



156

学位請求論文

実時間多段行列乗算用光学系の  
構成法とその応用に関する研究

指導教官

保立 和夫 講師

東京大学大学院  
工学系研究科  
電気工学専門課程  
I9662

中野 秀俊

# 目 次

## 第1章 序論

1-1. はじめに	1
1-2. 光学系による行列演算の研究	2
1-2-1. 空間積分法による実時間行列乗算	3
1-2-2. 光シストリック演算による行列乗算	5
1-2-3. 外積演算法による行列乗算	8
1-2-4. 集積化の試み	10
1-2-5. その他の行列演算	10
1-3. 本論文の目的・構成	12
参考文献	15

## 第2章 インコヒーレント光学系を用いたベクトル-行列乗算

2-1. はじめに	21
2-2. ベクトル-行列乗算用光学系の概念	22
2-3. 行列-行列乗算用光学系への拡張	24
2-4. まとめ	25
参考文献	25

## 第3章 実時間多段行列乗算用光学系の構成 I

### —— リニア光源アレイを用いた構成 ——

3-1. はじめに	27
3-2. 光学系の構成	28
3-3. 光学系の拡張方法	33
3-4. 光学系における演算誤差	36
3-4-1. 一方向拡散板の拡散指向性	36
3-4-2. 演算誤差の定式化	38
3-4-3. 行列マスク開口寸法と最大演算誤差との関係	42
3-4-4. 行列の次元と最大演算誤差との関係	44
3-4-5. 演算誤差の補償法	47
3-5. 基礎実験	51
3-6. まとめ	55
参考文献	58

## 第4章 実時間行列乗算用光学系の演算性能に関する基礎検討

4-1. はじめに	60
-----------	----

4-2. 任意複素成分を有する行列の扱い方	60
4-2-1. 1の立方根による展開	61
4-2-2. 1の4乗根による展開	63
4-3. 演算可能な行列の大きさ	64
4-3-1. 行列マスク開口における回折	64
4-3-2. 演算可能な行列の大きさ	65
4-4. 演算誤差と演算速度との関係	69
4-4-1. 演算精度を制限する要因	69
4-4-2. 行列マスク開口における回折と演算誤差	70
4-4-3. 演算誤差と演算速度との関係	72
4-4-4. 使用するデバイスへの要求	74
4-5. まとめ	75
参考文献	77

## 第5章 実時間多段行列乗算用光学系の構成Ⅱ

### —— 2次元光源アレイを用いた構成 ——

5-1. はじめに	78
5-2. 光学系の構成	79
5-3. 光学系の動作原理	82
5-3-1. 光学系動作の証明	82
5-4. 光学系の拡張方法	85
5-5. 光学系の演算性能に関する基礎検討	87
5-5-1. 演算可能な行列の大きさ	87
5-5-2. 演算速度と演算精度との関係	90
5-5-3. 使用するデバイスへの要求	93
5-6. 2種類の光学系構成の相互比較	93
5-7. 基礎実験	97
5-7-1. 基礎実験Ⅰ	97
5-7-2. 基礎実験Ⅱ	101
5-8. まとめ	103
参考文献	104

## 第6章 デジタル演算法の導入

6-1. はじめに	106
6-2. 行列-行列乗算用のコーディング	106
6-2-1. 内積演算法に基づくコーディング	107
6-2-2. 外積演算法に基づくコーディング	109
6-2-3. 時系列入力によるデジタル的乗算	111
6-2-4. 純二進符号への変換	113
6-3. 多段行列乗算用のコーディング	115

6-3-1. 空間的コーディング手法	115
6-3-2. 時系列入力によるデジタル的乗算	118
6-4. 基礎実験	121
6-5. デジタル演算導入に伴う問題点	123
6-6. まとめ	125
参考文献	126

### 第7章 実時間多段行列乗算用光学系の応用

7-1. はじめに	129
7-2. フィードバック機構と逆行列	129
7-3. 逆行列演算用光学系	131
7-3-1. 逆行列演算用光学系の構成・動作	132
7-3-2. 逆行列演算実行時の演算誤差に関する基礎検討	134
7-4. まとめ	138
参考文献	139

### 第8章 結論

#### —— 今後の研究への期待と展望 ——

8-1. はじめに	140
8-2. 種々の数表現	142
8-3. まとめ	144
参考文献	145

### 付 録

付録A. 一方向拡散板の拡散指向性	148
付録B. 行列マスク内の開口間隔の一つの目安	151
付録C. 逆行列演算実行時の演算誤差	153
参考文献	157

### 謝 辞

本研究に関する発表文献



# 第 1 章

## 序 論

### 1-1. はじめに

レーザ技術の進歩ならびに光ファイバの開発に代表されるように、近年新しい良質の光デバイスが得られるようになった。これに伴って、通信ならびに計測の分野での光波応用技術の研究も盛んに行われ、一部のものは既に実用化の段階に達している。

通信・計測と共に重要な光波応用分野として、「情報処理」が掲げられる。この光波応用情報処理の研究は、光通信・光計測の研究よりも遙かに古い歴史を有する。ここでも、近年の光素子技術の進歩とあいまって、「光コンピューティング」という研究分野が確立された。さらには、「光コンピュータ」という標語まで登場し、この領域の研究が活性化され、世間の注目ならびに期待を集めている[1]-[10]。しかし、現段階では、未だ、この標語（概念）に対する明確な定義が存在している訳ではない。古典的な光情報処理の研究のときから、光波の重要な性質として「並列情報伝達性」、「並列情報処理性」が掲げられてきた。これらの性質が、今後の「光コンピューティング技術」の中でも、大いに活用されてゆくことが期待される。したがって、この分野の研究の大きな目標の一つとして、光波の持つ「並列性」を最大限に発揮し得るような新しい情報処理システムの開発が掲げられよう。

自然科学および工学などの分野において、行列演算の果たす役割は極めて重要なものである。しかし、一般に行列の演算は、多数個のスカラ

乗算ならびに加算を並列に含んでいる。そのために、在来のノイマンタイプの電子計算機を用いて行列演算を実行すると膨大な繰返し演算を実行しなくてはならない。つまり、行列演算は非常に重要な線形演算であるにもかかわらず、その実行には非常に長い演算時間を必要としているのが現状のようである。

一方、先程も述べたように、光波応用情報処理における最大の特徴として、「並列情報伝達性」ならびに「並列情報処理性」が掲げられる。したがって、こうした光波の特徴を十分に活用した行列演算手法を開発することにより、演算時間を短縮すること、少なくとも、演算に必要な負荷を軽減することの可能性が期待される。こうした観点から、既に行列演算のための光学的手法に関する研究成果が、数多く報告されている。また、こうした光学的手法を活用した行列演算は、「光コンピューティング技術」のうちで最も実用化に近いものの1つであるとも思われる。

行列演算のうちで最も並列性の高い、すなわち、光波応用によるメリットの大きい基本演算は、行列同士の乗算である。ちなみに、 $N$ 次正方行列同士の乗算するためには、 $N^3$ 個のスカラ乗算とスカラ加算とを並列に実行しなくてはならない。これまでに報告されている行列乗算のための光学的手法は、その並列度（通常、光学系中で並列に実行されるスカラ乗算の数で評価される）あるいは行列乗算のために使用するアルゴリズムなどの面から種々の分類法が可能である[11]—[13]。これらは、それぞれに一長一短がある。次節において、これらを概観しよう。

## 1-2. 光学系による行列演算

本節では、光学的手法を用いた行列演算、特に行列乗算の研究の歴史を概観する。

光学系を用いた行列乗算の可能性を初めて示唆したのは、1965年に刊

行された書物中の記述[14]のようである。L.J.Cutrona は、この記述の中で、コヒーレント光学系による畳み込み演算の一応用例としてベクトル-行列乗算の可能性を指摘している。ただし、近年の研究において引用される論文として最古のものは、カーネギーメロン大学のR.A.Heinzらによる論文[15]である。したがって、この研究を行列演算のための光学的手法に関する研究の出発点と考えてよいであろう。彼らはフーリエ変換光学系を使用した畳み込みの応用として、行列乗算のための光学的手法を理論的[15]にも、実験的[16]にも検討した。ただし、この方法には、不要な出力成分項が発生するという欠点がある。その後、LEDと2次元空間光変調器とを組み合わせ構成したインコヒーレント光学系を用いて時系列入力を伴う行列乗算手法が、米国海軍電子研究センターのR.P.Bockerによって提案され[17]、不要出力項の発生に関する問題点が解消された。Bockerの提案以降、光学的手法による行列乗算の研究が活発に行われている。

#### 1-2-1.空間積分法による実時間行列乗算

Bockerが示した概念を拡張し、空間内の並列性のみを用いてベクトル-行列乗算の実時間演算を可能とした光学系が、1976年にスタンフォード大学のJ.W.Goodmanらによって提案された[18]。彼らは、ベクトルをLEDアレイで、行列を2次元空間光変調器で表すことによって、ベクトル-行列乗算の実時間演算が可能となることを提案した。この考え方は、この後の研究に対して大きな影響を及ぼしている。彼らが提案した光学系（あるいは概念）のことを、「スタンフォードプロセッサ」ということがある[12]。

完全に空間内の並列性のみを用いた行列-行列乗算用の光学系として、1975年に南アフリカ国立物理学研究所のW.Schneiderらによって、特殊な球面レンズアレイを使用する投影光学系が提案された[19]。この光学系の持つ欠点（回折による漏話が大きく、極めて小規模の行列しか乗算

できない)を解消した光学系が、1976年にアリゾナ大学のP.N.Tamuraらによって提案された[20]。この光学系でも、行列同士の乗算のためには、相互に偏りを有する特殊な微小シリンドリカルレンズアレイ(これはホログラフィック素子として作ることができる)を用いる必要がある。

特殊なレンズアレイを使用する代わりに色の異なる光源のアレイとグレーティングとを使用する手法が、カーネギーメロン大学のD.Psaltisらによって示されている[21]。

また、ホログラフィック光配線を用いた行列乗算手法も、ミシガン環境研究所のA.R.Diasによって検討されている[22]。ただし、この手法によって行列-行列乗算を行うときには、行列を $N^2$ フォーマット(空間的な重複度のない通常のマトリクス表示)に保つために、ホログラフィック素子を時系列で移動させなくてはならない。この点を解消するために、乗算される行列の一方を $N^3$ フォーマット(空間的に行列を $N$ 回重複させる表示法)で与え、多焦点ホログラフィックレンズを使用する手法が、ジェット推進研究所のY.Z.Liangらによって提案された[23]。

これらは、いずれも「内積演算法」(数学の定義通りの演算)に基づくものであり、ベクトル-行列乗算を並列に実行することに基礎を置いている。さらに、入力行列(空間光変調器内の画素の透過率・反射率、あるいは、入力光強度分布によって行列成分の値を与える)が演算実行中は固定されている点に特徴がある。また、1フレームごとに得られる演算結果がそれぞれ意味を持ち、後処理を必要としない。この点で、ストリック演算あるいは外積演算法に基づく演算手法と大きく異なっている。本論文で提案する実時間多段行列乗算用光学系も、この範疇に属するものである。

これまでに紹介した一連の空間的な並列性のみを用いた演算手法の特徴を纏めると、次のようになる。

- (1) 空間的に完全な並列演算を実行しており、光波の持つ並列性を最大限に応用している。つまり、行列積を実時間的に計算することができる。

(2) 光源・光検出器・空間光変調器の動作速度が高速であれば、超高速演算を実行することが可能である。すなわち、素子の性能が向上すれば、この後に述べるどの演算手法によるものよりも、アナログ演算の実行速度は速くなる可能性を秘めている。

