

# 合せ板圧延の初等理論による一考察

A Study on Rolling of Bilayer Metal Plate

—密度変化を伴う材料の応力解析—

—Fundamental Analysis of Stress & Strain Distribution in Rolling Sintered Metal—

鈴木 弘\*・荒木甚一郎\*・古堅 宗勝\*・饗場 誠\*

Hiromu SUZUKI, Jinichiro ARAKI, Munekatsu FURUGEN and Makoto AIBA

## 1. まえがき

材料特性の異なる金属を重ね合わせて圧延する合せ板圧延では、普通の圧延の問題の検討に際しては省略し得る諸特性の中にも影響を及ぼすものがあり、これを省略し得ない性格がある。したがって、この問題の研究は、圧延理論体系を一層厳密にするうに役立つので、重要な研究であるが、非対称変形のために厳密な解析には困難が多く、そのためまだ行なわれていない。しかし、これまでに筆者らが行なったバイメタル圧延、圧着圧延の場合の解析的な研究の結果、初等圧延理論によっても合せ板圧延の力学的な特性をある程度把握できることがわかった。今回は、さらに対象を拡張して、両材料がロール入口ですでに接着しており、かつ一方の材料が密度変化を伴う場合について考察する。

## 2. 解析の方針

一方の材料が密度変化を伴う場合には圧延条件の変化に対応して合せ板厚比（密度変化材の板厚／総板厚）が変化する。筆者らは、密度変化を伴う材料の降伏条件式および応力—歪関係式を用いて圧延理論式を導き、圧延過程における垂直応力・水平応力・合せ板厚比を求め、密度変化材の圧延における変形機構を解析した。

解析に用いる主な仮定は、

- i) 圧延中、各材料の垂直断面は平面を保持する。
- ii) ロールおよび材料の弾性変形は無視し、密度変化材は降伏条件式  $f = AJ_1^2 + J_2' - B^2 = 0$  に従って変形するものとする<sup>1)</sup>。
- iii) 水平応力  $q_s \cdot q_h$  および垂直応力  $p$  は主応力とする。
- iv) 圧延の全過程で、両材料の接着面において滑りを生じないものとする。

## 3. 記号

$s \cdot h$	各材料を表わす添字
$T \cdot T_s \cdot T_h$	入口での板厚 (mm)
$t \cdot t_s \cdot t_h$	出口での板厚 (mm)
$y \cdot y_s \cdot y_h$	任意の点における板厚 (mm)

\* 東京大学生産技術研究所 第2部

$p$	垂直応力 (kg/mm <sup>2</sup> )
$p_s \cdot p_h$	ロール面圧力 (kg/mm <sup>2</sup> )
$q$	平均水平応力 (kg/mm <sup>2</sup> )
$q_s \cdot q_h$	水平応力 (kg/mm <sup>2</sup> )
$p_s \cdot h$	接着面圧力 (kg/mm <sup>2</sup> )
$\tau_0$	接着せん断応力 (kg/mm <sup>2</sup> )
$R_s \cdot R_h$	ロール半径 (mm)
$x$	出口から測った水平距離 (mm)
$\theta_s \cdot \theta_h$	ロールと材料の接触角 (rad.)
$\theta_{sh}$	両材料の接触角 (rad.)
$\mu_s \cdot \mu_h$	摩擦係数
$\epsilon_x \cdot \epsilon_{x_s} \cdot \epsilon_{x_h}$	水平方向歪
$\epsilon_y \cdot \epsilon_{y_s} \cdot \epsilon_{y_h}$	垂直方向歪
$A \cdot A_s \cdot A_h$	材料特性に関するパラメータ
$B \cdot B_s \cdot B_h$	材料特性に関するパラメータ
$R \cdot r$	入口および任意の点の合せ板比 ( $T_s/T, y_s/y$ )

## 4. 密度変化を伴う材料の降伏条件式と 応力—歪関係式

### (1) 密度変化材の降伏条件式

$$f = AJ_1^2 + J_2' - B^2 = 0 \tag{1}$$

ただし、 $J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ,  $J_2' = \frac{1}{6} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}$   $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  は主応力

