研 究 速 報
UDC 711.112

活動等高線 (AC) についての基礎研究

Fundamental Study of Activity Contour

——閉曲線図形の変形に関する報告——

—Study on Transfiguration of Closed Curve—

原　広司*・芦川　智*・藤井　明*

1. 前　　書

都市，建築の計画論としての AC (Activity Contour) に関する研究の一環として，この報告がなされる．

閉曲線図形の構造を把握するための要素として R^* (Ridge) なる概念を導入したが，(生産研究第23巻第9号参照) この構造的要素としての R^* を用いて，閉曲線の内包する性質を抽出し，数式的解析を試みた．(活動等高線に関する研究の概要は，生産研究第22巻10号に示されているので参照されたい．)

閉曲線図形の R^* とは「閉曲線の内部領域において，その閉曲線に引かれた平行閉曲線群における特異点の軌跡」として定義されるが，別の観点からこのことをみた場合，R^* とは閉曲線図形における内接円の中心の軌跡であることが示される．R^* と閉曲線図形とは 1 to 1 対応がなされることより，逆に，R^* 上の点を中心とした考え方も可能である．すなわち，R^* 上の点の内接円の包絡線として，閉曲線が描かれるとする立場である．

ここでは，上記の立場により数式表現を行ない．閉曲線図形のもつ内的な性質である，面積，周長，R^* 概念を導入した時の閉曲線図形に対応する立体の体積の三者に関する事項を対象として解析を行なう．

2. 基 本 条 件

単一閉曲線の R^* の座標を $(X(t), Y(t), Z(t))$ とし，R^* の実長 t をパラメーターにとると

$$\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2=1$$

内接円の方程式を $\varphi(x, y, t)$ とすると，(X, Y) を中心とする内接円の半径は標準形の場合 Z だから

$$\varphi(x, y, t)=(x-X)^2+(y-Y)^2-Z^2$$

したがって，内接円群の方程式は

$$\varphi(x, y, t)=0$$

$$\varphi_t(x, y, t)=0$$

を連立したものである．これを解くと

$$x=X-\frac{Z}{1-\dot{Z}^2}(\dot{X}\dot{Z}\pm\dot{Y}\sqrt{1-2\dot{Z}^2})$$

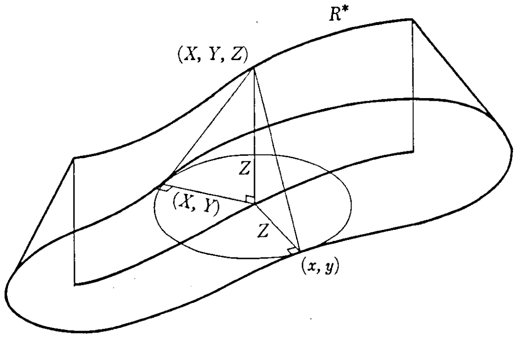

図 1

$$y=-Y+\frac{Z}{1-\dot{Z}^2}(-\dot{Y}\dot{Z}\pm\dot{X}\sqrt{1-2\dot{Z}^2}) \qquad (1)$$

なお，上式より包絡線の存在するための条件として

$$1-2\dot{Z}^2\geqq 0 \quad \therefore \quad 1/2\geqq\dot{Z}^2$$

がわかる．

3. 解 析 過 程

R^* 上の一点と閉曲線上の対応点の関係について求めるてみる．R^* の座標を (X, Y)，内接円の接点として対応づけられる点を (x, y) とし，$dy/dx=\tan\alpha$, $dY/dX=\tan\beta$, $\pm(\alpha-\beta)=\theta$ とすると