(3) この方式では、固定の行列マスクが必要である。また、本方式の特徴である超高速性を実現するためには、応答速度の速い空間光変調器が必要である。しかし、現段階では、この要求を十分に満たし得る素子を得ることは困難である。

Goodmanらは、このベクトル-行列乗算用光学系を使用して逆行列演算[24]あるいは固有値計算[25]等を実行する手法に関しても、検討している。以上に述べた固定行列マスクを使用する行列乗算法の概念については、次章で詳しく説明する。

固定行列マスクを使用する行列演算手法は、演算のためのアルゴリズムが数学の定義通りであり、素直である。これに対し、特徴のあるアルゴリズムを使用した行列乗算の手法としては、「光シストリック演算」と「外積演算 (Outer-Product Decomposition) 法」とが掲げられる。

### 1-2-2.光シストリック演算による行列乗算

「シストリック演算」は、VLSI技術の進歩に伴う演算速度と入出力速度とのアンバランスの問題を解決するための手法として、カーネギーメロン大学のH.T.Kungらによって提案されたものである[26], [27]。このアルゴリズムでは、図1-1に示すように、クロック信号に同期してデータの採取・演算・転送を実行することによって、全体の計算が進行してゆく。

LEDアレイ・CCD・音響光学変調器とを用いることによりシストリック演算を光学的に実行する初めての試みが、Innovative Optics社

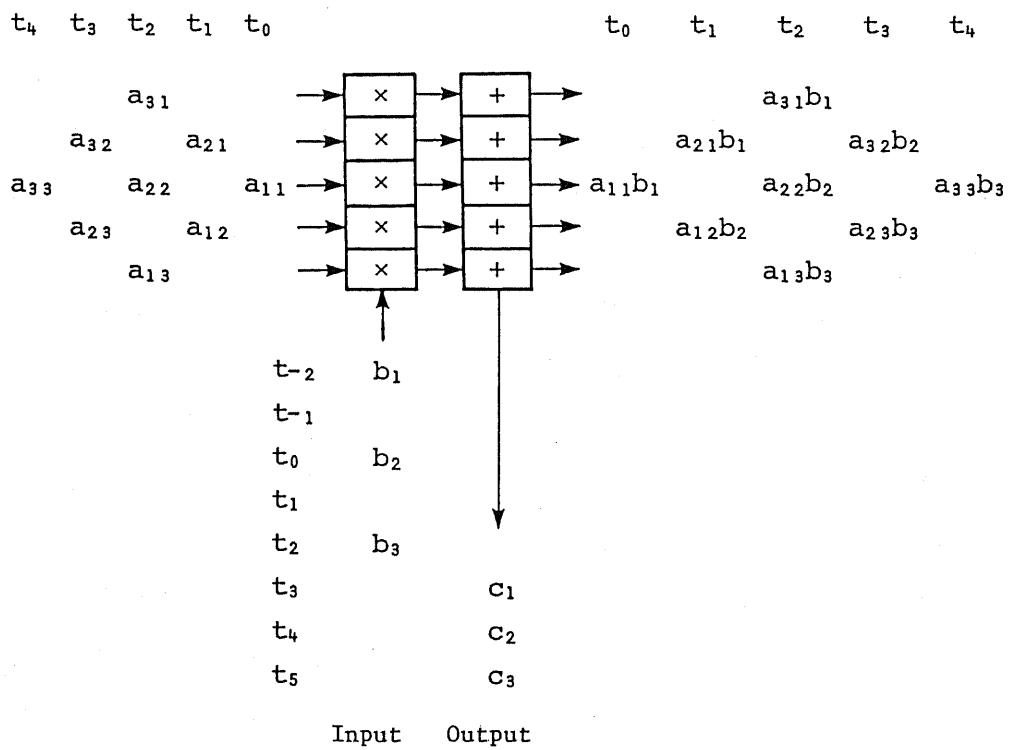


図 1 - 1 . シストリック演算を用いた行列 - ベクトル乗算 [36]

のH.J.Caulfieldらによって1981年に提案された[28]。彼らの提案によれば、音響光学変調器内を伝播する超音波パルスの強度としてベクトル成分を与え、その入力タイミングは超音波が光源素子間隔だけ進むのに要する伝播時間によって定められる。また、光源素子からの入力光パルス強度は被乗算行列の成分を与え、その入力タイミングも超音波の伝播に同期させる。このとき同時に、出力はCCDによって入力と同期して転送され、加算される。この光シストリックプロセッサの特徴を纏めると次のようになる。

- (1) 固定した行列マスクが不要である。そのため、音響光学変調器の優れた特性を活用することができる。
- (2) 元来、電子的な演算用に開発されたアルゴリズムを使用しており、入出力が時系列になっている。そのため、在来の電気系との整合の点で有利である。

以上のような特徴を有する光シストリックプロセッサは、現存のデバイスを使用して高性能のものを実現することができる。そのために、光シストリックプロセッサには、数多くのバリエーションが存在し、光学的な行列演算手法の主流となりつつある。以下、この方式を用いた行列演算の研究例を手短に紹介する。

シストリック演算発祥の地カーネギーメロン大学のD.Casasentらは、以前から音響光学変調器を用いた反復型光ベクトル-行列乗算用光学系を検討していた[29]-[31]が、これに対してシストリック演算が適用可能であることを考え[32]、さらに、音響波の周波数を多重化することによる性能向上の可能性を示した[33]、[34]。また、デジタル演算の導入を前提として帯行列の乗算を効率よく実行するためにマルチチャネルの音響光学変調器を利用する手法も提案した[35]。

また、Aerodyne研究所のP.S.Guilfoyleは、光シストリック演算器にデジタル乗算を導入したSAOBIC(Systolic Acousto-Optic Binary Convolver)プロセッサを提案し、現存のスーパーコンピュータを遙

かに凌駕する性能を実現し得ることを示した[36]。なお、同種の光学系においてエンゲージメントデータフローを用いても行列乗算が可能であることが、カリフォルニア工科大学のD.Psaltisらによって示されている[37]。

以上の例はすべて遅延線としてCCDと音響光学変調器とを利用して、光ファイバ中の光波の伝播遅延を利用する方式もスタンフォード大学のJ.W.Goodman, H.J.Shawらによって検討されている[38]。この方式では、行列成分は光ファイバカップラの結合係数を制御することによって与えられ、テーブリック行列とベクトルとの乗算に対して有効である。この光学系でファイバカップラの代わりに、外部からの信号により結合係数を高速に制御できる導波路型カップラを用いることにより、任意の行列の乗算が実行可能になることを電子技術総合研究所の石原氏らが示している[39]。

さらに、偏光ビームスプリッタと反射型空間光変調器とを立体的に組み合わせた光シストリック演算装置が、米国海軍海洋システムセンターのR.P.Bockerらによって提案された[40]。RUBIC Cube (Rapid Unbiased Bipolar Incoherent Calculator Cube) プロセッサと呼ばれるこの演算装置は、三次元空間を巧みに利用して、単純な構成に纏めている点で優れている。なお、このRUBIC Cubeプロセッサの構成で、光の入力面内に透過型空間光変調器を設置することによって、ある種の行列3重積演算も可能になるとされている[41]。

光シストリックプロセッサを使用して、さらに高度な線形演算（固有値計算・線形連立方程式の求根など）を実行する手法についても検討されている[42]—[46]。また、そのときの演算誤差についても詳しい解析が行われている[47]—[49]。

### 1-2-3. 外積演算法による行列乗算

行列Aと行列Bとの積Cを求める手順を、次式に示すように変更した



演算手法を「外積演算法」という（ここでいう、「外積演算法」とは、“Outer-Product Decomposition”の訳であり、ベクトル解析で使われる「ベクトル積」とは全く異なる概念である点に注意して頂きたい）。

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj} \quad (1-1)$$

$$C = \sum_{k=1}^N C^{(k)} \quad (1-2)$$

$$C_{ij}^{(k)} = a_{ik} b_{kj} \quad (1-3)$$

ここで、各ステップのベクトル乗算（相関行列の演算）は、単にスカラ同士の乗算を実行するだけであるから、簡単な構成の光学系を使用することによって容易に実行することができる。このことは、1982年に米国海軍研究所のR.A.Athaleらによって提案された[50]。光学系を介して得られる各ステップの演算結果は、後処理の段階で電氣的に並列に加算される。この演算手法の特徴を纏めると次のようになる。

- (1) 1次元素子を巧みに使用しており、現在入手可能な素子の特性との整合が良好である。
- (2) 特に固定マスクを必要とせず、空間光変調器の書き換え等に伴う応答速度の問題が回避される。

この外積演算の概念は、非常に重要なものであり、その応用範囲は非常に広い[51]。行列2個の乗算に留まらず、この概念を用いることによって、行列3重積演算も容易に実現し得ることが実験的にも示されている[52], [53]。また、ヒューズ研究所のB.H.Sofferらは、1次元の電気光学変調器アレイを積層化して、外積演算法に基づいた行列乗算器が構成できることを提案した[54]。彼らが提案した光学系は、行列乗算以外にも応用可能な構成になっている。

なお、本論文に示す光学系においても、この外積演算の概念が一部で応用されている。

#### 1-2-4.集積化の試み

以上に紹介した光学系は、すべてバルク型の素子を使用するものである。これらに対し、「光シストリックプロセッサ」を集積化することも試みられている。カリフォルニア大学のC.S.Tsaiらは、ニオブ酸リチウム基板上にブラッグセルとレンズとを構成し、集積型の行列乗算器を構成した[55]。また、Battelle Columbus 研究所の C.M.Veberは、集積型の行列乗算器の性能に関して理論的な検討を行っている[56]。

#### 1-2-5.その他の行列演算

前項までに紹介したものは、すべて行列の乗算に関する研究である。これら以外にも、巡回行列・テータリッツ行列の持つ特殊な性質を活用し、行列の対角化あるいは逆行列演算をコヒーレント光学系を用いて実行する手法が、スタンフォード大学の J.W.Goodmanらによって検討されている[57], [58]。また、カリフォルニア大学の G.Lewakらは、彼らが以前から検討していた共焦点ミラー対によって構成したコヒーレントフィードバック光学系を応用することによって、逆行列演算が可能であることを報告している[59]。

以上、これまでに検討されてきた光学的な行列演算手法を紹介した。このうち、行列乗算のための光学的手法を、使用するアルゴリズムならびに光学系中で並列に実行されるスカラ乗算数との観点から分類して、表1-1に示す。

表 1 - 1 . 行列乗算用光学系の分類

(表中の数字は、文献番号)

アルゴリズム 並列度	内積演算	外積演算	シストリック演算
$N^3$	[19], [20], [21], [22], [23] 実時間行列-行列乗算		[33] (周波数多重)
$N^2$	[18], ([29]) ベクトル-行列乗算	[50], [54]  [37]	[40] ルービック キューブ [32], [36], [37] マルチチャネル A O
$N$	[17]		[28], [38], [55], [56]

### 1-3. 本論文の目的・構成

本論文の目的は、多数個の行列同士の積を実時間的に、しかも、光出力として与え得るインコヒーレント光学系（実時間多段行列乗算用光学系）を提案し、この光学系の構成方法・動作原理・演算性能の限界、ならびに、その応用手法を示すことである。

第2章では、まず準備として、インコヒーレント光学系を用いた行列乗算の概念を説明する。ここでは、固定の行列マスクを使用し、空間積分法によってベクトル-行列乗算を実時間的に実行する手法について、詳しく説明する。

