

軸対称柱体の上下揺について

On the Heaving of a Axisymmetry Cylinder

前田 久明*

Hisaaki MAEDA

1. radiation potential

座標系は右手系として Fig. 1 に示す通りである. n は法線ベクトルを示す. 原点は静止水面上にとる. radiation potential ϕ に関する境界値問題は¹⁾

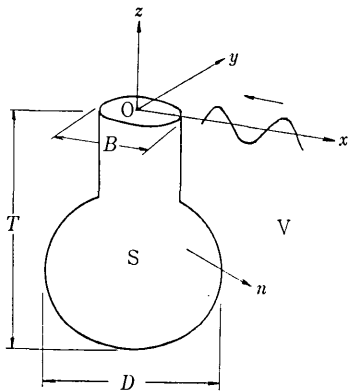


Fig. 1

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in } V \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + f = 0 \quad \text{on } S \tag{2}$$

$$K\phi - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0 \tag{3}$$

$$\text{grad } \phi \rightarrow 0 \quad \text{at } z \rightarrow -\infty \tag{4}$$

$$\phi \rightarrow H(\theta, K) \frac{1}{\sqrt{R_\infty}} e^{Kz + i(-KR + (4/\pi))} \quad (R \rightarrow \infty) \tag{5}$$

となる. ただし, 物体表面 S 上では f は既知とし, K は波数, $H(\theta, K)$ は Kochin 函数とする.

いま点 (x_m, y_m, z_m) に単位の強さの Source を置くことによって得られるグリーン函数 ϕ_m を導入すると, radiation potential ϕ は近似的に

$$\phi = \sum_{m=1}^N a_m \phi_m \tag{6}$$

ここに a_m は Source の強さを表わす未定係数である. 従って (1)~(5) で表わされる境界値問題は結局物体表面の境界条件 (2) だけ満足すればよい. a_m, ϕ_m の実部虚部を添記号 C, S で表わすことにすると (6) は

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_C &= \sum_{m=1}^N (\alpha_m \phi_{mC} - \beta_m \phi_{mS}) \end{aligned} \right. \tag{7}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_S &= \sum_{m=1}^N (\alpha_m \phi_{mS} + \beta_m \phi_{mC}) \end{aligned} \right. \tag{8}$$

ただし $a_m = \alpha_m + i\beta_m$

境界条件 (2) は次のようになる.

$$\left\{ \begin{aligned} -f &= \sum_{m=1}^N \left(\alpha_m \frac{\partial \phi_{mC}}{\partial n} - \beta_m \frac{\partial \phi_{mS}}{\partial n} \right) \end{aligned} \right. \quad \text{on } S \tag{9}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= \sum_{m=1}^N \left(\alpha_m \frac{\partial \phi_{mS}}{\partial n} + \beta_m \frac{\partial \phi_{mC}}{\partial n} \right) \end{aligned} \right. \tag{11}$$

ただし $R = \sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2 + (z-z_m)^2}$

$$R^* = \sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2 + (z+z_m)^2} \tag{10}$$

$$R_m = \sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2}$$

として

$$\begin{aligned} \phi_{mC} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{R^*} - \pi K e^{K(z+z_m)} \{ H_0(KR_\infty) + N_0(KR_\infty) \\ &\quad - 2K e^{K(z+z_m)} \int_0^{-(z+z_m)} \frac{e^{Kv}}{\sqrt{v^2 + R_\infty^2}} dv \} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\phi_{mS} = -2\pi e^{K(z+z_m)} J_0(KR_\infty) \tag{13}$$

ここに, H_0, J_0, N_0 はそれぞれ 0 次のストルプ函数, 第一種ならびに第二種ベッセル函数である²⁾. 結局 radiation potential を求めるための境界値問題は (9) (10) の $2N$ 元連立一次方程式を解いて α_m, β_m を求めることに帰着されたわけである.

次に (9) (10) の $2N$ 元連立一次方程式を解く代りに, 2 組の N 元連立一次方程式から求める解法について述べる. この解法によると radiation potential を求める課程において既に波浪強制力がその位相まで含めて求まっていることを後に証明する.

先ず円板上に特異点を分布させたときを考慮して (9)

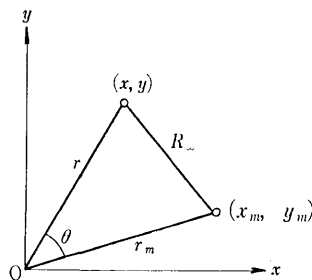


Fig. 2

* 東京大学生産技術研究所 第2部

研 究 速 報

(10) 中の ϕ_{ms} の変形について考える. r, r_m, θ を Fig. 2 のごとくととベッセル函数の加法定理より

$$J_0(KR_\infty) = J_0(Kr)J_0(Kr_m) + 2\sum_{n=1}^N J_n(Kr)J_n(Kr_m)\cos n\theta \quad (14)$$