$$\tan\theta=\pm\tan(\alpha-\beta)$$

$$=\pm\frac{dy/dx-dY/dX}{1+dy/dx\cdot dY/dX}$$

ここで (x, y) における法線は (X, Y) を通るので

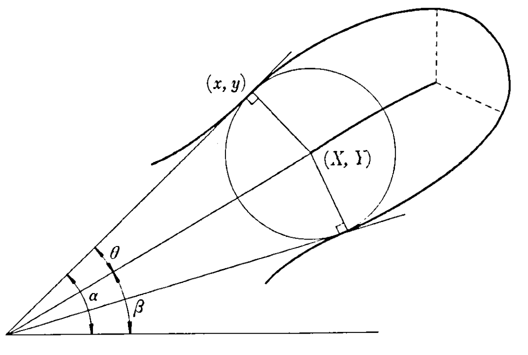

図 2

* 東京大学生産技術研究所　第5部

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{X-x}{Y-y}$$

$$=\frac{\dot{X}\dot{Z}\pm\dot{Y}\sqrt{1-2\dot{Z}^2}}{-\dot{Y}\dot{Z}\pm\dot{X}\sqrt{1-2\dot{Z}^2}}$$

これを代入すると

$$\tan\theta=\frac{\pm\dot{Z}}{\sqrt{1-2\dot{Z}^2}} \qquad (2)$$

この式の図形的な意味は，R^* 上の一点における接線と，その点を中心とする内接円の接点として対応づけられる閉曲線上の二点における接線とは，一点で交わり，かつ，ともになす角度が等しいということである．(生産研究第23巻第9号参照)．

さらに，(2)式より，R^* の密な点（R^* 上の一点に対し，閉曲線上のある領域が対応している点）での扇形部のなす角度は R^* の高さ $Z(t)$ の変動にのみ関係する値で，その $x-y$ 平面上での変動には関与しないことがわかる．したがって，R^* の密な部分の周長，面積，体積は $Z(t)$ の変動によってのみ決定されることがわかる．

次に R^* 上の一点に対し内接円により閉曲線上の二点が対応づけられる領域について考察を行なう．

R^* 上の微小区間と，対応する閉曲線上の区間，およびその対応線により囲まれる部分の面積を $\Delta S_1, \Delta S_2$ とし，閉曲線上の微小区間の曲率半径を ρ_1, ρ_2，そのなす角度を $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2$ とすると

$$\Delta S_1=\{(\rho_1+Z)^2-\rho_1^2\}\Delta\theta_1/2$$

$$\Delta S_2=\{\rho_2^2-(\rho_2-Z)^2\}\Delta\theta_2/2$$

$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2$ とすると

$$\Delta S=Z^2(\Delta\theta_1-\Delta\theta_2)/2+Z(\rho_1\Delta\theta_1+\rho_2\Delta\theta_2)$$

a) ΔS の前半部 $Z^2(\Delta\theta_1-\Delta\theta_2)/2$ について考える．

閉曲線の接線のなす角を α, Δt 後の増分を $\Delta\alpha$ とすると，

$$\tan\alpha=dy/dx$$

$$=\frac{\dot{X}\dot{Z}\pm\dot{Y}\sqrt{1-2\dot{Z}^2}}{-\dot{Y}\dot{Z}\pm\dot{X}\sqrt{1-2\dot{Z}^2}}$$

$$\therefore\quad \alpha=\tan^{-1}\frac{\dot{X}\dot{Z}\pm\dot{Y}\sqrt{1-2\dot{Z}^2}}{-\dot{Y}\dot{Z}\pm\dot{X}\sqrt{1-2\dot{Z}^2}}$$

一方，$\Delta\theta=\Delta\alpha$ だから

$$\Delta\theta=(d\alpha/dt)\Delta t$$

$$=\frac{1}{1-\dot{Z}^2}\left\{\pm\frac{\ddot{Z}}{\sqrt{1-2\dot{Z}^2}}+(\dot{X}\ddot{Y}-\ddot{X}\dot{Y})\right\}\Delta t$$

$$\therefore\quad \Delta\theta_1-\Delta\theta_2=\frac{2\dot{Z}^2}{(1-\dot{Z}^2)\sqrt{1-2\dot{Z}^2}}\Delta t$$

したがって

$$Z^2(\Delta\theta_1-\Delta\theta_2)/2=\frac{Z^2\ddot{Z}}{(1-\dot{Z}^2)\sqrt{1-2\dot{Z}^2}}\Delta t$$