第3章では、リニア光源アレイを用いた実時間多段行列乗算用光学系の構成方法ならびに動作原理を示す。ここで示す光学系における特徴は、点光源の空間的な配置の工夫（Source Encoding）によって、特殊な光学部品を使用することなく、行列-行列乗算に必要な $N^3$ 並列性（ $N$ 次正方行列同士を乗算するのに必要なスカラ乗算をすべて並列に実行することが可能であるという意味）を得ている点である。乗算される行列は、すべて $N^2$ フォーマットで与えられ、出力として得られる積行列も入力行列と同じ形になるために、多数個の行列を乗算するための光学系に拡張することが可能である。また、光学系を構成する際に、行列乗算1回ごとに演算ユニットを構成することを基本思想としている。また、本光学系で行列3重積演算を行うときに重要な役割を果たす一方向拡散板の特性によって、系統的に発生する演算誤差に関して基礎検討を行う。さらに、この章で示す光学系の動作を確認するために実行した基礎実験の結果も併せて示す。

第4章では、前章で示した光学系の演算性能（光学系において演算し得る行列の大きさ、ならびに、演算速度と演算精度との関係）について議論する。この結果、本光学系において所望の演算性能を得るために必要なデバイスの特性が明らかとなる。

第5章では、第3章で示した光学系を2次元光源アレイの採用によっ

て改善したものを提案する。この章で示す光学系では、乗算される行列のうちの1個を2次元光源アレイを用いて表記することによって、その演算機能が強化されている。また、第4章と同様の考え方で、光学系の演算性能に関して基礎的な検討を行い、第3章で示した光学系との相互比較を行う。さらに、光学系の動作を確認するために行った基礎実験の結果も示す。

第6章では、本質的にアナログ演算器である実時間多段行列乗算用光学系に対して、デジタル的演算を導入する方法について議論する。すなわち、乗算される行列を表記するときを使用すべき空間的なデジタルコーディング手法を示す。ただし、演算結果は純粹の二進符号にはならず、混二進符号として得られる。また、このコーディングを使用する際に生ずる実用上の問題点も指摘する。

第7章では、以上に示した実時間行列乗算用光学系を応用して、やや高度なアナログ線形演算（ここでは、逆行列演算）を実行するための光学系の構成方法について議論する。また、このときに発生する演算誤差に関しても、簡単に検討する。

最終章となる第8章では、本論文の総括を行う。また、今後の展望の一環として、光数値演算のための様々な数表現についても議論する。

本論文の各章ならびに節の関係を図1-2に示す。

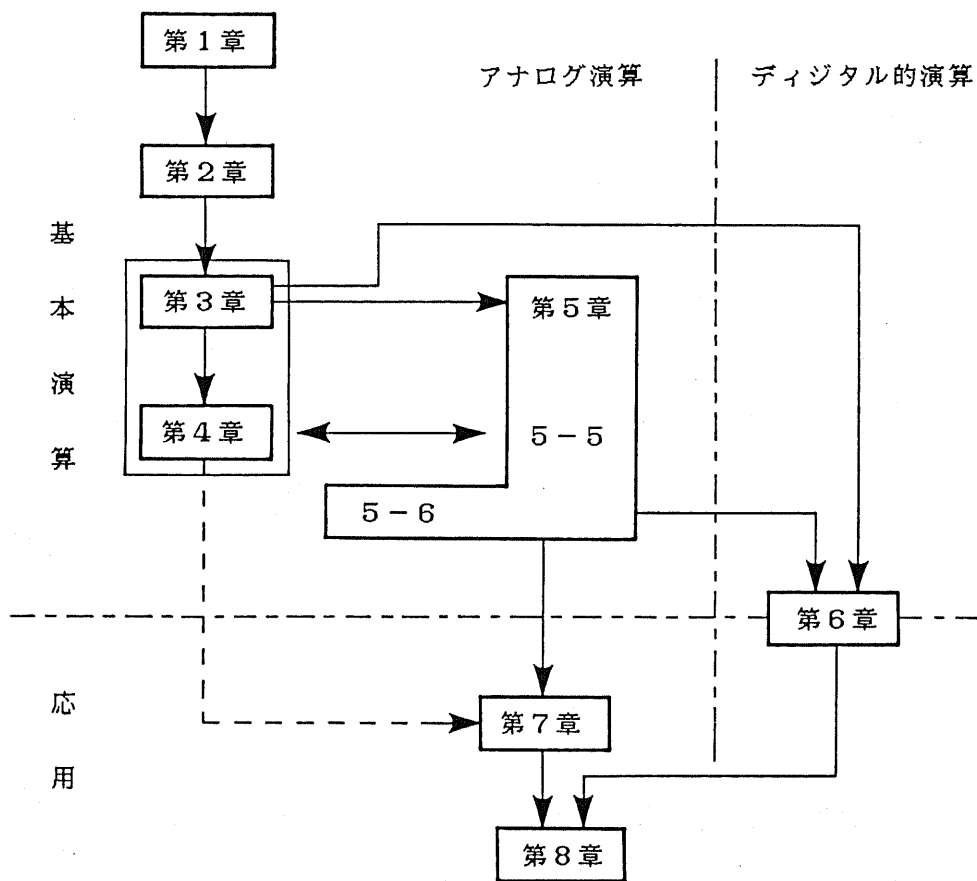


図 1 - 2 . 本論文の構成

## 参 考 文 献

- [1] 稲場編、「光コンピュータ」、オーム社（昭和60年）。
- [2] 光学、Vol.14, No.1 (1985, 光コンピューティング特集)。
- [3] 情報処理、Vol.26, No.8 (1985, オプトエレクトロニクス特集)。
- [4] Proc. IEEE, Vol.72, No.7 (1984, Special Issue on Optical Computing)。
- [5] Opt. Eng., Vol.24, No.1 (1985, Special Issue on Optical Computing and Optical Information Processing Components)。
- [6] Opt. Eng., Vol.25, No.1 (1986, Special Issue on Optical Computing)。
- [7] Appl. Opt., Vol.25, No.10 (1986, Special Issue on Optical Computing Part 1)。
- [8] Appl. Opt., Vol.25, No.14 (1986, Special Issue on Optical Computing Part 2)。
- [9] Appl. Opt., Vol.25, No.18 (1986, Special Issue on Photonic Computing)。
- [10] T.E.Bell; "Optical Computing; A Field in Flux," IEEE Spectrum, Vol.23, No.8, pp.34-57 (Aug. 1986)。
- [11] R.A.Athale; "Optical Matrix Algebraic Processors: A Survey," The 10th International Optical Computing Conference (IOCC'83), Apr. 6-8, 1983, MIT, Cambridge, MA., pp.24-31 (Tech. Dig., IEEE Catalog No. 83CH1880-4)。
- [12] H.J.Caulfield and W.T.Rhodes; "Optical Algebraic Processing Architectures and Algorithms," Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Vol.456, pp.2-14 (1984)。
- [13] D.Casasent; "Guidelines for Efficient Use of Optical Systolic Array Processors," The 10th International Optical Computing Conference (IOCC'83), Apr.6-8, 1983, MIT, Cambridge, MA., pp.209-213。

- [14] J.T.Tippett(Ed.); "Optical and Electrooptical Information Processing," (Mass. Inst. of Technol. Press, Cambridge, 1965), Chap.6, pp.97-98.
- [15] R.A.Heinz, J.O.Artman, and S.H.Lee; "Matrix Multiplication by Optical Methods," Appl. Opt., Vol.9, No.9, pp.2161-2168 (1970).
- [16] D.P.Jablonowski, R.A.Heinz, and J.O.Artman; "Matrix Multiplication by Optical Methods: Experimental Verification," Appl. Opt., Vol.11, No.1, pp.174-178 (1972).
- [17] R.P.Bocker; "Matrix Multiplication Using Incoherent Optical Techniques," Appl. Opt., Vol.13, No.7, pp.1670-1676 (1974).
- [18] J.W.Goodman, A.R.Dias, and L.M.Woody; "Fully Parallel, High-Speed Incoherent Optical Method for Performing Discrete Fourier Transforms," Opt. Lett., Vol.2, No.1, pp.1-3 (1978).
- [19] W.Schneider and W.Fink; "Incoherent Optical Matrix Multiplication," Opt. Acta, Vol.22, No.11, pp.879-889 (1975).
- [20] P.N.Tamura and J.C.Wyant; "Matrix Multiplication Using Coherent Optical Techniques," Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Vol.83, pp.97-104 (1976).
- [21] D.Psaltis, D.Casasent, and M.Carlotto; "Iterative Color-Multiplexed, Electro-Optical Processor," Opt. Lett., Vol.4, No.11, pp.348-350 (1979).
- [22] A.R.Dias; "Incoherent Optical Matrix-Matrix Multiplier," Optical Information Processing for Aerospace Applications, Aug. 18-19, 1981, Springfield, VA., NASA Conf. Publ. 2207.
- [23] Y.Z.Liang and H.K.Liu; "Optical Matrix-Matrix Multiplication Method Demonstrated by the Use of a Multifocus Hologram," Opt. Lett., Vol.9, No.8, pp.322-324 (1984).



- [24] J.W.Goodman and M.S.Song; "Performance Limitations of an Analog Method for Solving Simultaneous Linear Equations," Appl. Opt., Vol.21, No.3, pp.502-506 (1982).
- [25] H.J.Caulfield, D.Dvore, J.W.Goodman, and W.Rhodes; "Eigenvector Determination by Noncoherent Optical Methods," Appl. Opt., Vol.20, No.13, pp.2263-2265 (1981).
- [26] H.T.Kung; "Why Systolic Architectures?" IEEE Computer, pp.37-46 (Jan. 1982).
- [27] S.Y.Kung; "VLSI Array Processors," IEEE ASSP Magazine, pp.4-22 (July 1985).
- [28] H.J.Caulfield, W.T.Rhodes, M.J.Foster, and S.Horvitz; "Optical Implementation of Systolic Array Processing," Opt. Commun., Vol.40, No.2, pp.86-90 (1981).
- [29] M.Carlotto and D.Casasent; "Microprocessor-Based Fiber-Optic Iterative Optical Processor," Appl. Opt., Vol.21, No.1, pp.147-152 (1982).
- [30] B.Kumar and D.Casasent; "Eigenvector Determination by Iterative Optical Methods," Appl. Opt., Vol.20, No.21, pp.3707-3710 (1981).
- [31] D.Casasent and M.Carlotto; "Multidimensional Adaptive Radar Array Processing Using an Iterative Optical Matrix-Vector Processor," Opt. Eng., Vol.21, No.5, pp.814-821 (1982).
- [32] D.Casasent; "Acoustooptic Transducers in Iterative Optical Vector-Matrix Processors," Appl. Opt., Vol.21, No.10, pp.1859-1865 (1982).
- [33] D.Casasent, J.Jackson, and C.Neuman; "Frequency-Multiplexed and Pipelined Iterative Optical Systolic Array Processors," Appl. Opt., Vol.22, No.1, pp.115-124 (1983).

