

# 多次元スペクトル解析の地震応答解析への応用について

A Study on an Application of Multi-Dimensional Spectral Analysis to Earthquake Response Problem

鈴木 浩 平\*

Kohei SUZUKI

機器・配管系の大型化・複雑化にともないこれらの構造物の耐震設計のための動的解析の重要性が増している。動的応答解析においては対象とする構造物系をいかに模擬するかがきわめて重要となるが、最近の大型電子計算機の発達や大型加振台の出現により構造物やモデルの加振実験または常時微動測定で得た入出力端記録をスペクトル解析することが容易になり相関関数、パワースペクトル、クロススペクトルを計算して応答解析に役立てようとする試みが追求されている<sup>1)</sup>。この方法は系の固有振動数や減衰係数推定および伝達特性推定に有効な情報を与える。

筆者らは、一般の機器・配管系が工場、発電所およびプラント内で複数個の入力端を有していることに着目し多入力系としての解析を行ってきたが<sup>2)3)</sup>、このような多入力系のシミュレーションには多数個の信号を同時に処理する多次元スペクトル解析が必要となる。この多次元スペクトル解析法は理論的には赤池<sup>4)</sup>、Goodmann<sup>5)</sup>、Enochson<sup>6)</sup>らによって確立されているが、わが国では船舶<sup>7)</sup>、航空<sup>8)</sup>関係に2, 3の応用例をみるにすぎない。

ここでは加振実験データをもとに多入力系の地震応答解析へのスペクトル解析の適用をこころみる。

## 1. 基本的関係式

図1に示すようにある線形系へ  $n$  個の不規則信号入力  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  が作用したときの応答出力を  $y(t)$  とする。このとき入出力間には

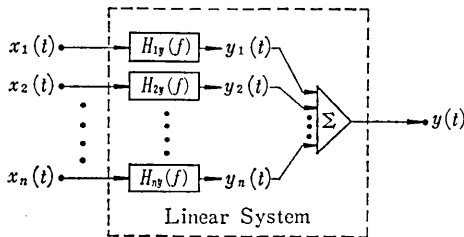


図1 線形多入力系モデル線図

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} h_{iy}(\tau) x_i(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

または、そのフーリエ変換形として

$$Y(f) = \sum_{i=1}^n H_{iy}(f) X_i(f) \quad (2)$$

なる関係が存在する。ここで  $h_{iy}(\tau)$ 、 $H_{iy}(f)$  は各入出力間のインパルス応答関数および振動数応答関数である。

これらの基本式をもちいて多入力線形系における応答出力のパワースペクトル  $S_{yy}(f)$ 、入出力間のクロススペクトル  $S_{iy}(f)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) を計算することができる。表現を簡単にするため、 $n$  個の入力とそれに対応する振動数応答関数を

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \quad (3)$$

$$\mathbf{H}(f) = [H_{1y}(f), H_{2y}(f), \dots, H_{ny}(f)] \quad (4)$$

とあらわし各入力  $x_i(t)$  と出力  $y(t)$  および各入力間のクロススペクトルを

$$\mathbf{S}_{xy}(f) = [S_{1y}(f), S_{2y}(f), \dots, S_{ny}(f)] \quad (5)$$

$$\mathbf{S}_{xx}(f) = \begin{bmatrix} S_{11}(f) & S_{12}(f) & \dots & S_{1n}(f) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{n1}(f) & \dots & \dots & S_{nn}(f) \end{bmatrix} \quad (6)$$

と書くと出力のパワースペクトルは

$$S_{yy}(f) = |\mathbf{H}(f)|^2 \mathbf{S}_{xx}(f) \quad (7)$$

によって計算できる。一方入出力間のクロススペクトルは

$$\mathbf{S}_{xy}'(f) = \mathbf{S}_{xx}(f) \mathbf{H}'(f) \quad (8)$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} S_{1y}(f) \\ S_{2y}(f) \\ \vdots \\ S_{ny}(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(f) & S_{12}(f) & \dots & S_{1n}(f) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{n1}(f) & \dots & \dots & S_{nn}(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{1y}(f) \\ H_{2y}(f) \\ \vdots \\ H_{ny}(f) \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで ' 印は列マトリクスをあらわしている。(8)をもちいると入出力の振動数特性がわかっているときこの系の振動数応答関数を計算して伝達特性を知ることができる。すなわち(8)から