いま上下揺を考えることにして Source の特異点を Z 軸におくことにすれば

$$\frac{\partial \phi_{ms}}{\partial n} = -2\pi e^{Kz_m} \frac{\partial}{\partial n} [e^{KZ} J_0(Kr)] \quad (15)$$

ここで
$$P_C = \sum_{m=1}^N \alpha_m e^{Kz_m} \quad (16)$$

$$P_S = \sum_{m=1}^N \beta_m e^{Kz_m} \quad (17)$$

$$\gamma_{1m} = \alpha_m + (P_S/P_C) \cdot \beta_m \quad (18)$$

$$\gamma_{dm} = \beta_m/P_C \quad (19)$$

$$g = 2\pi \frac{\partial}{\partial n} [e^{KZ} J_0(Kr)] \quad (20)$$

とおくと, (9) (10) は次のごとく 2 組の N 元連立一次方程式に変形される²⁾⁴⁾.

$$\left\{ \begin{aligned} -f &= \sum_{m=1}^N \gamma_{1m} \frac{\partial \phi_{mc}}{\partial n} \\ g &= \sum_{m=1}^N \gamma_{dm} \frac{\partial \phi_{mc}}{\partial n} \end{aligned} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{aligned} -f &= \sum_{m=1}^N \gamma_{1m} \frac{\partial \phi_{mc}}{\partial n} \\ g &= \sum_{m=1}^N \gamma_{dm} \frac{\partial \phi_{mc}}{\partial n} \end{aligned} \right. \quad (22)$$

ここにおいて γ_{1m}, γ_{dm} が求まったとして α_m, β_m を得るには以下の手順による⁴⁾.

$$\left\{ \begin{aligned} P_1 &= \sum_{m=1}^N \gamma_{1m} e^{Kz_m} \\ P_d &= \sum_{m=1}^N \gamma_{dm} e^{Kz_m} \end{aligned} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} P_1 &= \sum_{m=1}^N \gamma_{1m} e^{Kz_m} \\ P_d &= \sum_{m=1}^N \gamma_{dm} e^{Kz_m} \end{aligned} \right. \quad (24)$$

$$P_C = P_1/(1+P_d^2) \quad (25)$$

$$P_S = P_C \cdot P_d \quad (26)$$

$$\alpha_m = \gamma_{1m} - P_S \cdot \gamma_{dm} \quad (27)$$

$$\beta_m = P_C \cdot \gamma_{dm} \quad (28)$$

次に (21), (22) の境界値問題を別所の変分原理¹⁾によって解く際の汎函数はそれぞれ次の通りである.

$$\left\{ \begin{aligned} J_1 &= \iint_S \phi_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n} + 2f \right) dS \\ J_2 &= \iint_S \phi_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial n} - 2g \right) dS \end{aligned} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{aligned} J_1 &= \iint_S \phi_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n} + 2f \right) dS \\ J_2 &= \iint_S \phi_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial n} - 2g \right) dS \end{aligned} \right. \quad (30)$$

ただし
$$\phi_1 = \sum_{m=1}^N \gamma_{1m} \cdot P_{mc} \quad (31)$$

$$\phi_2 = \sum_{m=1}^N \gamma_{dm} \cdot \phi_{mc} \quad (32)$$

2. 波浪強制力

いま領域として Fig. 3 に示すごとく考え, radiation potential を ϕ , 入射波のポテンシャルを ϕ_w , diffraction potential を ϕ_d とすると, 波浪強制力 e は

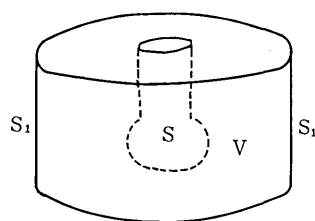


Fig. 3

$$e = \iint_S \left(\phi_w \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi_w}{\partial n} \right) dS \quad (33)$$

$$= \iint_S \left(\phi_w \frac{\partial \phi}{\partial r} - \phi \frac{\partial \phi_w}{\partial r} \right) dS \quad (34)$$

次に領域 V の遠方の境界面である円筒面 S_1 上における ϕ_w および ϕ について調べてみる. いま入射波は x 軸と α なる角度をなす方向からくるものとする

$$\phi_w = e^{Kz + iK(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} \quad (35)$$

$$\phi = e^{Kz} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n J_n(Kr) \cos n(\theta - \alpha) \quad (36)$$

ただし, $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_n = 2(n=1, 2, 3, \dots)$

また radiation potential ϕ のうち遠方において主要な振舞をする頃は特異点が Z 軸上にあるとすると

$$\phi = -2\pi i K e^{Kz} H_0^{(2)}(Kr) \sum_{m=1}^N a_m e^{Kz_m} + 0\left(\frac{1}{r}\right) \quad (37)$$

ただし $H_0^{(2)}$ は第 2 種の 0 次のハンケル函数である.