また、 $A, B$  は、圧延材の材料特性に関するパラメータである。

ここで  $A$  は体積歪の関数であるが、本論文では (2) 式のように直線的に変化するものとする。

$$A = A_0 + K \int d\epsilon_v \quad (K \text{ は比例定数}) \tag{2}$$

ただし、 $A_0$  は体積歪の無い状態における  $A$  の値である。 $B$  は一定として取扱う。

### (2) 密度変化材の応力—歪関係式

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda(\sigma_{ij}' + 2AJ_1\delta_{ij}) \tag{3}$$

ただし、 $d\lambda$ : 負値でない係数  $\delta_{ij}$ : Kronecker のデルタ記号

### (3) 平面歪場における降伏条件式および応力—歪関係式

$s$  材に関して

$$\left. \begin{aligned} \alpha_s(p^2 + q_s^2) - \beta_s p q_s - B_s^2 &= 0 \\ \alpha_s &= \frac{12A_s + 1}{4(3A_s + 1)}, \quad \beta_s = \frac{6A_s - 1}{2(3A_s + 1)} \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

$$d\epsilon_{x_s} = d\epsilon_{y_s} \frac{(12A_s + 1)q_s - (6A_s - 1)p}{(6A_s - 1)q_s - (12A_s + 1)p} \quad (5)$$

ただし、 $p$  は圧縮側を正とし、 $q_s$  は引張側を正とする。(4) 式は図 1 にしめすような楕円で  $A$  の値が小さくなる程長軸が長くなり、 $A=0$  のときは、Mises の降伏条件  $|p+q_s|=2B_s$  に帰着する。 $h$  材についても同様にして平面歪場における降伏条件式 (6)、応力-歪関係式 (7) が求まる。

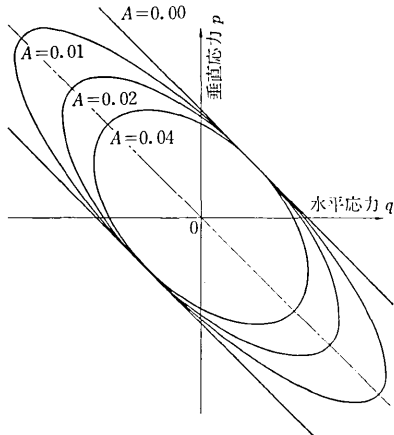


図 1 密度変化を伴う材料の降伏曲線

$$\left. \begin{aligned} \alpha_h(p^2 + q_h^2) - \beta_h pq_h - B_h^2 &= 0 \\ \alpha_h &= \frac{12A_h + 1}{4(3A_h + 1)}, \quad \beta_h = \frac{6A_h - 1}{2(3A_h + 1)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$d\epsilon_{x_h} = d\epsilon_{y_h} \frac{(12A_h + 1)q_h - (6A_h - 1)p}{(6A_h - 1)q_h - (12A_h + 1)p} \quad (7)$$

5. 圧延理論

ロール出口から任意の距離  $x$  離れた点の微小要素に働く力を図 2 にしめす。図 2 は中立点より入口側における力の釣合であるが出口側については、ロールと材料間の摩擦力の向きを逆にすることにより同様に扱える。

- (1)  $s$  材に関する力の釣合
- イ) 水平方向の釣合

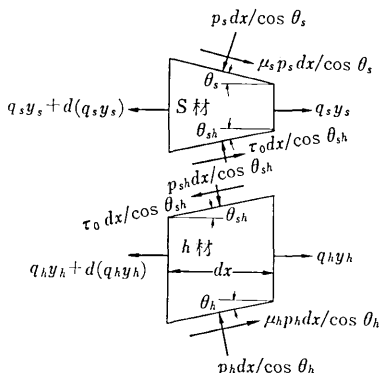


図 2 ロール間隙における微小要素に働く力

$$d(q_s y_s) = p_s (\mu_s - \tan \theta_s) dx - p_{sh} \tan \theta_{sh} dx + \tau_0 dx \quad (8)$$

- ロ) 垂直方向の釣合

$$p dx = p_s (1 + \mu_s \tan \theta_s) dx = p_{sh} dx + \tau_0 \tan \theta_{sh} dx \quad (9)$$