$$\mathbf{H}'(f) = \mathbf{S}_{xx}^{-1}(f) \mathbf{S}_{xy}'(f) \quad (10)$$

または(9)から

$$\begin{bmatrix} H_{1y}(f) \\ H_{2y}(f) \\ \vdots \\ H_{ny}(f) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{cof. } S_{11}(f) & \dots & \text{cof. } S_{1n}(f) \\ \text{cof. } S_{21}(f) & \dots & \text{cof. } S_{2n}(f) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cof. } S_{n1}(f) & \dots & \text{cof. } S_{nn}(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{1y}(f) \\ S_{2y}(f) \\ \vdots \\ S_{ny}(f) \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで  $\Delta$  は  $\mathbf{S}_{xx}(f)$  の行列式の値であり  $\text{cof. } S_{ij}(f)$  は  $\mathbf{S}_{xx}(f)$  の  $S_{ij}(f)$  に関する余因子である。

## 2. 多入力系におけるコヒーレンシ

周知のように1入力系のスペクトル解析において入出

\* 東京大学生産技術研究所 第2部

研究速報  
力間の相関性をあらわす指標として

$$\gamma^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)} \quad (12)$$

で定義されるコヒーレンシ(coherency)がもちいられる。これは直観的には入力  $x(t)$  と出力  $y(t)$  の振動数  $f$  における振動数成分間の相関係数の自乗をあらわすもので一般に  $0 \leq \gamma^2(f) \leq 1$  であり  $\gamma^2(f)$  が小さいほど雑音の影響や系の非線形性の影響が大きくこの入出力関係での計算結果の精度が低いことになる。

多入力解析においても  $n$  個の入力  $x(t)$  と応答出力  $y(t)$  の間のコヒーレンシを定義することができる。

$$\gamma_M^2(f) = \frac{[S_{xy}(f)]^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)} = \frac{1}{S_{yy}(f)} H(f) S_{xy}(f) \quad (13)$$

これをマルチプル・コヒーレンシ (multiple coherency) とよぶ。また Tick<sup>9)</sup>や赤池の提案する条件付スペクトルの考え方を導入すると出力  $y(t)$  と1つの入力  $x_j(t)$  から他の入力と、線形な関係にある部分を除去した残り (residual) の部分のコヒーレンシを

$$\gamma_{vj \cdot 12 \dots j \dots n}^2(f) = \frac{|S_{vy \cdot 12 \dots j \dots n}(f)|^2}{S_{jj \cdot 12 \dots j \dots n}(f) \cdot S_{yy \cdot 12 \dots j \dots n}(f)} \quad (14)$$

として計算することができる。(14) の  $\gamma_{vj \cdot 12 \dots j \dots n}^2(f)$  をパーシャルコヒーレンシ (partial coherency) とよぶ。多入力解析においてはこの2種類のコヒーレンシを計算することが重要である。マルチプル・コヒーレンシは全入力の応答に対する振動数  $f$  における相関をあらわしパーシャル・コヒーレンシは特定の入力の出力に寄与する度合いをあらわす。マルチプル・コヒーレンシに比べてパーシャル・コヒーレンシが非常に小さいとき、その振動数領域における該当入力の影響は無視できるようになり多入力解析はより簡単になる。(12)における  $\gamma^2(f)$  を多入力の場合と区別するためシンプル・コヒーレンシ (simple coherency) とよぶことにする。

### 3. 耐震問題への簡単な応用

図2に示すのは、日本電気協会が1971年に実施した120 ton 大型振動台による振動実験に用いた実物大の構築物模型である<sup>10)</sup>。この模型には3層から成る構築物系の第2層床面と第3層天井面に両端が固定され、中央部に集中付加質量を有する2入力機器系モデルが取り付けられている。振動台を各種地震波アナログ入力により励振したときの2入力モデルの両端と中央部の応答加速度測定結果の一例を図3に示す。ここでこの2入力モデルの構築物系への反作用を無視して両端加速度を入力、中央部応答を出力とみなした入出力流れ図を描くと図4のようになる。これは1. で述べた多入力系のもっとも基本的なものとなり(9)より