- [34] D.Casasent and J.Jackson; "Space and Frequency-Multiplexed Optical Linear Algebra Processor: Fabrication and Initial Tests," Appl. Opt., Vol.25, No.14, pp.2258-2263 (1986).
- [35] D.Casasent and B.K.Taylor; "Banded-Matrix High-Performance Algorithm and Architecture," Appl. Opt., Vol.24, No.10, pp.1476-1480 (1985).
- [36] P.S.Guilfoyle; "Systolic Acousto-Optic Binary Convolver," Opt. Eng., Vol.23, No.1, pp.20-25 (1984).
- [37] K.Wagner and D.Psaltis; "A Space Integrating Acousto-Optic Matrix-Matrix Multiplier," Opt. Commun., Vol.52, No.3, pp.173-177 (1984).
- [38] M.Tur, J.W.Goodman, B.Moslehi, J.E.Bowers, and H.J.Shaw; "Fiber-Optic Signal Processor with Applications to Matrix-Vector Multiplication and Lattice Filtering," Opt. Lett., Vol.7, No.9, pp.463-465 (1982).
- [39] S.Ishihara and H.Yajima; "Optical Computational Array Processors Using Optically Controlled Guided-Wave Devices," The 13th Congress of the International Commission for Optics (ICO-13), Aug. 20-24, 1984, Sapporo, Paper No. A2-4.
- [40] R.P.Bocker, H.J.Caulfield, and K.Bromley; "Rapid Unbiased Bipolar Incoherent Calculator Cube," Appl. Opt., Vol.22, No.6, pp.804-807 (1983).
- [41] R.P.Bocker; "Advanced RUBIC Cube Processor," Appl. Opt., Vol.22, No.16, pp.2401-2402 (1983).
- [42] H.J.Caulfield and J.Gruninger; "Feedback Methods for Optical Systolic and Engagement Matrix Processors," Opt. Lett., Vol.8, No.7, pp.398-400 (1983).
- [43] D.Casasent and A.Ghosh; "Direct and Implicit Optical Matrix-Vector Algorithms," Appl. Opt., Vol.22, No.22, pp.3572-3578 (1983).

- [44] D.Casasent, C.P.Neuman, and J.Lycas; "Optical Kalman Filtering for Missile Guidance," Appl. Opt., Vol.23, No.12, pp.1960-1966 (1984).
- [45] D.Casasent; "Acoustooptic Linear Algebra Processors: Architectures, Algorithms, and Applications," Proc. IEEE, Vol.72, No.7, pp.831-849 (1984).
- [46] J.L.Fisher, D.P.Casasent, and C.P.Neuman; "Factorized Extended Kalman Filter for Optical Processing," Appl. Opt., Vol.25, No.10, pp.1615-1621 (1986).
- [47] D.Casasent and A.Ghosh; "Optical Linear Algebra Processors: Noise and Error-Source Modeling," Opt. Lett., Vol.10, No.6, pp.252-254 (1985).
- [48] A.K.Ghosh, D.Casasent, and C.P.Neuman; "Performance of Direct and Iterative Algorithms on an Optical Systolic Processor," Appl. Opt., Vol.24, No.22, pp.3883-3892 (1985).
- [49] B.K.Taylor and D.P.Casasent; "Error-Source Effects in a High-Accuracy Optical Finite-Element Processor," Appl. Opt., Vol.25, No.6, pp.966-975 (1986).
- [50] R.A.Athale and W.C.Collins; "Optical Matrix-Matrix Multiplier Based on Outer Product Decomposition," Appl. Opt., Vol.21, No.12, pp.2089-2090 (1982).
- [51] R.A.Athale and J.N.Lee; "Optical Processing Using Outer-Product Concepts," Proc. IEEE, Vol.72, No.7, pp.931-941 (1984).
- [52] R.A.Athale and J.N.Lee; "Optical Systems for Efficient Triple-Matrix-Product Processing," Opt. Lett., Vol.8, No.11, pp.590-592 (1983).

- [53] J.N.Lee and R.A.Athale; "Optical Implementation of the Triple-Matrix Product," The 13th Congress of the International Commission for Optics (ICO-13), Aug. 20-24, 1984, Sapporo, Paper No. A1-6.
- [54] B.H.Soffer, Y.Owechko, E.Marom, and J.Grinberg; "Programmable Real-Time Incoherent Matrix Multiplier for Optical Processing," Appl. Opt., Vol.25, No.14, pp.2295-2305 (1986).
- [55] D.Y.Zang and C.S.Tsai; "Titanium-Indiffused Proton-Exchanged Waveguide Lenses in LiNbO<sub>3</sub> for Optical Information Processing," Appl. Opt., Vol.25, No.14, pp.2264-2271 (1986).
- [56] C.M.Veber; "Integrated Optical Architectures for Matrix Multiplication," Opt. Eng., Vol.24, No.1, pp.19-25 (1985).
- [57] Q.Cao and J.W.Goodman; "Coherent Optical Techniques for Diagonalization and Inversion of Circulant Matrices and Circulant Approximations to Toeplitz Matrices," Appl. Opt., Vol.23, No.6, pp.803-811 (1984).
- [58] Q.Cao and J.W.Goodman; "Wave-Front Inversion Using a Thin Phase Hologram: A Computer Simulation," Appl. Opt., Vol.23, No.24, pp.4575-4587 (1984).
- [59] G.Lewak, S.H.Lee, and W.T.Cathey; "Solution of Linear and Nonlinear Equations by Optical Methods," Appl. Opt., Vol.23, No.18, pp.3144-3148 (1984).

## 第 2 章

### インコヒーレント光学系を用いた ベクトル-行列乗算

#### 2-1. はじめに

本章では、本論である実時間多段行列乗算用光学系の議論に入る前に、まず準備として、インコヒーレント光学系を用いた行列乗算の概念を説明する。行列同士の乗算もベクトル-行列乗算の集合体と見做すことができるので、ここでは、基本となるベクトル-行列乗算について述べる。前章で紹介したように、光学系による行列乗算の手法は数多く検討されているが、本章では、「内積演算法」に基づく乗算の原理を示す。これは、数学の定義通りの演算を空間積分法を用いて実行する手法である。この手法を使用することによって、演算の途中結果を電気信号へ変換することなく、行列同士の乗算を実時間的に実行することができる。したがって、ここで述べる演算手法は、光波の有する「並列性」を最大限に利用し得るものであるといえる。また、前章でも述べたように、この種の光学系としてはスタンフォード大学の J.W. Goodman らの研究グループによって 1978 年に提案された光学系（スタンフォードプロセッサ）[1] が最も有名である。

## 2-2. ベクトル-行列乗算用光学系の概念

行ベクトル  ${}^t\mathbf{a}$  ( $= a_k$ ) と  $N$  次正方行列  $\mathbf{B}$  ( $= b_{kj}$ ) との積  ${}^t\mathbf{c}$  ( $= c_j$ ) は、数学では、次式のように定義されている。

$$c_j = \sum_{i=1}^N a_i b_{ij} \quad (2-1)$$

ベクトル-行列乗算を、(2-1) 式の通りに計算するためのインコヒーレント光学系の概念図を図 2-1 に示す。なお、この図では、理解を容易にするためにレンズ等を省略し、原理的な光線の進み方のみを示した。実際に光学系を構成するときには、小開口における回折の影響等を検討して光学系が設計されるために、光線追跡図もここに示したものよりも複雑になる。

Goodmanらは、リニアLEDアレイを用い、それぞれの出射光強度を制御することによってベクトルを与える光学系を提案した。しかし、一般的には、行ベクトル  ${}^t\mathbf{a}$  が扇形ビームとして現れる位置において、ビーム波面上の光強度分布によってその成分の値が表されていればよい。また、 $\mathbf{B}$  とした位置には、行列  $\mathbf{B}$  を表すための2次元空間光変調器を設置する。本論文では、この役目を果たす2次元空間光変調器のことを、「行列マスク」と呼ぶことがある。行列  $\mathbf{B}$  の成分の値は、空間光変調器内の小開口(画素)のパワー透過率を制御することによって与えられるものとする。

ベクトル  ${}^t\mathbf{a}$  を表す扇形ビームは、垂直方向(図中で、 $j$  とした方向)に一様に広げられ、2次元空間光変調器  $\mathbf{B}$  を照射する。このとき、水平面内では  ${}^t\mathbf{a}$  と  $\mathbf{B}$  との対応に結像関係を持たせるものとする。空間光変調器の  $(k, j)$  の位置に対応する小開口の透過率は、 $b_{kj}$  に比例している。したがって、この開口を通過した光の強度は、 $a_k b_{kj}$  に比例した強度を有することになる。空間光変調器を通過した後、この光は、水平方向には集光され、垂直面内では結像される。情報の伝達媒体である光

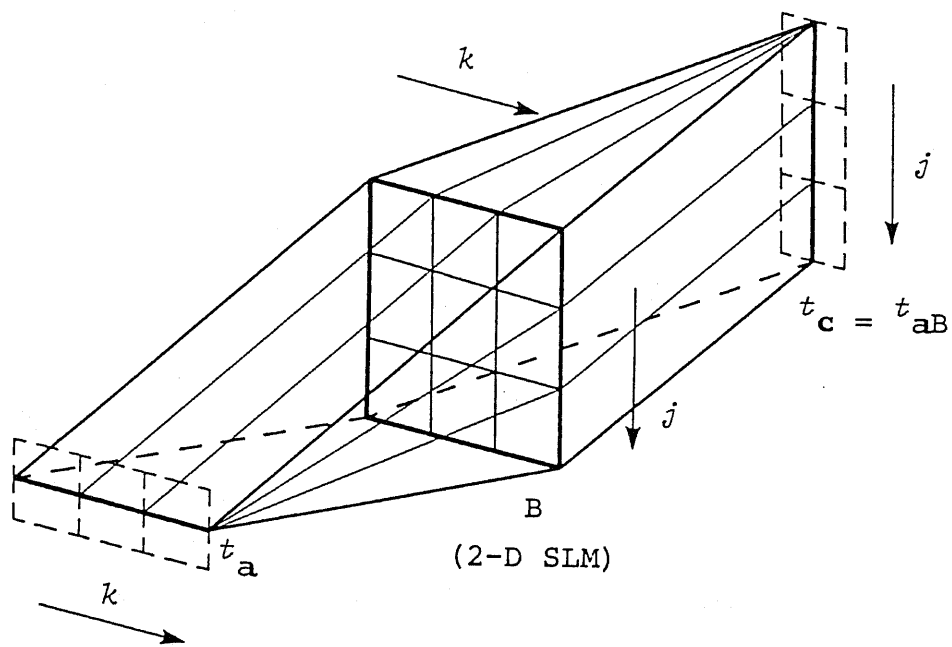


図 2 - 1 . インコヒーレント光学系を用いたベクトル - 行列乗算の概念図 (理解を容易にするために、レンズ等の光学部品はすべて省略した。また、光線も原理を示すためのものである。)

がインコヒーレント光であるならば、出力として得られる扇形ビーム上の  $j$  の位置における光強度が(2-1)式で記述される  $c_j$  に比例することになる。

上記の理由により、図2-1の光学系によってベクトル-行列乗算が実行可能であることがわかる。ただし、ここでは、光強度が情報を伝達しているので、原則として、乗算されるベクトル、行列の成分が非負実数であることが必要である。任意の複素数を成分として有するベクトル-行列の乗算を実行するためには、適当な空間的コーディングを施せばよい [1]-[3]。この点に関しては、後程議論する。また、図2-1では、透過型の空間光変調器を使用する場合について示したが、反射率を用いて行列成分を与えることにし、反射型の空間光変調器を用いても同様の光学系を構成することができる。

### 2-3. 行列-行列乗算用光学系への拡張

図2-1に示したような光学系を空間的に  $N$  個多重化することによって、行列同士の乗算を実時間的に実行するための光学系を構成することができる。アリゾナ大学の P.K. Tamura らは相互に偏りを有する微小シリンドリカルレンズアレイを使用することにより [4]、また、カーネギーメロン大学の D. Psaltis らは使用する光源の色を多重化することによって [5]、この多重化の問題に対する答えを示した。ミシガン環境研究所の A.R. Dias はホログラフィック光配線を利用することによって、行列乗算を光学的に実行し得ることを示した [6]。さらに、ジェット推進研究所の Y.Z. Liang らは、空間的に冗長な行列の表記方法 ( $N^3$  フォーマット) を使用することによって、ベクトル-行列乗算用光学系を  $N$  個並列に設置する手法を提案した [7]。

これらに対し、本論文で提案する実時間多段行列乗算用光学系においては、点光源のアレイを巧みに使用すること (Source Encoding) によ



って特殊な光学レンズを用いることなく、この多重化の問題を解決している点に最大の特徴がある [8],[9]。また、入力・出力の行列がすべて同じ形式で現れるために、多数個の行列を乗算するための光学系を構成することが可能となっている。

#### 2-4. まとめ

空間の並列性のみを利用したベクトル-行列乗算用インコヒーレント光学系の概念を説明した。本章で述べた光学系を空間的に多重化することによって、実時間行列乗算用光学系が構成される。この多重化を点光源アレイを使用することによって実現したものが、本研究で提案する実時間多段行列乗算用光学系である。

#### 参 考 文 献

- [1] J.W.Goodman, A.R.Dias, and L.M.Woody; "Fully Parallel, High-Speed Incoherent Optical Method for Performing Discrete Fourier Transforms," Opt. Lett., Vol.2, No.1, pp.1-3 (1978).
- [2] M.Carlotto and D.Casasent; "Microprocessor-Based Fiber-Optic Iterative Optical Processor," Appl. Opt., Vol.21, No.1, pp.147-152 (1982).
- [3] H.Nakano and K.Hotate; "Limit of Parallelism and Operational Speed in the Optical System for Real-Time Matrix-Matrix Multiplication," First Optoelectronics Conference (OEC'86), July 29-31, 1986, Tokyo, Paper No. C7-2.

