UDC 62-503

最適制御問題における双対性の一考察

A Study of Duality in Optimal Control Problems

小　林　幹　夫*
Mikio KOBAYASHI

1. 緒　　言

プログラミングの分野において，拘束条件付のはん関数最小問題と最大問題の間のある種の関係が双対性という概念のもとで研究されてきている．この問題は，ユークリッド空間における不等式拘束条件付のプログラミング問題において提起され，現在では関数空間における問題に拡張されてきている．この概念を制御問題にもち込もうとするとき，つぎのことが問題となる．実際の制御系は，一般に，状態変数および制御変数に拘束が課せられることになるが，この場合従来のものと異なり，拘束条件を関数空間で扱う必要性が生じる．さらに，制御問題においては，拘束条件は不等式ばかりでなく等式によっても与えられる．

これらの問題は，プログラミングの分野においては明確にされていないので，制御問題においてこの概念を活用しようとするとき，まず解決しておかなければならないことがらである．

2. 問題の記述

バナッハ空間を Bi で表わす．制御変数および状態変数を u および z で表わす．写像

$$z=z(u)\,;\ B_1\to B_2 \qquad (1)$$

は連続であるものとする．Bi としては，具体的には L^P $(1\leq P\leq\infty)$ あるいはユークリッド空間を考えることにする．(1)式は，常微分方程式，偏微分方程式，境界条件および終端条件などを代表しているものとする．このことに関する詳しい記述は省略する．

評価関数は

$$I(z,u),\quad I\in R^1 \qquad (2)$$

で与えられる．　R^i は i 次元ユークリッド空間を表わす．拘束条件は，等式および不等式で与えられ，つぎのようになる．

$$g(z,u)\leq 0,\quad h(z,u)=0,\quad g\in B_3,\quad h\in B_4 \qquad (3)$$

(1) 式のもとで，$\varphi(z,u)$ は $\varphi(u)$ と表わすことができるので，以下においては $\varphi(z,u)$ を $\varphi(u)$ あるいは φ と同一視する．

最適制御問題は，つぎのようになる．

Primal Problem. 拘束条件 (3) を満足し，$I(z,u)$ を最小にする $u_0\in B_1$ を求めよ．

双対問題を考察するため，つぎのようなはん関数を導入する．

$$I^*(u,\lambda,\mu)=I(u)+\langle\lambda,g(u)\rangle+\langle\mu,h(u)\rangle \qquad (4)$$

ここで，$\langle\ \rangle$ は Bi における内積を表わし，λ および μ はそれぞれ B_3^* および B_4^* の要素である．B_i^* は B_i の共役空間を表わす．双対問題は，つぎのようになる．

Dual Problem. 拘束条件

$$\nabla' I(u)+\lambda'\nabla g(u)+\mu'\nabla h(u)=0,\quad \lambda\geq 0 \qquad (5)$$

のもとで $I^*(u,\lambda,\mu)$ を最大にするベクトル $\{u^*:\lambda^*:\mu^*\}\in B_1^*\times B_3^*\times B_4^*$ を求めよ．ここで，$\nabla I(u)$，$\nabla g(u)$ および $\nabla h(u)$ は任意の点 $u\in B_1$ における $I(u)$，$g(u)$ および $h(u)$ のフレッシュ導関数を表わす．$\nabla' I(u)$ は $\nabla I(u)$ の転置を表わす．

3. 双対定理

前提条件およびその番号を Ai で表わす．

A 1．$I(u)$ および $g(u)$ は u に関して凸であり，$h(u)$ は u に関して線形である．

A 2．Primal Problem の解 u_0 が満足すべき必要条件は，ある $\lambda_0\in B_3^*$，$\lambda_0\geq 0$ および $\mu_0\in B_4^*$ が存在して

$$I^*(u_0,\lambda,\mu)\leq I^*(u,\lambda,\mu_0),\quad {}^{\forall}u\ni B_1 \qquad (6)$$

を成立させることである．

定理 1．A 1 が満足されているならば，つぎのことがらが成立する．

(a)　$\bar{u}$ が拘束条件 (2) を満足し，ベクトル $\{u':\lambda:\mu\}$ は拘束条件 (5) を満足するものとする．このとき，

$$I(\bar{u})\geq I(\bar{u}')+\langle\lambda,g(u')\rangle+\langle\mu,h(u')\rangle \qquad (7)$$

が成立する．

(b)　(7) 式において等号が成立しているならば，$\bar{u}$ は Primal Problem の解であり，$\{u':\lambda:\mu\}$ は Dual Problem の解である．

A 3．$\Lambda\equiv\{\{\lambda:\mu\}\,|\,\|\lambda\|\leq\varepsilon_1,\ \lambda\geq 0,\ \lambda\in B_3^*,\ \|\mu\|\leq\varepsilon_2,$

* 東京大学生産技術研究所　第2部

$\mu \in B_4^*\}$.

