は以下のように定義される．

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 : \text{リンク } j \text{ が節点 } i \text{ から出ているとき} \\ -1 : \text{リンク } j \text{ が節点 } i \text{ に入っているとき} \\ 0 : \text{リンク } j \text{ と節点 } i \text{ とが，直接接続されていないとき} \end{cases}$$

以上の定義によると，例えば，図1のような道路網の接続行列は，次式で表わされる．

$$\begin{array}{c} \longleftarrow l \longrightarrow \\ \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \end{array}$$
$$A=\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\ n \qquad (1)$$

このとき，$A$ は $n$ 行 $l$ 列の行列となるが，その階数は，$n-1$ であるので，以後 $A$ の $n$ 行目を除いたものを $A$ と書くことにする．

* 東京大学生産技術研究所　第3部

## 3. 交通流に関する条件式

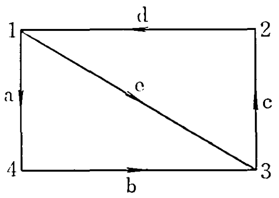



図1

この報告で扱う問題では，各車は，OD(Origin and Destination)情報を持っていると仮定しているが，ここで，この OD を満足する条件式について検討する．

今，目的地が $R$ ケ所ある道路網について，出発地 $i$ から目的地 $r$ に向う交通量を $q_{ir}$，節点 $i$ における目的地 $r$ に向う車の湧き出し量を $g_{ir}$ で表わすと，これらの間には，次の関係が成立する．

$$g_{ir}=q_{ir} \quad (i\neq r \text{ のとき}) \qquad (2)$$

$$g_{rr}=-\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq r)}}^{n} g_{ir} \quad (i=r \text{ のとき}) \qquad (3)$$

また，リンク $j$ において目的地 $r$ に向う交通量を $y_{jr}$，リンク $j$ の総交通量を $x_j$ とすると，$x_j$ と $y_{jr}$ との間には，

$$x_j=\sum_{r=1}^{R} y_{jr} \qquad (4)$$

が成立する．

ここで一つの節点 $i$ について考えると，同一目的地 $r$ に対し，節点 $i$ から流れ出す交通量と，節点 $i$ に流れ込む交通量の差が，この節点における湧き出し量 $g_{ir}$ に等しいので，

$$\boldsymbol{g}_r=(g_{1r}, g_{2r}, \cdots, g_{(n-1)r})^T \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{y}_r=(y_{1r}, y_{2r}, \cdots, y_{lr})^T \qquad (6)$$

とおき，前述の接続行列 $A$ を導入すると，目的地ごとに

$$A\cdot\boldsymbol{y}_r=\boldsymbol{g}_r \quad (r=1\sim R) \qquad (7)$$

$$y_{jr}\geqq 0 \quad (j=1\sim l, r=1\sim R) \qquad (8)$$

が成り立ち，これらは OD を満足するための必要十分条件になっている．

## 4. 評 価 関 数

最適配分量を決定する際の基準となる評価関数としては，この報告では，道路網全体で生じる総走行所要時間をとることにする．また交通量対走行所要時間特性については，種々のモデルが考えられるが，信号機による待合せ時間等を考慮して，図2のような下に凸な曲線を用

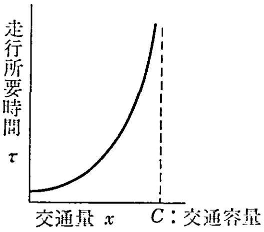



図2

いるのが妥当である．

ここで，リンクにおける走行所要時間は，リンクの交通量 $x_j$ の関数として，$x_j$ によって一義的に定まるものと仮定して，$\tau_j(x_j)$ で表わすと，評価関数である総走行所要時間 $F$ は，

$$F=\sum_{j=1}^{l} x_j\cdot\tau_j(x_j) \tag{9}$$

で与えられ，リンクの交通容量を $C_j$ とすると，同時に次式が満足されていなければならない．

$$0\leqq x_j=\sum_{r=1}^{R} y_{jr}\leqq C_j \tag{10}$$

### 5.　最適配分量を求めるアルゴリズム

以上述べてきたことをまとめると，最適配分量を求める問題は，(7)，(8)および (10) 式で表わされる線形制約条件のもとで，(9)式で与えられる評価関数を最小とする $y_{jr}$ を求める問題に帰着される．そこで，この問題を許容方向法によって，以下の手順で求めることにする．