すなわち，ΔS の前半部は $Z(t)$ の変動によってのみ決定される函数となっていることがわかる．

b) 次に，ΔS の後半部 $Z(\rho_1\Delta\theta_1+\rho_2\Delta\theta_2)$ について考える．

$\rho_1\Delta\theta_1+\rho_2\Delta\theta_2$ は Δt の間にできる包絡線の周長を意味しているので，これを Δl とおくと

$$\Delta l=\rho_1\Delta\theta_1+\rho_2\Delta\theta_2$$

$$=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\Delta t$$

(1)を代入して計算して

$$p=\frac{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}}{(1-\dot{Z}^2)\sqrt{1-2\dot{Z}^2}}$$

$$q=\frac{Z(\dot{X}\ddot{Y}-\ddot{X}\dot{Y})}{(1-\dot{Z}^2)}$$

とおくと

$$\Delta l=|p+q|\Delta t+|p-q|\Delta t$$

ここで $\Delta l_1=|p+q|\Delta t$, $\Delta l_2=|p-q|\Delta t$ とおくと，p は $Z(t)$ のみの函数，q は R^* の平面的な曲率に関係した値となっている．

ところで，R^* の平面的な曲率 k^* は任意にとれるのではなく，内接円の半径の函数によりその限界が規定され，それ以上となると包絡線を形づくらない．この条件を求める．

$$k^*=\frac{\dot{X}\ddot{Y}-\ddot{X}\dot{Y}}{(1-\dot{Z}^2)^{3/2}}$$

だから

$$q=k^*Z\sqrt{1-\dot{Z}^2}$$

ここで $(\Delta l_1^2+\Delta l_2^2)/\Delta t^2=(p+q)^2+(p-q)^2$ を考え，Z を固定し，変数を k^*（つまり q）とみなす．k^* の絶対値を大きくするにつれて，$\Delta l_1, \Delta l_2$ のうち，一方は大きくなり，他方は小さくなるはずである．この条件を満足する q の範囲を求めると，$|q|\leqq|p|$ である．

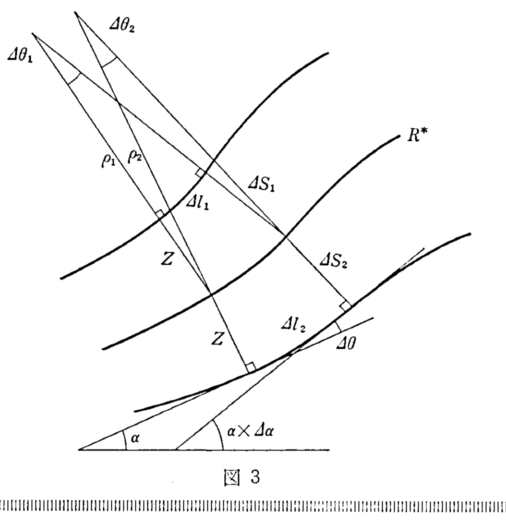

図 3

$|q|\leqq|p|$ だから

$$\Delta l=|p+q|\Delta t+|p-q|\Delta t$$
$$=2|p|\Delta t$$

$$\therefore\quad \Delta l=2\frac{|(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}|}{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}\Delta t$$

すなわち，閉曲線の周長は $Z(t)$ の変動によってのみ決定されることが判明した．

また，$Z(\rho_1\Delta\theta_1+\rho_2\Delta\theta_2)=Z\Delta l$ だから

$$Z(\rho_1\Delta\theta_1+\rho_2\Delta\theta_2)=2Z\frac{|(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}|}{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}\Delta t$$

となり，ΔS の後半部も $Z(t)$ の変動によってのみ決定されることがわかる．

したがって，a）の結果を考え合わせると，ΔS は $Z(t)$ の変動による函数となっていることがわかる．

さらに，単一閉曲線の平行閉曲線群を，立体を一定の厚みで水平面に平行に輪切りにしたものとみなすと，閉曲線によって規定される体積もまた，$Z(t)$ の変動によってのみ決定されるものであることがわかる．