- [4] P.N.Tamura and J.C.Wyant; "Matrix Multiplication Using Coherent Optical Techniques," Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Vol.83, pp.97-104 (1976).
- [5] D.Psaltis, D.Casasent, and M.Carlotto; "Iterative Color-Multiplexed, Electro-Optical Processor," Opt. Lett., Vol.4, No.11, pp.348-350 (1979).
- [6] A.R.Dias; "Incoherent Optical Matrix-Matrix Multiplier," Optical Information Processing for Aerospace Applications, NASA Conf. Publ. 2207, (NTIS, Springfield, VA., 1981).
- [7] Y.Z.Liang and H.K.Liu; "Optical Matrix-Matrix Multiplication Method Demonstrated by the Use of a Multifocus Hologens," Opt. Lett., Vol.9, No.8, pp.322-324 (1984).
- [8] H.Nakano and K.Hotate; "Optical System for Real-Time Processing of Multiple Matrix Product," Electron. Lett., Vol.21, No.10, pp.435-437 (1985).
- [9] H.Nakano and K.Hotate; "Real-Time Processing of the Multiple Matrix Product Using an Incoherent Optical System," Appl. Opt., Vol.24, No.23, pp.4238-4246 (1985).

## 第 3 章

### 実時間多段行列乗算用 光学系の構成 I

—— リニア光源アレイを有する光学系の構成 ——

#### 3-1. はじめに

本章では、リニア光源アレイを有する実時間多段行列乗算用光学系について議論する。本章では、主として、行列 3 個を乗算する場合について議論する。ここで提案する光学系は、行列乗算 1 段ごとに演算ユニットを構成し、このときに光学系の全長が最短となるように考えて、構成されるものである。

本光学系では、乗算される行列はすべて  $N^2$  フォーマット（行列を空間的に重複させない表記法）で与えられ、しかも、走査機構を必要としない。また、演算結果を与える出力面内に不要成分項を生じない。こうした  $N^3$  並列性は、光源（LED リニアアレイ）の空間的な配置を工夫したこと（Source Encoding）によって、特殊な光学部品を用いることなく実現されている。この点が本光学系の最大の特徴である [1]-[7]。さらに、入出力に現れる行列の形がすべて同じであるから、出力面内にホログラフィック一方向拡散性スクリーン [8]（以後、一方向拡散板と呼ぶ）を配置することによって、3 個以上の行列を乗算するための光学系に拡張可能である。ちなみに、 $N$  次正方行列を  $n$  個乗算するときの並列スカラ乗算回数は、 $(n-1)N^{n+1}$  回である。

なお、この光学系は、第5章で、2次元光源アレイを導入することによって演算機能を拡張される。

本章では、まず、以上の特徴を有する実時間多段行列乗算用光学系の構成ならびに動作原理を示す。次に、この光学系を用いて行列3個の乗算を実行するとき生ずる系統的な演算誤差について簡単に考察する。最後に、本章で提案した光学系の動作を確認するために行った基礎的な実験の結果を報告する。

### 3-2. 光学系の構成 [1],[2],[4],[6]

本論文で提案する光学系の構成を図3-1に示す [1],[2]。ただし、この図では、3次正方行列を3個乗算するための光学系を例として示した。また、この場合の光線追跡図を図3-2に示す。

図中、SLは、焦点距離  $f$  の球面レンズを表し、CLならびに  $CL_2$  は、焦点距離がそれぞれ、 $f$ 、 $f/2$  のシリンドリカルレンズを表す。また、A、B、Cは、乗算される行列を表す2次元空間光変調器（以後、これを行列マスクと呼ぶ）である。乗算される行列成分の値は、この行列マスク中の小開口のパワー透過率として与えられる。このために、ここでは、原則として非負実数成分のみから成る行列の乗算を考える。しかし、適当な行列の表記法[9]-[11]を使用することによって、任意複素数を成分として有する行列も取扱うことが可能である（この点については、第4章で詳しく述べる）。なお、行列マスクおよび出力面の付近に記した  $i, j, k, l$  と矢印は行列マスク内および出力面内での成分配置の一例を示している。行列A、B、Cの成分をそれぞれ、 $a_{ik}$ 、 $b_{kl}$ 、 $c_{lj}$  とし、また、矢印の向きはそれぞれの添え字の値が大きくなる向きを示している。

図3-1に示した光学系は、E~P、P~Q、Q~Rの3つの部分に分けられる。以下、各部分の構成ならびに動作について説明しよう。

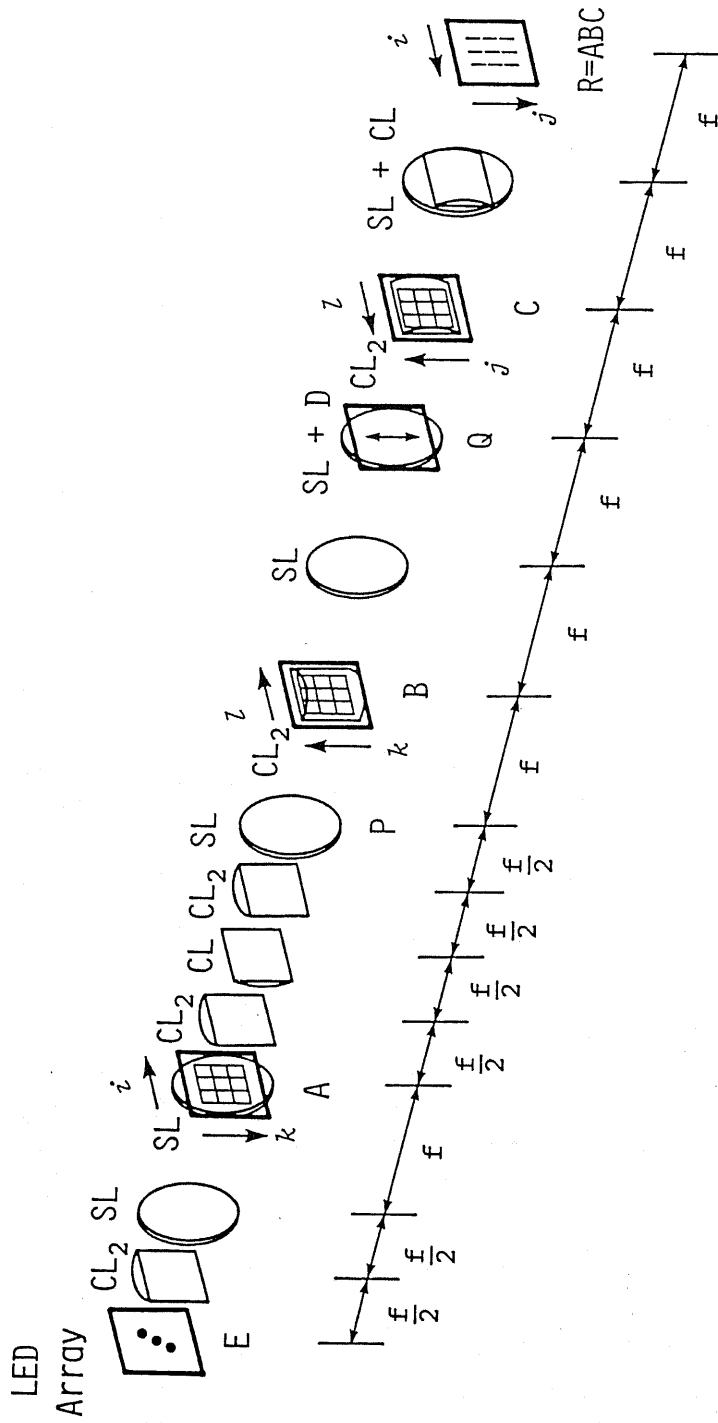


図3-1. リニア光源アレイを有する実時間多段行列乗算用光学系の構成  
(3次正方行列3個の乗算をするための光学系構成)

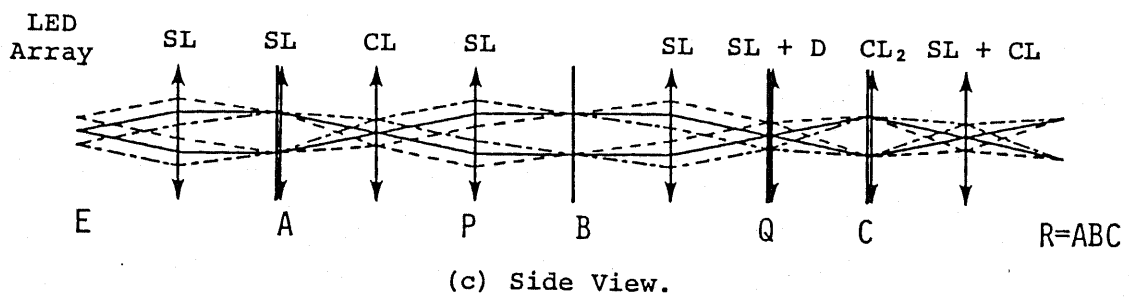
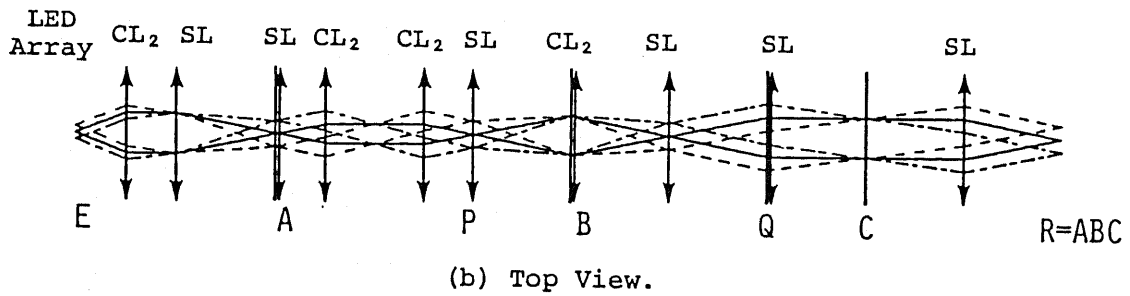
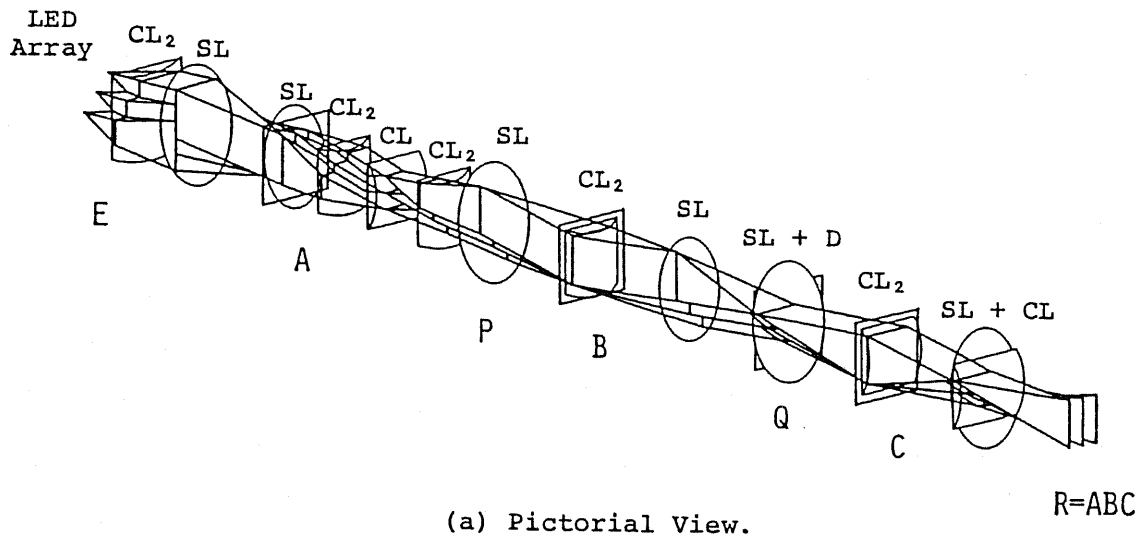