手順1：(7)，(8)，(10)式で表わされる制約条件を満す，配分量の適当な初期値 $\{y_{jr}\}$ を求める．

手順2：手順1と同じ制約条件のもとで，$\{y_{jr}\}$ を変化させ，評価関数 $F$，すなわち $\{y_{jr}\}$ を最急に減少させる方向係数を求める．

手順3：手順2で求めた方向係数に従って $\{y_{jr}\}$ を変化させるきざみ $h$ を決定し，$\{y_{jr}\}$ の修正値 $\{y_{jr}'\}$ を求める．

この場合，手順1で与える初期値は，制約条件さえ満足していれば，いかなる値でもよいはずであるが，実際には手順2，3を収束するまで繰返すので，収束を早めるために，最適値に近い値を設定する方が望ましい．ここでは，(9) 式中の $\tau_j(x_j)$ を定数 $P_j$ で近似し，評価関数を

$$F^*=\sum_{j=1}^{l} P_j\cdot x_j \tag{11}$$

で表わして，これを最小にする配分量を初期値とした．(11)式は一次式であるため，初期値は原理的には LP を解くことによって求めることができる．しかしこれを一つの LP 問題とすると，制約条件式 (7)，(8) が各目的地ごとに独立となるのに対し，(10) 式は各目的地ごとには分離できないので，目的地数が多くなると膨大な LP を解かなければならなくなる．そこで，ここでは，(10)式の代わりに，

$$\begin{cases} 0\leqq y_{j1}\leqq C_j(1-\varepsilon) & (r=1\text{ のとき}) \\ 0\leqq y_{jr}\leqq C_j(1-\varepsilon)-\sum\limits_{k=1}^{r-1} y_{jk} & (r\geqq 2\text{ のとき}) \end{cases} \tag{12}$$

を用いて，最初に一つの目的地に対する配分量を求め，リンクの容量からこの値を差し引いた値を，改めてリンクの容量として，$R$組の連立方程式を独立に順次解いてゆくことで，この問題を解決した．ただし，(12)式中の $\varepsilon$ は，正の定数であり，初期値を交通容量以下の値に制限するために使用している。

さらに，このような手法を用いる場合に，目的地をどのような順序で選んで解くかによって，解が求まらないことが起りうる．そこで，各目的地に任意の優先順位を付け，この順位に従って初期値を求めてゆき，ある目的地について解が求まらなくなったら，その目的地を最優先にして，改めて解を求め直すことにした．

手順2において，評価関数 $F$ を最も減少させる方向に $\{y_{jr}\}$ を変化させる方向係数を $\{d_{jr}\}$ で表わす．このとき $d_{jr}$ は便宜上

$$-1\leqq d_{jr}\leqq 1 \tag{13}$$

の範囲にあるとし，ベクトル $\boldsymbol{d}_r$ を次式で定義する．

$$\boldsymbol{d}_r=(d_{1r}, d_{2r}, \cdots, d_{lr})^T \tag{14}$$

また $\{y_{jr}\}$ を修正するときのきざみを $h$ とすると，(7)式は修正後には

$$A\cdot(\boldsymbol{y}_r+h\cdot\boldsymbol{d}_r)=\boldsymbol{g}_r \tag{15}$$

となり，修正する際には，次式が成立しなければならない．

$$A\cdot\boldsymbol{d}_r=0 \tag{16}$$

一方，$\boldsymbol{y}_r+h\cdot\boldsymbol{d}_r\geqq 0$ の条件から，$y_{jr}=0$ である $j$，$r$ については，

$$0\leqq d_{jr}\leqq 1 \tag{17}$$

が成立する．

以上によって方向係数 $\boldsymbol{d}_r$ を求める問題は，(13)あるいは (17) 式と，(16)式で表わされる制約条件のもとで，

$$Z=\sum_{j=1}^{l}\sum_{r=1}^{R}\frac{\partial F}{\partial y_{jr}}\cdot d_{jr}=\sum_{r=1}^{R}\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial\tau_j(x_j)}{\partial x_j}\cdot d_{jr} \tag{18}$$

を最小にする $d_{jr}$ を求める問題となり，これは手順1と同様に LP 問題として解くことができる．なお，(13)式は非負の条件を満していないが，$d_{jr}$ の範囲を変換することは容易に行ない得る．