従って (34) の波浪強制力は (36) (37) により

$$e = -i2\pi^2 \sum_{m=1}^N a_m e^{Kz_m} \left[J_0(Kr) \frac{\partial}{\partial r} \left(H_0^{(2)}(Kr) + 0\left(\frac{1}{r}\right) \right) - \frac{\partial J_0(Kr)}{\partial r} \left(H_0^{(2)}(Kr) + 0\left(\frac{1}{r}\right) \right) \right] \cdot r \quad (38)$$

ところでベッセル函数の漸化式より

$$J_0(Kr) \frac{\partial H_0^{(2)}(Kr)}{\partial r} - \frac{\partial J_0(Kr)}{\partial r} \cdot H_0(Kr) = -\frac{2i}{\pi r} \quad (39)$$

従って無限遠における S_1 面を考えることにすれば, $r \rightarrow \infty$ であるので

$$e = -4\pi \sum_{m=1}^N a_m e^{Kz_m} \quad (40)$$

実部虚部に分けるならば

$$\left\{ \begin{aligned} e_C &= -4\pi \sum_{m=1}^N a_m e^{Kz_m} \\ e_S &= -4\pi \sum_{m=1}^N \beta_m e^{Kz_m} \end{aligned} \right. \quad (41)$$

$$\left\{ \begin{aligned} e_C &= -4\pi \sum_{m=1}^N a_m e^{Kz_m} \\ e_S &= -4\pi \sum_{m=1}^N \beta_m e^{Kz_m} \end{aligned} \right. \quad (42)$$

ところで (16) (17) より

$$\left\{ \begin{aligned} e_C &= -4\pi \cdot P_C \\ e_S &= -4\pi \cdot P_S \end{aligned} \right. \quad (43)$$

$$\left\{ \begin{aligned} e_C &= -4\pi \cdot P_C \\ e_S &= -4\pi \cdot P_S \end{aligned} \right. \quad (44)$$

となっており, 波浪強制力は radiation potential を求める課程においてすでに得られていることが証明された.

なおこの際の位相は(26)より

$$\tan^{-1} \frac{e_s}{e_c} = \tan^{-1} P_d$$

となっていることがわかる。

3. 数値計算例

Fig. 1 に示すような球タイプの Footing をもった Circular Dock に関して, Fig. 4 に示す 8 形状を選んで波浪強制力の数値計算を行なった。結果は Fig. 5, 6 に示す。

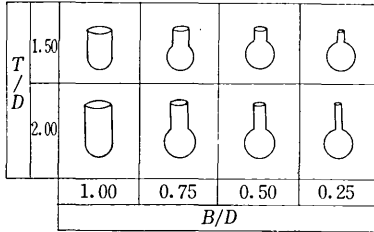


Fig. 4

終りに, 数値計算でお世話になった三井海洋開発(株) 佐尾邦久氏に深謝します。

(1972 年 11 月 21 日受理)

参考文献

- 1) 佐尾邦久, 前田久明, 黄宗屹; 造船学会論文集 130 号 (1971)
- 2) 水野俊明; 造船学会論文集 127 号 (1970)
- 3) 別所正利; 防大理工研報告 3 卷 2 号 (1965)
- 4) 前田久明; 造船学会論文集 126 号 (1966)

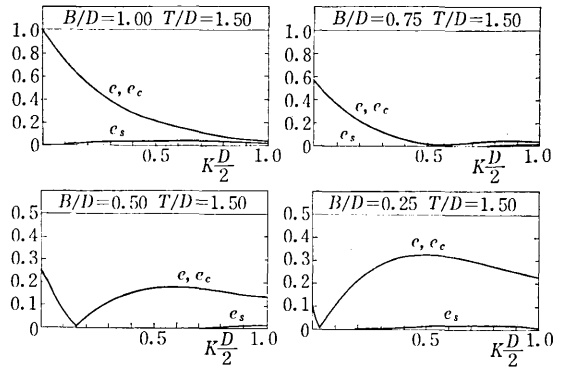


Fig. 5

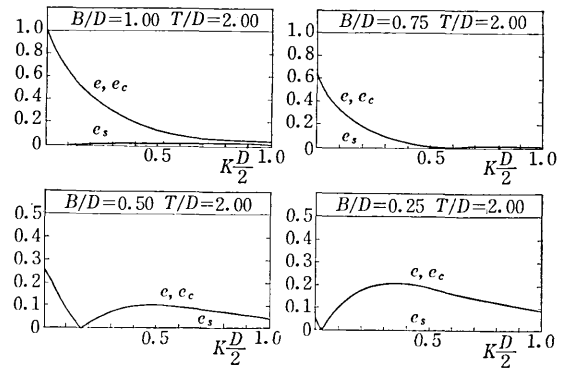


Fig. 6