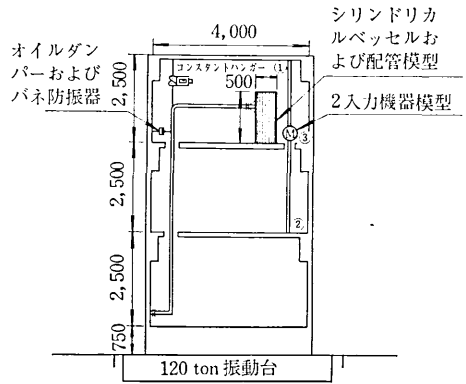


図2 大型構築物-機器配管系模型<sup>10)</sup>

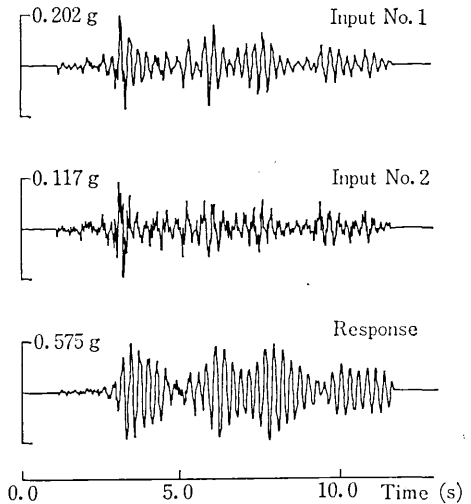


図3 2入力モデルの加振実験による応答波形

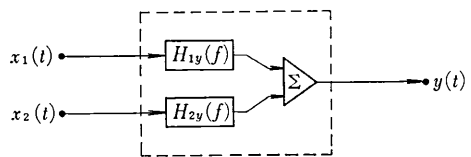


図4 2入力系モデル線図

$$\begin{bmatrix} S_{1y}(f) \\ S_{2y}(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(f) & S_{12}(f) \\ S_{21}(f) & S_{22}(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{1y}(f) \\ H_{2y}(f) \end{bmatrix} \quad (15)$$

をみちびくことができこの式から各入力についての振動数応答関数はそれぞれ

$$H_{1y}(f) = \frac{S_{22}(f)S_{1y}(f) - S_{12}(f)S_{2y}(f)}{S_{11}(f)S_{22}(f) - |S_{12}(f)|^2} \quad (16)$$

$$H_{2y}(f) = \frac{S_{11}(f)S_{2y}(f) - S_{21}(f)S_{1y}(f)}{S_{11}(f)S_{22}(f) - |S_{12}(f)|^2} \quad (17)$$

として計算することができる。

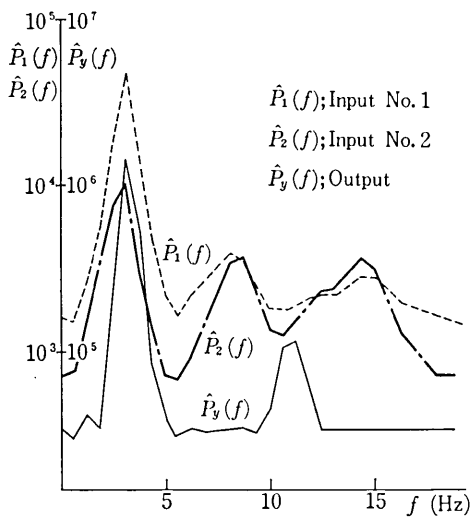


図5 入出力のパワースペクトル

図5は両入力端波形と2入力モデル応答波形のパワースペクトルの計算例である。応答波形の顕著な2個のピークのうち低い方(約3Hz)は励振による構築物とモデルの1次共振点を示し12Hz近辺のピークは構築物の2次の固有振動数である。これらの値と入力相互間および入出力間のクロススペクトルを用いて計算した振動数応答関数のゲイン特性、位相特性を図6に示す。低い方の共振点に対しては伝達特性はほぼ同じであるが、高い共振点に対しては入力2の方が高い特性をもつことがわかる。

次にこの2入力系についてマルチプル・コヒーレンシを(13)から求めると

$$\gamma_M^2(f) = \{S_{1y}(f)H_{1y}(f) + S_{2y}(f)H_{2y}(f)\} / S_{yy}(f) \quad (18)$$

また各入力に関するパーシャル・コヒーレンシは(14)より

$$\begin{aligned} \gamma_{1y,2}^2(f) &= |S_{1y,2}(f)|^2 / \{S_{yy,2}(f)S_{11,2}(f)\} \\ &= \frac{|S_{1y}(f)|^2 |1 - \{S_{2y}(f)S_{12}(f)\} / \{S_{1y}(f)S_{22}(f)\}|^2}{S_{11}(f)S_{yy}(f) \{1 - \gamma_{2y}^2(f)\} \{1 - \gamma_{12}^2(f)\}} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{2y,1}^2(f) &= |S_{2y,1}(f)|^2 / \{S_{yy,1}(f)S_{22,1}(f)\} \\ &= \frac{|S_{2y}(f)|^2 |1 - \{S_{1y}(f)S_{21}(f)\} / \{S_{2y}(f)S_{11}(f)\}|^2}{S_{22}(f)S_{yy}(f) \{1 - \gamma_{1y}^2(f)\} \{1 - \gamma_{12}^2(f)\}} \end{aligned} \quad (20)$$