次に，手順3で新しい配分量 $y_{jr}'=y_{jr}+h\cdot d_{jr}$ を決定するときのきざみ$h$について考えることにする．この $h$ の範囲は，$y_{jr}'$ に関する2つの制限式，

$$0\leqq y_{jr}'=y_{jr}+h\cdot d_{jr} \tag{19}$$

$$\sum_{r=1}^{R} y_{jr}'=\sum_{r=1}^{R}(y_{jr}+h\cdot d_{jr})\leqq C_j \tag{20}$$

から，次式によって与えられる．

$$0 \leqq h \leqq h_c = Min(h_1, h_2) \tag{21}$$

ただしここで，$h_1$, $h_2$ は次のように定義されるものとする．

$$h_1 = \{d_{jr} < 0 \text{ である } j,\ r \text{ について，} -y_{jr}/d_{jr} \text{ の最小値}\} \tag{22}$$

$$h_2 = \left[\sum_{r=1}^{R} d_{jr} > 0 \text{ である } j \text{ について，} \left(C_j - \sum_{r=1}^{R} y_{jr}\right) \Big/ \sum_{r=1}^{R} d_{jr} \text{ の最小値}\right] \tag{23}$$

この範囲内における $h$ の最適値は，

$$f(h) = F(\{y_{jr} + h \cdot d_{jr}\}) \tag{24}$$

を最小にする $h$ であり，次式の根によって与えられる．

$$f'(h) = df(h)/dh = 0 \tag{25}$$

このような $h$ の値は，その取り得る範囲が規定され，また，明らかに，$f'(0) \leqq 0$, $f'(h_c) \geqq 0$ であるので，いわゆる区間二分法によって，数値的に求めることができる．

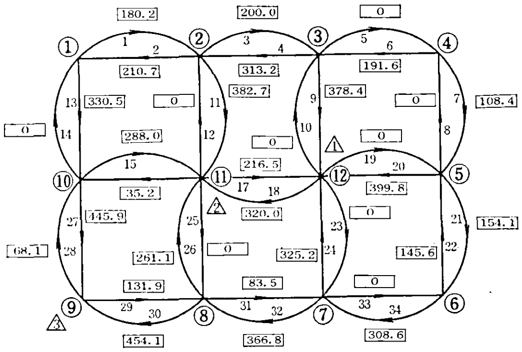
以上のように，手順1から始めて，手順2，手順3を繰返し，$h$ の値が十分小さくなったときの $\{y_{jr}'\}$ が，求める最適値となる．

## 6. 数値計算例

ここには，リンク数 34，節点数 12，目的地数3の道路網における最適配分計算結果を，図3に示す．計算時間は，収束条件を $h<0.1$ として，FACOM 270-30 を使用して約 12 分であった．

## 7. あとがき

以上に述べた，交通流配分の手法を実現するに当っては，運転者に対する経路指定，OD 情報の正確な収集などに関する技術的問題が残されているが，計算機を中心とした大規模なシステムの導入によりこれを解決することが期待される．またアルゴリズムについても，非定常的な時間的変化に対する追随の問題などがあるが，これらについてはアルゴリズムの改良と，シミュレータによる解析等によって実用的な制御手法が確立できるものと考えられる．




$C_j$: 各リンクの容量

$\beta_j$: 各リンクの自由走行時間　$\tau_j(x_j) = \dfrac{C_j \beta_j}{C_j - x_j}$

$G_{i,r}$: 節点 $i$ における目的地 $r$ に対する交通量

$n$: リンク

ⓝ: 節点　$P_j = \beta_j$

△: 目的地

□: 最適配分交通量

$C_j = 800 \quad (j = 1 \sim 34)$

$\beta_j = 100 \quad (j = 1 \sim 34)$

$G_{12,1} = -1,000 \qquad G_{12,2} = G_{12,3} = 0$

$G_{11,2} = -1,000 \qquad G_{11,1} = G_{11,3} = 0$

$G_{9,3} = -900 \qquad G_{9,1} = G_{9,2} = 0$

この他の節点については，$G_{i1} = G_{i2} = G_{i3} = 100$

図 3

(1973年1月30日受理)

正　誤　表　(3月号)

| 頁 | 段 | 行 | 種 別 | 正 | 誤 |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 右 | 11 | 速 報 | Cooperation | Cooporation |
| 26 | 標 題 | | 〃 | 矯正機の支点数が… | 矯正機支点配置が… |