(8)・(9) 式から

$$\frac{d(q_s y_s)}{dx} = p \left( \frac{\mu_s - \tan \theta_s}{1 + \mu_s \tan \theta_s} - \tan \theta_{sh} \right) + (1 + \tan^2 \theta_{sh}) \tau_0 \quad (10)$$

- (2)  $h$  材に関する力の釣合
- イ) 水平方向の力の釣合

$$d(q_h y_h) = p_h (\mu_h - \tan \theta_h) dx + p_{sh} \tan \theta_{sh} dx - \tau_0 dx \quad (11)$$

- ロ) 垂直方向の釣合  $p dx = p_h (1 + \mu_h \tan \theta_h)$  (12)

(11), (12) 式から

$$\frac{d(q_h y_h)}{dx} = p \left( \frac{\mu_h - \tan \theta_h}{1 + \mu_h \tan \theta_h} + \tan \theta_{sh} \right) - (1 + \tan^2 \theta_{sh}) \tau_0 \quad (13)$$

(10), (13) 式および  $qy = q_s y_s + q_h y_h$  (14) の関係から

$$\frac{d(qy)}{dy} = p \left( \frac{\mu_s - \tan \theta_s}{1 + \mu_s \tan \theta_s} + \frac{\mu_h - \tan \theta_h}{1 + \mu_h \tan \theta_h} \right) \quad (15)$$

(15) 式において  $dy/dx$  は幾何学的関係から求まるから  $p$  と  $q$  の関係式が求まれば解ける。

- (3)  $s \cdot h$  両材料がともに降伏している場合の  $p$  と  $q$  の関係式

(14) 式の  $q_s, q_h$  に (4)・(6) 式を代入して

$$q = \frac{\beta_s p + \sqrt{p^2(\beta_s^2 + 4\alpha_s^2) + 4\alpha_s B_s^2} \cdot y_s}{2\alpha_s y_s} + \frac{\beta_h p + \sqrt{p^2(\beta_h^2 - 4\alpha_h^2) + 4\alpha_h B_h^2} \cdot y_h}{2\alpha_h y_h} \quad (16)$$

(17) 式中の  $y_s \cdot y_h$  は仮定 iv) から (5)・(7) 式を等置することにより定まる。

- (4) 一方の材料が未降伏の場合の  $p$  と  $q$  の関係

圧延の条件によっては一方の材料のみが降伏する領域が存在する場合がある。この場合仮定 ii) および仮定 iv) から  $d\epsilon_{x_h} = d\epsilon_{x_s} = 0$  (17)、今、 $s$  材のみが降伏するとすれば  $d\epsilon_{y_s} \neq 0$  (18) したがって (19) 式が成立する。

$$(12A_s + 1)q_s - (6A_s - 1)p = 0 \quad (19)$$

(4) 式と (19) 式から

$$p = \sqrt{\frac{12A_s + 1}{9A_s}} B_s \quad (20), \quad q = -\sqrt{\frac{(6A_s - 1)^2}{9A_s(12A_s + 1)}} B_s \quad (21)$$

$h$  材に加わる水平応力  $q_h$  は (21) 式から得られる  $q_s$  を (14) 式に代入して求まる。 $h$  材のみが降伏する場合も同様にして求まる。以上の計算の流れを図 3 にしめす。

6. 計算結果

解析は一般性を考慮して両材料が密度変化する場合に

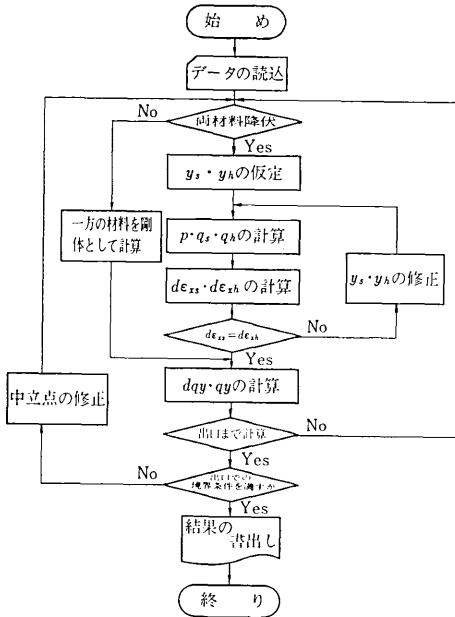


図3 計算の流れ図

ついて導びいたが、実際の圧延作業に应用する場合には一方のみが密度変化する場合が多いので、ここでは  $s$  材のみが密度変化する場合についてしめす。

図4は、パラメータ  $A_0$  を変化させた場合の計算結果である。 $A_0=0$  の場合は密度変化の生じない普通のバイメタル圧延の場合に相当し合せ板厚比は変化しないが、