以上より，単一閉曲線の周長，面積，および体積は R^* の高さの変動によってのみ決定され，R^* の $x-y$ 平面上の投影の変動には関与しないことが証明された．

次に，R^* の平面上の曲率 k^* の限界を求めてみる．

$|q|\leqq|p|$ だから

$$|k^*Z\sqrt{1-\dot{Z}^2}|\leqq\frac{|(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}|}{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}$$

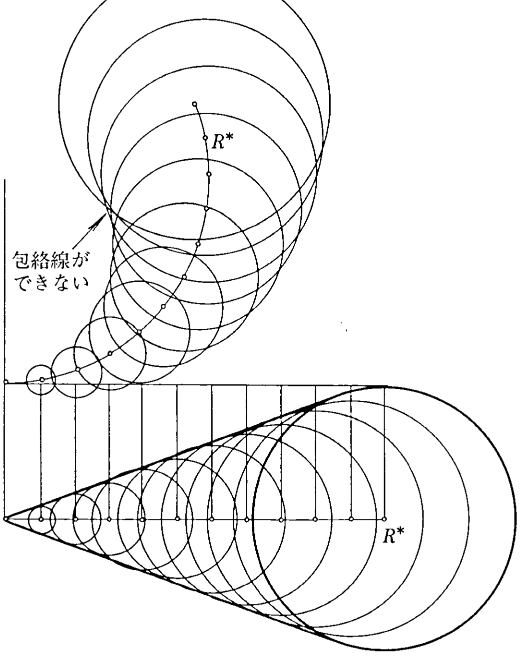

図4

$$\therefore\quad |k^*|\leqq\frac{|(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}|}{Z(1-\dot{Z}^2)^{3/2}(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}$$

すなわち，この範囲内で R^* の平面上の曲線を変化でき，また，その際に前述の周長，面積，および体積が一定に保存されるという法則が成立するのである．

単一閉曲線の周長，面積，体積は R^* の高さの変動にのみ関係することがわかったので，次にここでは，それらが実際にどのような式で表示されるかについて考察してみる．

まず，R^* の密な領域について．この領域は平面的には円，立体としては円錐の一部を成している．したがって，これらは，領域の端点の接線の成す角度とその際の内接円の半径により決定されるものであるが，ここではその式は略す．

次に，R^* の一点に対し，閉曲線上の二点が対応する領域について考察する．

R^* の $x-y$ 平面上での変動は関与しないのであるから，$Y=0$，すなわち $x-z$ 平面上に R^* があるものと仮定してもさしつかえない．

$Y=0$ のとき

$$x=X-Z\dot{Z}/\dot{X}$$
$$dx/dt=\dot{X}-\{(\dot{Z}^2+Z\ddot{Z})\dot{X}-Z\dot{Z}\ddot{X}\}/\dot{X}^2$$
$$=\frac{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}}{(1-\dot{Z}^2)^{3/2}}$$

ここで包絡線の性質として x は単調増加函数となっているから　$dx/dt\geqq0$

$$\therefore\quad (1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}\quad\geqq0$$

〈周長について〉

$$\Delta l=2\frac{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}}{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}\Delta t$$

$$\therefore\quad l=2\int_0^t\frac{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}}{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}dt$$

〈面積について〉

$$\Delta S=\frac{Z^2\ddot{Z}}{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}\Delta t$$
$$+\frac{2Z\{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}\}}{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}\Delta t$$
$$=Z\frac{2(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}}{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}\Delta t$$

$$\therefore\quad S=\int_0^t Z\frac{2(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}}{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}dt$$

〈体積について〉

微小区間により形づけられる立体を底面に平行な高さ h の平面で切ったときの切り口の面積は，$\Delta S(Z)$ において，$Z=Z-h$ とおいたものである．また，高さ h に