によって求めることができる。ここで  $\gamma_{12}^2(f)$  および  $\gamma_{1y}^2(f)$ ,  $\gamma_{2y}^2(f)$  はそれぞれ入力相互間および入出力間のシンプル・コヒーレンシをあらわす。図3に示した実験データによってこれらのコヒーレンシの推定値をプロットした一例を図7に示す。共振点近傍をみると3Hz近辺では  $\gamma_{1y,2}^2(f)$  が大きな値を示し12Hz近辺では逆

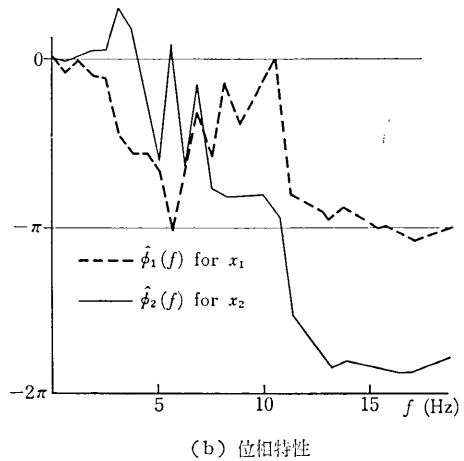
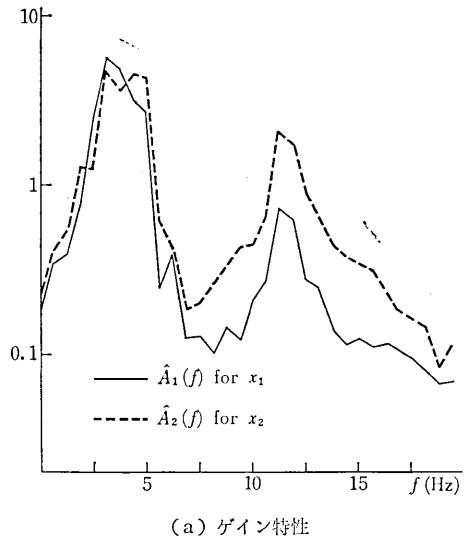


図6 伝達関数のゲイン・位相特性

に  $\gamma_{2y,1}^2(f)$  の方が大きくなる。このことから第6図における振動数応答関数の推定値に対して、低い共振点では入力  $x_1(t)$  が、高い共振点では入力  $x_2(t)$  が応答出力  $y(t)$  とより強い相関関係を有していることがわかる。こうして多入力系における各個入力の出力に対する寄与の度合いがわかるので応答解析のためのシミュレーションに有力な情報が与えられることになる。図8は各パーシャル・コヒーレンシの値をマルチプル・コヒーレンシで割ったものを図示しているがこれを見ると入出力の関係はより明らかになる。8Hz近辺以上の高振動数領域での  $x_2(t)$  の寄与の優位性が顕著にあらわれている。1入力問題との比較をするためにシンプル・コヒーレンシの比もあわせてプロットしてある。1Hz~4Hzの振動数の低い領域ではパーシャル・コヒーレンシが1入力系としてのシンプル・コヒーレンシより小さくなっている。このときは  $x_1(t)$  と  $x_2(t)$  の間に大きな相関性があり

研 究 速 報

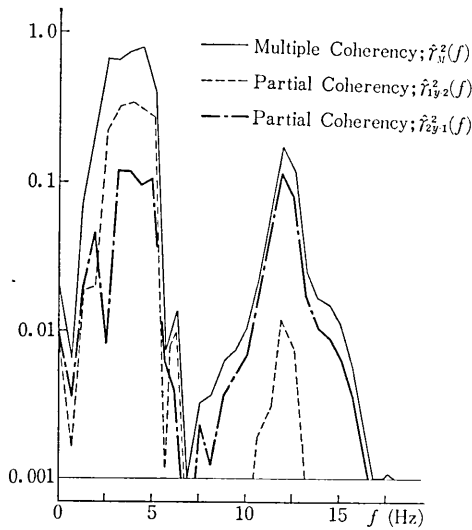


図7 コヒーレンシの推定

互に影響し合って出力に作用している。この領域では、 $x_1(t)$  と  $x_2(t)$  の間に適当な伝達関数  $H_{12}(f)$  を仮定し 1 入力系に直すことも考えられる。一方 5 Hz ~ 6 Hz では逆にパーシャル・コヒーレンシの方が大となっているが、ここでは入力間の相関が小さく 2 入力それぞれへの出力に対する影響を相殺し合っているといえるがこの領域においてはマルチプル・コヒーレンシが小さく雑音や非線形性の影響の大きいと考えられ物理的にはあまり重要でない。