図 3 - 2 . 実時間多段行列乗算用光学系における光線追跡図

(3次正方行列の3重積演算の場合)

(a) 鳥瞰図 (b) 上面図 (c) 側面図

E ~ P は、第一の行列 A のエンゲージメントアレイフォーマット [12] を与える部分である。エンゲージメントアレイフォーマット表示とは、図 3-3 に示すように行列成分を行ごと（あるいは列ごと）に 1 つずつずらして並べる表記法のことである。この表記法は、本光学系において、次段以降の演算結果を行ごとに分離して得るために必要な一手法として採用されている。E は、リニア光源アレイであり、単位行列を与えていると見做すこともできる。乗算される行列のうち第一番目のもの（この場合には A）の行数が N であれば、光源アレイの構成素子数は N である。また、行列マスク内の隣接する小開口の中心間隔が水平面内で  $d_H$ 、垂直面内で  $d_V$  ならば、光源素子の配置間隔は水平面内で  $d_H / 2$ 、垂直面内で  $d_V$  である。この点光源の空間的な配置（Source Encoding）によって、本光学系における  $N^3$  並列性が、在来の光学レンズのみを用いて実現されている。この点の本光学系の最大の特徴である。

P ~ Q は、行列 A と行列 B とを乗算し、その結果 Q をエンゲージメントアレイフォーマットで与える部分である。本光学系では、「内積演算法」を採用することによって実時間行列乗算を可能にしている。第 2 章でも説明したように、この演算手法によるベクトル-行列乗算がこの部分で N 個並列に実行されている。この多重化のために、N 個の素子を傾けて配置したリニア光源アレイが使用されているのである。

なお、中間積  $Q (= AB)$  が現れる位置に置いた D は、一方向拡散板（ホログラフィック一方向拡散性スクリーン）[8] である。一方向拡散板は位相ホログラムの一種であり、この図の場合には、垂直方向には拡散板として作用し、水平方向には透明板として作用する。これは、この位置に得られる中間積を次段への入力に変換する作用を果たす。すなわち、レンズの集光作用により Q の位置に光パワーの和として得られた中間結果を、光パワーの和を保ったままで、次の行列マスク C の縦方向に均一に照射するために用いられているのである。それゆえ、一方向拡散板は、図 3-1 の光学系で 3 個の行列を実時間的に乗算するために不可欠な光学部品であるといえる。また、P ~ Q の部分は、4 個以上の行列を乗算するための光学系に拡張するときの拡張用演算ユニットになるが、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



a<sub>11</sub> a<sub>12</sub> a<sub>13</sub>  
a<sub>21</sub> a<sub>22</sub> a<sub>23</sub>  
a<sub>31</sub> a<sub>32</sub> a<sub>33</sub>

図 3 - 3 . 行列のエンゲージメントアレイフォーマット表示



この点については、次節で述べる。

最終段  $Q \sim R$  は、中間積  $Q$  と最後の行列  $C$  との乗算を「内積演算法」に従って実行し、その結果  $R (=ABC)$  を通常のマトリクス形式で与える部分である。ここで、最終結果  $R$  を通常のマトリクス形式で与える理由は、単に読み出しを容易にするばかりでなく、この場合には、行列マスク開口における回折による垂直方向の出力像のぼけを小さくすることもできるからである（この光学系では、行列マスク  $C$  から出力面  $R$  へは、垂直面内で結像系を構成している）。これと全く同様の観点から、水平面内における  $E \sim A$ 、垂直面内における  $A \sim B$  の部分が結像系を構成するようにレンズが配置されている。

なお、行列 2 個の乗算を実行するためには、図 3-1 に示した光学系から  $P \sim Q$  の部分を省いた図 3-4 のような光学系構成にすればよい。ここで、図 3-1 の最終段  $Q \sim R$ （一方向拡散板を除く）の部分に対応する図 3-4 における  $P \sim Q$  の部分の設置方向が、 $90^\circ$  異なっていることに注意して頂きたい。この点は、次節で述べる光学系の拡張に際しての注意事項の一例である。

### 3-3. 光学系の拡張方法 [2],[4]

前節で説明した図 3-1 の光学系は、行列 3 個の乗算を実行するためのものである。しかし、前節でも指摘したように、拡張用演算ユニットを用いて、これを行列 4 個以上の乗算を行うための光学系に拡張することができる。図 3-5 に拡張用演算ユニットの構成を示す。この図では、 $Q_i \sim Q_{i+1}$  の部分（ユニット直後の一方向拡散板  $D$  も含む）が拡張用演算ユニットとなる。この拡張用演算ユニットを中間積が現れる位置（図 3-1 では、 $Q$  の位置）に挿入することにより、4 個以上の行列を乗算するための光学系に拡張することができる。

拡張用演算ユニットを挿入するときには、図 3-5 にも示したように、

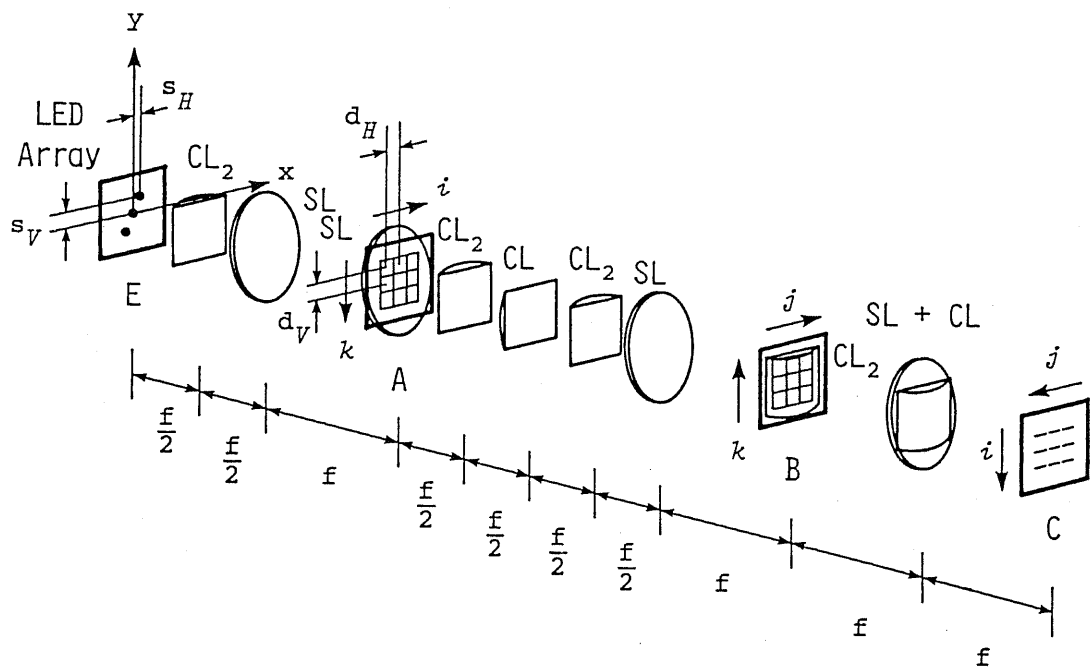


図 3 - 4 . 実時間行列 - 行列乗算用光学系の構成  
 ( 3 次正方行列の乗算の場合 )

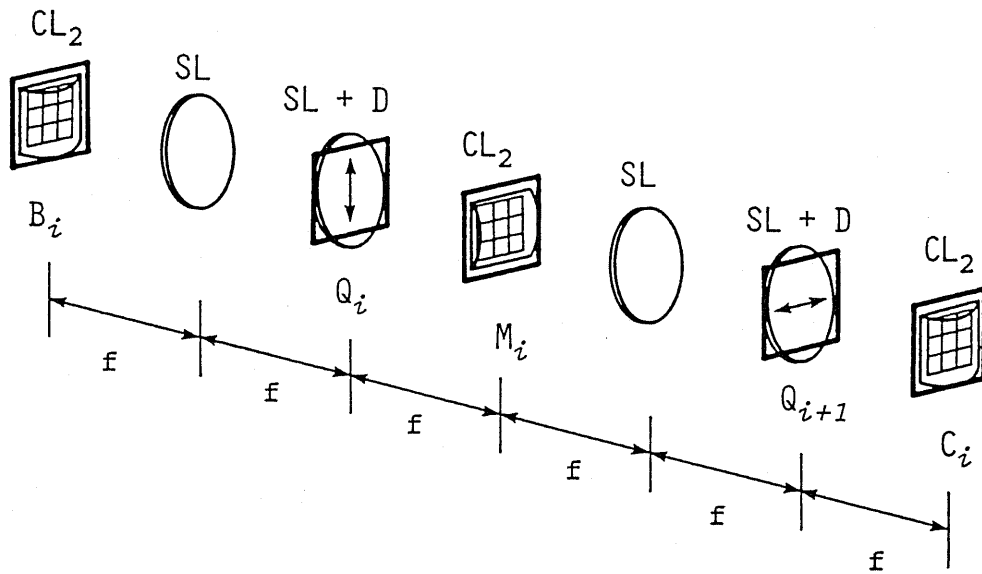


図 3 - 5 . 拡張用演算ユニットの構成

ユニットの挿入方向が1段ごとに変化する（これに伴って、最終段の方向も変化する）ことに注意する必要がある。さらに注意を必要とする点は、ユニットごとに行列マスクの配置方向が変化する（これと同時に、最終段の行列マスクの配置方向も変わる）ことである。

### 3-4. 光学系における演算誤差 [2]-[5]

図3-1の光学系を用いて行列3個以上の乗算を実行するときには生ずる演算誤差の要因として、光源の大きさ、レンズの収差、光検出器の雑音等の影響も考えられる。しかし、この場合における最大の演算誤差要因は、一方向拡散板の拡散指向性の影響である。本節では、これとコリメート光の強度分布に基づく演算誤差について議論する。光検出器の雑音、回折による漏話に基づく演算誤差等については、第4章で詳しく議論する。

#### 3-4-1. 一方向拡散板の拡散指向性 [3],[5]

前節で述べたように、本光学系において行列3個以上の乗算を行うために、一方向拡散板は必要不可欠である。しかし、一方向拡散板の拡散指向性は、光学系における演算誤差の重大な原因になる。