ここで，ε_1 および ε_2 はある正の定数である．このとき，つぎのことがらが成立しているものとする．

（a）Λ で稠密な任意のベクトル$\{\bar{\lambda}:\bar{\mu}\}\in B_3^*\times B_4^*$, $\lambda\geq 0$ に対して，拘束条件（5）を満足するような $\bar{u}\in B_1$ が存在する．

（b）Dual Problem の解が存在するとき，それを $\{u^*:\lambda^*:\mu^*\}$ で表わし，拘束条件（5）を満足する $\bar{u}$ を $\bar{u}=\bar{u}(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ で表わす．このとき，$\lambda^*+\varepsilon\lambda\geq 0$ を満足する任意の $\lambda\in B_3^*$ および $\mu\in B_4^*$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{u}(\lambda^*+\varepsilon\lambda,\mu^*+\varepsilon\mu)=\bar{u}(\lambda^*,\mu^*)$$

が成立する．

定理２（双対定理）

（a）Ａ１およびＡ２が満足されているものとする．u_0 が Primal Problem の解ならば，ベクトル $\{u_0:\lambda_0:\mu_0\}$ が Dual roblem の解となるような $\lambda_0\in B_3^*$, $\lambda_0\geq 0$ および $\mu_0\in B_3^*$ が存在する．さらに

$$I(u_0)=I^*(u_0,\lambda_0,\mu_0)$$

である．

（b）Ａ３が成立しているものとする．ベクトル $\{u^*:\lambda^*:\mu^*\}$ が Primal Problem の解ならば，u^* は Primal Problem の解である．さらに

$$I^*(u^*,\lambda^*,\mu^*)=I(u^*)$$

である．

証明．

（a）Ａ２より

$$\left.\begin{array}{l}\nabla' I(u_0)+\lambda_0\nabla g(u_0)+\mu_0\nabla h(u_0)=0\\ \lambda_{0,i}\cdot g_i(u_0)=0\end{array}\right\}\qquad(8)$$

を満足するベクトル $\{\lambda_0:\mu_0\}$ が存在する．さらに（8）の第二式より

$$I(u_0)=I(u_0)+\langle\lambda_0,g(u_0)\rangle+\langle\mu_0,h(u_0)\rangle$$

となる．したがって，定理１の（b）より $\{u_0:\lambda_0:\mu_0\}$ は Dual Problem の解である．

（b）拘束条件（5）を満足する任意のベクトルを，$\{\bar{u}:\bar{\lambda}:\bar{\mu}\}$ とする．このとき $I^*(u,\lambda,\mu)$ の凸性より，任意の $u\in B_1$ に対して

$$I^*(u,\bar{\lambda},\bar{\mu})\geq I^*(\bar{u},\bar{\lambda},\bar{\mu})\qquad(9)$$

が成立する．いっぽう，ベクトル$\{u^*:\lambda^*:\mu^*\}$は Dual Problem の解であるから

$$I^*(\bar{u},\bar{\lambda},\bar{\mu})\geq I^*(u^*,\lambda^*,\mu^*)\qquad(10)$$

が成立する．

（9）および（10）式より

$$I^*(\bar{u},\lambda^*,\mu^*)\geq I(\bar{u},\bar{\lambda},\bar{\mu})\qquad(11)$$

が得られる．ここで

$\bar{\lambda}=\lambda^*+\varepsilon\lambda$, $\lambda^*+\varepsilon\lambda\geq 0$, $\lambda\in B_3^*$, $\bar{\mu}=\mu^*+\varepsilon\mu$, $\mu\in B_4^*$

とおく，このとき，(11) 式より

$$\langle\lambda,g(\bar{u})\rangle+\langle\mu,h(\bar{u})\rangle\leq 0$$

が得られ，Ａ３より

$$\langle\lambda,g(u^*)\rangle+\langle\mu,h(u^*)\rangle\leq 0\qquad(12)$$

となる．この式より

$$g(u^*)\leq 0,\quad h(u^*)=0$$

が得られる．$\lambda=-\lambda^*$ とおくと (12) 式より

$$\lambda^*_i\cdot g_i(u^*)=0,\quad I^*(u^*,\lambda^*,\mu^*)=I(u^*)$$

となる．この式と定理１の（b）より，u^* は Primal Problem の解となる．

4. 結　　言

３章までの議論で，最適制御問題における双対性の概要が述べられた．この概念を利用して $I(u_0)$の限界を求める方法および双対定理とある種の近似解法との関連等興味ある問題があるが，ここではこれらに関する考察は省略した．

おわりに，本研究を進めるにあたって，議論して下さった大島康次郎教授に厚く感謝する次第である．

(1972年8月16日受理)

参 考 文 献

1) 小林，大島，バナッハ空間における条件付最適制御問題，計測自動制御学会論文集，8-2，1972
2) 小林，大島，バナッハ空間における条件付最適制御問題の近似解法，一内点法による考察一，計測自動制御学会論文集，8-5，1972（掲載予定）