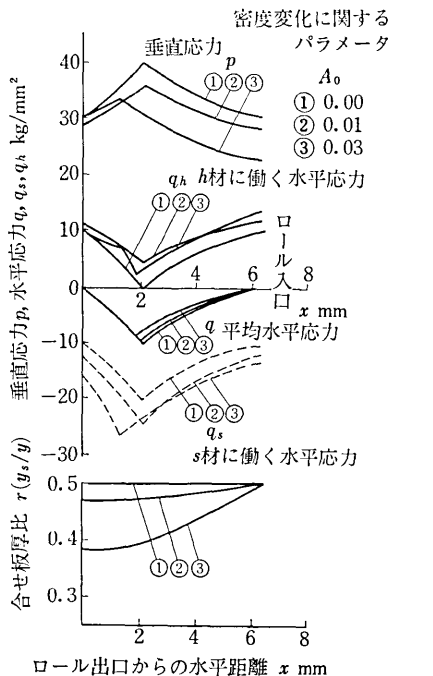


図4 パラメータ  $A_0$  が垂直応力  $p$  水平応力  $q, q_s, q_h$  および合せ板厚比  $\tau$  に及ぼす影響

$A_0=0.01$  の場合には合せ板厚比が 0.5 から 0.47 に変化している。また、 $A_0 \neq 0$  で、合せ板厚比が変化する場合においても、 $A_0=0.01$  の場合には、ロール入口から出口までの全領域において両材料が降伏するのに対して、 $A_0=0.03$  の場合には、一方の材料のみが降伏する領域が存在する。

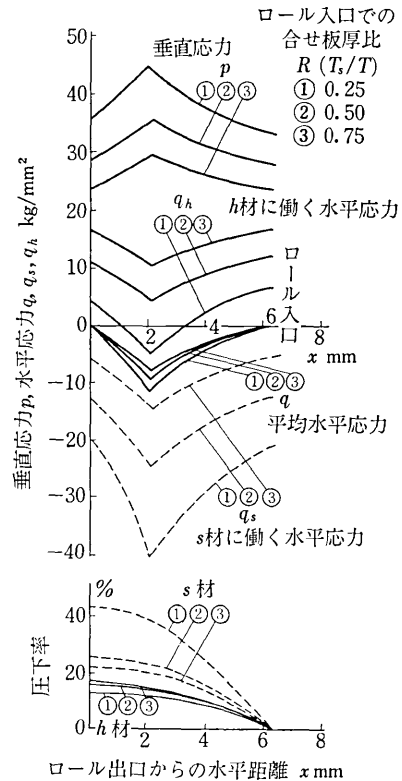


図5 ロール入口での合せ板厚比が  $R$  垂直応力  $p$ , 水平応力  $q, q_s, q_h$  および圧下率に及ぼす影響

図5はロール入口での合せ板厚比  $R(T_s/T)$  を変化させた場合の計算例である。密度変化材の圧下率は、合せ板厚比が小さい程大きくなる。これは密度変化材に加わる水平応力が合せ板厚比が小さい程圧縮方向に増大するため、密度変化材に働く静水圧力が増大し、体積歪が増大するためと考えられる。

7. まとめ

密度変化を伴う材料の降伏条件式と応力歪関係式を導入して初等圧延理論を用いて数値解析することにより、密度変化を伴う材料の合せ板圧延に関する理論的考察の手法を明らかにし、一方の材料のみが密度変化を生じる場合の数値計算例をしめした。(1972年6月14日受理)

参考文献

1) 鈴木・古堅：昭47春週加講論 (1972)