一方向拡散板は深い位相変調を受けた位相ホログラムの一種であり、図3-6に示した構成の光学系[8]を用いて露光した後、乾板を現像・漂白処理することによって作られる。このことを念頭に置き、スベックルの議論で用いられる多波のラングム干渉理論[13]を適用することによって、一方向拡散板の拡散指向性を計算することができる。この指針に従って拡散指向性を厳密に計算すると、付録Aに示すようなかなり複雑な数式を得る [3],[5]。しかし、付録Aの(A-14)式に現れるフーリエ変換を計算するのは困難である。そこで、ここでは、一方向拡散板の拡散

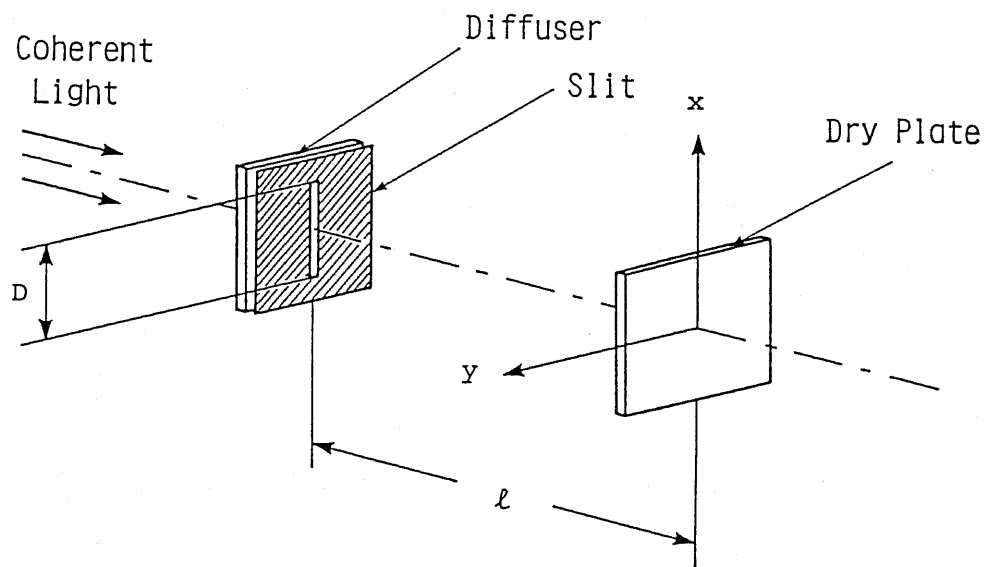


図 3 - 6 . 一方向拡散板の作製方法[8]

指向性として、実測値をもとにしてフィッティングを施した値を用いて、以下の議論を展開する。図3-7は、実際に使用した一方向拡散板の拡散指向性の測定結果である。次項以降の数値計算では、この図に示した拡散指向性と、付録Aでの解析結果から予測される拡散指向性の性質とを併せて利用する。

付録Aに示した議論から、一方向拡散板の拡散指向性が以下の性質を持つことがわかる。

- (1) 拡散パターンは、入射光の光軸方向に対して対称である。
- (2) ホログラム作製時に使用したスリットの長手方向の両端を乾板上の点から見込んだ角度（図3-6では、 $\tan^{-1}(D/\ell)$ ）で拡散光の方位角を正規化したものを変数にとれば、露光条件さえ同じならば、作製された一方向拡散板の拡散指向性はスリット長によらない（拡散指向性の相似性：付録の(A-13)式を参照）。

以下の解析では、行列マスク全体の大きさに合わせて、一方向拡散板の拡散幅を変化させる場合を想定した。すなわち、最外の行列成分の位置での散乱パワーが、常にピークのおよそ85%となるように拡散幅を選んだ場合を考える。

### 3-4-2. 演算誤差の定式化 [2]-[5]

まず、レンズによるコリメート光強度分布の不均一性について考えよう。図3-8(a)に示すように、点光源Oから出射された光を焦点距離 $f$ のレンズでコリメートしたとき、光軸から $x$ だけずれたところに中心をもつフーリエ変換面内の正方形開口A（一辺 $a$ ）を通過する光パワー $I(x, a, f)$ を求める。図3-1の光学系では、光線の水平面内と垂直面内での挙動を独立に考えてよいので、図3-8に示したような1次元モデルを用いて以下の議論を展開することができる。点光源Oの出射パワ

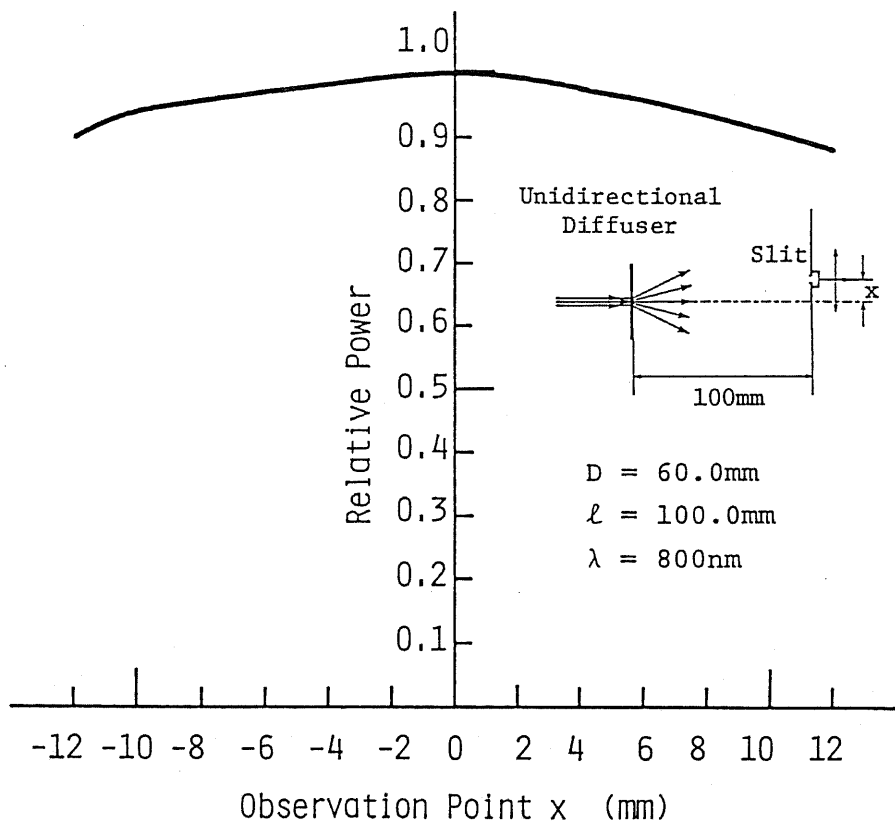
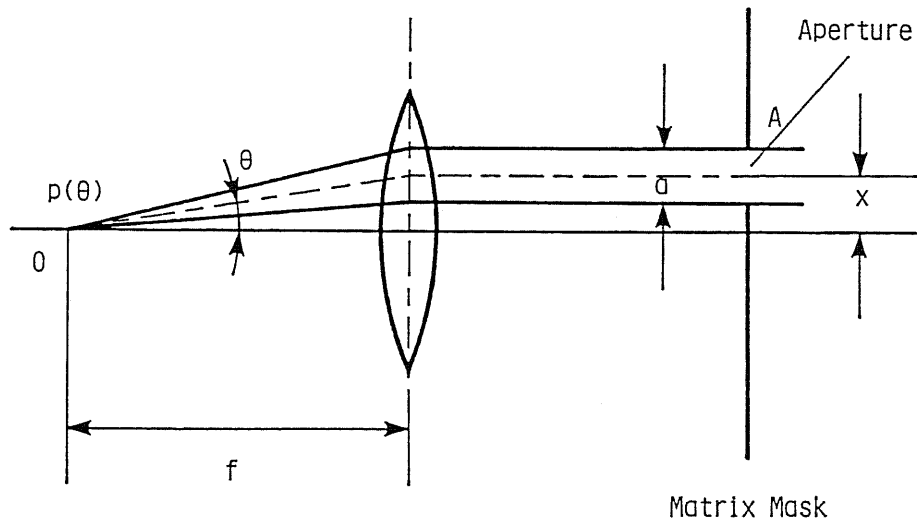
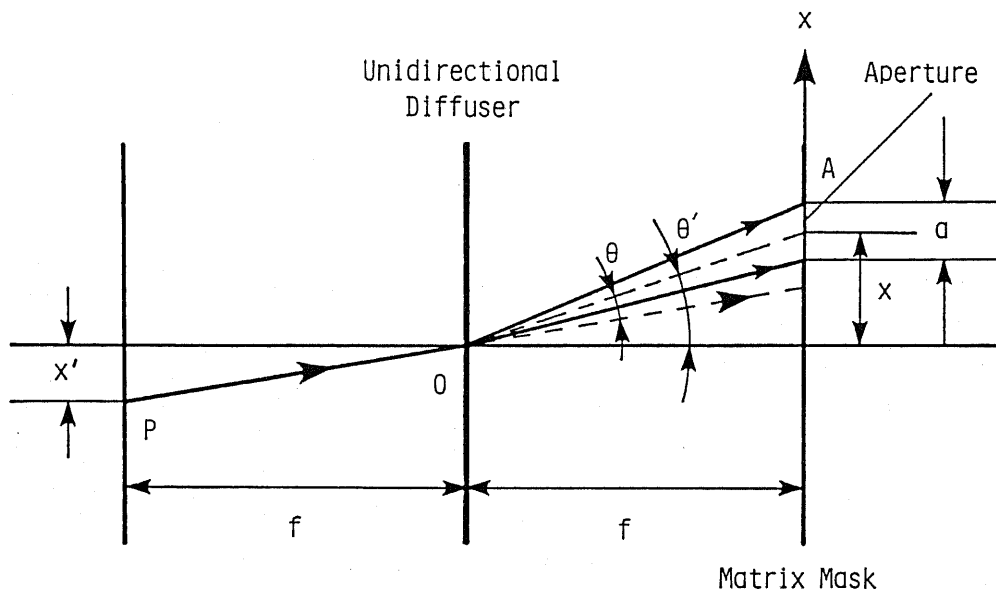


図 3 - 7 . 基礎実験で使用した一方向拡散板の拡散指向性  
 (測定結果)



(a) コリメート光強度分布の影響



(b) 一方向拡散板の拡散指向性の影響

図 3 - 8 . 実時間多段行列演算用光学系における演算誤差の要因

(a) コリメート光強度分布の影響

(b) 一方向拡散板の拡散指向性の影響



パターンを  $p(\theta)$  とすれば、開口を通過する光パワー  $I(x, a, f)$  は、

$$I(x, a, f) = \int_{\theta_-}^{\theta_+} p(\theta) d\theta \quad (3-1)$$

$$\theta_{\pm} = \tan^{-1} \left[ \frac{1}{f} \left( x \pm \frac{a}{2} \right) \right] \quad (3-2)$$

で与えられる。

次に、一方向拡散板の拡散指向性の影響を考えよう。図3-8(b)に示したように点Pから出射され、一方向拡散板上の点Oで散乱された光のうちで、一方向拡散板から  $f$  だけ離れた面内にある一辺  $a$  の正方形開口Aを通過するパワー  $I_D(x, x', a, f)$  は、一方向拡散板の拡散指向性を  $p_D(\alpha)$  として、

$$I_D(x, x', a, f) = \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} p_D(\alpha) d\alpha \quad (3-3)$$

$$\alpha_{\pm} = \sin(\theta_{\pm} - \tan^{-1} \frac{x'}{f}) \quad (3-4)$$

で与えられる。

以上の準備を用いて、図3-1の光学系によって行列3個の乗算を行ったときの演算誤差を求めてみよう。ここでは、簡単のために正方行列同士の乗算の場合について議論するが、正方以外の行列の乗算についても全く同様に議論することができる。