これらの関係を式であらわすと

$$\begin{aligned} \gamma_M^2(f) &= \gamma_{1y}^2(f) + \gamma_{2y,1}^2(f) \{1 - \gamma_{1y}^2(f)\} \\ &= \gamma_{2y}^2(f) + \gamma_{1y,2}^2(f) \{1 - \gamma_{2y}^2(f)\} \quad (21) \end{aligned}$$

となり一般  $n$  入力系に対しても 2. の諸式から同様の式がみちびける。

4. 結 論

地震応答解析において重要なことは系の伝達特性のはあくとも入力波の振動数特性の関係である。多入力系においては個々の入力波、たとえば構築物系からの入力あるいは地盤からの入力のスペクトルが異なるのでいっそう問題は複雑になる。しかし何らかの方法で対象とする機器・配管系の振動特性がわかっていたり、入出力の実測データがあると、本報告で述べた手法を用いて解析を有効にすすめることが期待される。とくにパーシャル・コヒーレンシ推定によって多入力系の個々の入力の出力に対する寄与度を評価して対象とする系を応答解析が容易な系に模擬することができる。同時にここで扱った例にもあらわれたように一般に低次の共振点ではいくつかの入力が影響し合って系に作用していることが多く、多入

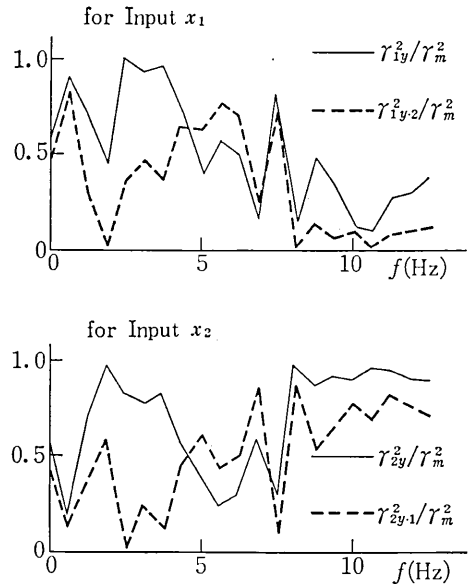


図8 コヒーレンシによる寄与度の評価

力解析の重要性は増していくと考えられる。

一方、今後の問題としては

- (1) 多入力系においては速度や変位入力の作用の考慮がなされるべきでありまた応答出力が逆に入力源となる系へ与える反作用の影響を考慮したフィードバック系としての解析の必要性
- (2) 非線形性を含む系および連続体などより複雑な系への本手法の拡張

などが挙げられよう。

おわりに本研究は佐藤壽労働教授のご指導に負うところが大きであり、心からの謝意を表します。また亘理厚、藤井澄二、柴田碧教授の日頃からの示唆に富んだごべんたつに深謝いたします。さらに多入力問題に関する論文提供を快諾された船舩技研山内保文所長および実験データを提供された中部電力総合技研山室誠、春日井浩道氏のご好意にお礼申し上げます。(1972年8月19日受理)

参 考 文 献

- 1) 佐藤：相関関数およびスペクトル(磯部編), 東大出版会 pp. 68~80 (1968)
- 2) 鈴木・佐藤：機械学会論文集, 38-305, pp. 93~102 (1971)
- 3) 鈴木：機械学会論文集投稿中(掲載予定)
- 4) Akaike, H.: Ann. Inst. Statist. Math., 70-2 (1965)
- 5) Goodman, N.R.; Proc. Symp. Time Series Analysis, John Wiley & Sons, pp. 197~203 (1963)
- 6) Enochson, L.D.; NASA Report CR-32
- 7) 山内：時系列解析に関するシンポジウムテキスト(1971)
- 8) 武田：1) に同じ, pp. 109~124
- 9) Tick, L.J.; 5) に同じ, pp. 197~203
- 10) 日本電気協会：原子炉施設の建物機器及び配管系の地震時における振動特性に関する試験研究成果報告書(1970)