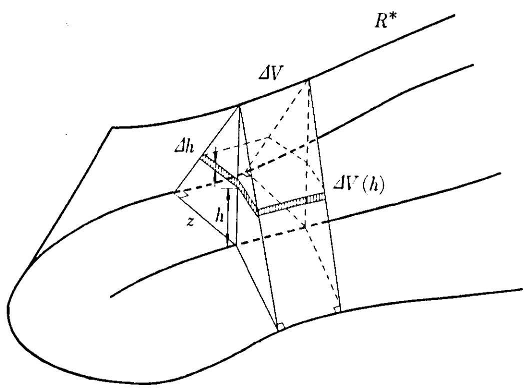

図 4

おける厚さ Δh の部分の体積を $\Delta V(h)$ とすると

$$\Delta V(h)=\Delta S(Z-h)\cdot\Delta h$$
$$=\frac{2(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)(Z-h)-\ddot{Z}(Z-h)^2}{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}\Delta t\cdot\Delta h$$

0 から Z まで積分すると微小区間の体積 ΔV が求まる．

$$\Delta V=\int_0^z \Delta V(h)$$
$$=\frac{Z^2\{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}/3\}}{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}\Delta t$$

次に ΔV を R^* に沿って 0 から t まで積分すると全体の体積 V が求められる．

$$V=\int_0^t \frac{Z^2\{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)-Z\ddot{Z}/3\}}{(1-\dot{Z}^2)(1-2\dot{Z}^2)^{1/2}}dt$$

4. 結果と考察

さて，閉曲線図形の内的性質として，その閉曲線図形の面積，周長，体積という要素を抽出して，それらの持つ性質の解析を行なった．ここで，その解析結果を考察してみよう．

われわれは，閉曲線図形に対し，その構造概念として R^* を導入し，この概念により，閉曲線図形の持つ性質を抽出しようとしているわけであるが，ここにおいても，閉曲線図形の面積，周長，それに内在する立体の体積という閉曲線図形の持つ量的な性質について R^* を媒介として解析を行なってみたわけである．

そこで，解析の結果として求められた，周長，面積，体積を求める式をみた場合，それらに共通する要素として，次のことが挙げられよう．すなわち，それらが，Z のみの函数として示されているということである。このことを具体的に考えてみると，Z とはすなわち，R^* の垂直方向の高さを示す函数であり（内接円の半径でもある），面積，周長，体積が，R^* の垂直方向の高さにのみ関係をもつということに結論づけられる．

逆な見方をすれば，平面的な R^* の形態がどうあろうと，高さ関係が同じ形態を示すならば，それらの閉曲線の周長，面積，あるいは閉曲線図形に内在する立体の体積は皆等しいといえるであろう．また別な言い方をするならば，閉曲線図形が与えられた場合に，それの持つ R^* を中心とし，R^* の高さにおける形態を保存した範囲内で，閉曲線図形全体を曲げることが可能であるということである．

さて，2本の平行曲線に関する良く知られた性質によると，次のことがわかっている．すなわち，2本の平行曲線により形成される図形の面積は，それら2本の平行曲線の中心線の長さに平行間隔を乗じたものに等しい．この記述において，2本の平行曲線の中心線というものは他ならぬ R^* に等しいものである．このことより，3. で行なわれた解析結果を平行線の場合に適用してみよう．

平行線の場合 $Z=a$（一定でしかも平行間隔の 1/2）

$$\dot{Z}=\ddot{Z}=0$$

より
$$l=2\int_0^t dt=2t$$
$$S=2\int_0^t a\,dt=2at$$
$$V=\int_0^t a^2\,dt=a^2\cdot t$$

ただし　$|k^*|\leqq 1/a$　　k^*: 曲率
　t: 平行線の長さ

と示される．

これらの式によっても，2本の平行線の間の面積が，中心線の長さに，平行間隔を乗じたものとなっていることが示される．

このことより，この報告においてなされた解析の内容は，この平行曲線における面積の求め方の一般化とも考えられよう．いずれにせよ，閉曲線図形における構造概念としての R^* を媒介として，図形の持つ量的な性質が求められてゆき，そこに，特異な性質が示されているということが明確にされ，閉曲線図形を把握してゆくための一つの段階が踏まれたことは確かであろう．

(1972年8月25日受理)