数学の定義によれば、 $N$ 次正方行列  $A, B, C$  の積  $R$  の  $(i, j)$  成分  $r_{ij}$  は次式によって与えられる。

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_{ik} b_{kl} c_{lj} \quad (3-5)$$

ここで、 $a_{ik}, b_{kl}, c_{lj}$  はそれぞれ、行列  $A, B, C$  の成分を表す。

一方、行列  $A, B, C$  の積を図3-1の光学系を使用して求めた結果  $\hat{R}$  の  $(i, j)$  成分  $\hat{r}_{ij}$  は、次式のように書ける。

$$\hat{r}_{ij} = \sum_k \sum_l G(k, j) \tilde{I}_k \tilde{I}_l \tilde{I}_D(k, j) a_{ik} b_{kl} c_{lj} \quad (3-6)$$

$$\tilde{I}_v = I(x_v, a, f) \quad (3-7)$$

$$\tilde{I}_D(k, j) = I_D(x_j, x_k, a, f) \quad (3-8)$$

$$x_v = \begin{cases} (n-v+1)d & (N=2n+1) \\ (n-v+\frac{1}{2})d & (N=2n) \end{cases} \quad (3-9)$$

ここで、 $G(k, j)$  は出力光パワーから演算結果への変換係数であり、 $a$  は行列マスクの開口寸法（ここでは、簡単のために、開口の形状は正方形であるものとする）、 $d$  は行列マスク内の開口中心間隔である。なお、行列マスク内の小開口寸法とその中心間隔との関係については、付録Bを参照して頂きたい。また、 $\tilde{I}_D(k, j)$  は2番目の行列Bの  $k$  行目を通過して一方向拡散板によって散乱され、最後の行列Cの  $j$  列目を通過する光のパワーを表す。

このとき、演算結果  $\hat{r}_{ij}$  と真値  $r_{ij}$  との相対誤差  $e_{ij}$  は、

$$e_{ij} = \frac{\hat{r}_{ij} - r_{ij}}{r_{ij}} \quad (3-10)$$

で与えられる。

### 3-4-3. 行列マスク開口寸法と最大演算誤差との関係

前項の議論をもとにして予測される行列マスク内の小開口寸法と最大演算誤差（絶対値）との関係を示したものが、図3-9である。なお、この図では、3次正方行列を3個乗算した場合について示した。

この図から、行列マスク小開口寸法には最適値が存在することがわかる。つまり、開口寸法が 0.5mm 付近のとき、演算誤差が最小になっている。この理由は次の通りである。開口寸法が 0.5mm 以下の領域では、

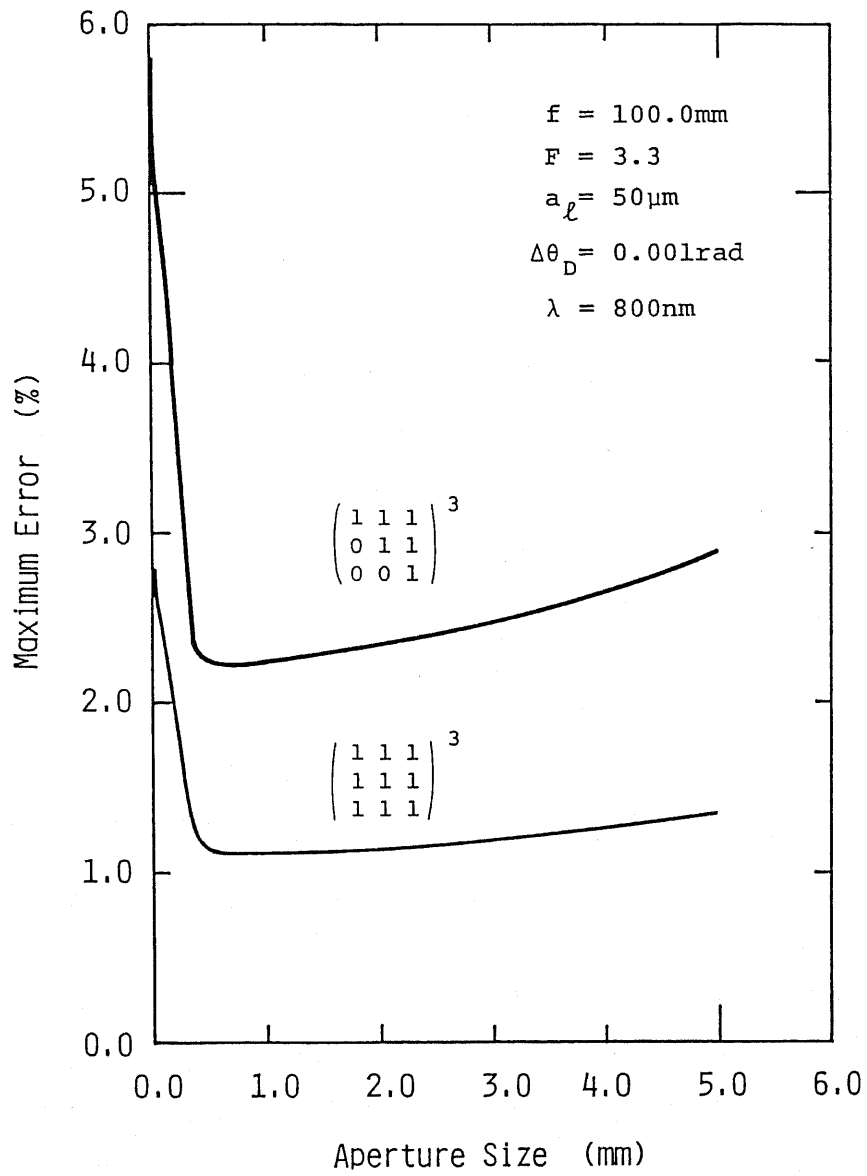


図 3 - 9 . 行列マスク内の小開口寸法と最大演算誤差との関係  
 ( 3 次正方行列 3 個の乗算の場合 )

回折による演算誤差の増大を防ぐために、小開口の中心間隔をその寸法に比べて大きくしなくてはならない（付録Bを参照）[2],[4]。そのために、一方向拡散板の拡散指向性の影響を強く受け、演算誤差が大きくなる。また、小開口の寸法がある程度以上に大きくなると、コリメート光強度分布の影響が現れて、再び演算誤差が増加する。こうして決定される最適開口寸法で設計したときの演算誤差（究極的な演算誤差）は、約 1.0%である。

図3-10に、5次正方行列同士3個の乗算を行ったときの行列マスク小開口寸法と演算誤差との関係を示す。この場合にも、3次正方行列のときと同じ理由により、行列マスク小開口寸法に最適値（約 0.5mm）が存在することがわかる。この最適寸法の小開口を有する行列マスクを使用したときには、演算誤差は約 2.8%となる。

#### 3-4-4. 行列の次元と最大演算誤差との関係

行列マスクの小開口寸法を一定に保った場合を考える。このとき、行列の次元と行列3重積演算を実行するときに生じる最大演算誤差（絶対値）との関係を示したものが図3-11である。ここでは、行列マスク小開口寸法  $a$  を 0.5mm とした。これは、3次正方行列に対する最適開口寸法である。図3-11から、演算誤差は行列の次元と共に増加してゆくことがわかる。ただし、全成分が1である行列の乗算に対しては、3次正方行列の乗算の演算誤差が4次行列の場合に比べて大きくなっている。これは、4次行列の場合に丁度、一方向拡散板の拡散指向性の対称性が偶然にも都合よく作用し、その影響を打消し合っているからである。

光学系における演算誤差が行列の次元と共に増加してゆくのは、次の理由による。図3-7に示したように、一方向拡散板の拡散指向性は、光軸方向にピークを持つ。そのために、拡散中心と小開口中心とを結ぶ方向の光軸からの偏角が大きくなる高次行列ほど、各小開口への光パワー配分の不均衡が大きくなる。それゆえ、高次行列ほど精度面で不利に

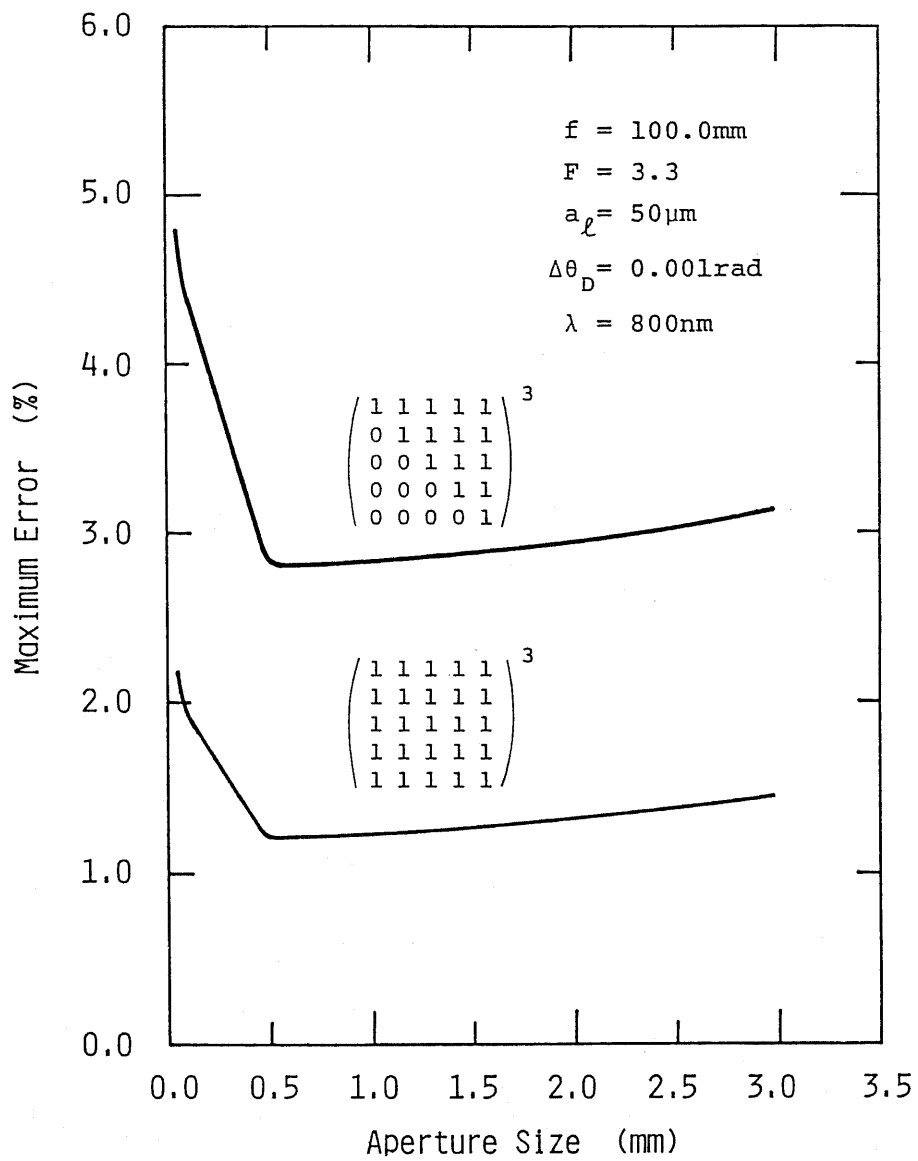


図 3 - 10. 行列マスク内の小開口寸法と最大演算誤差との関係  
 (5次正方行列3個の乗算の場合)

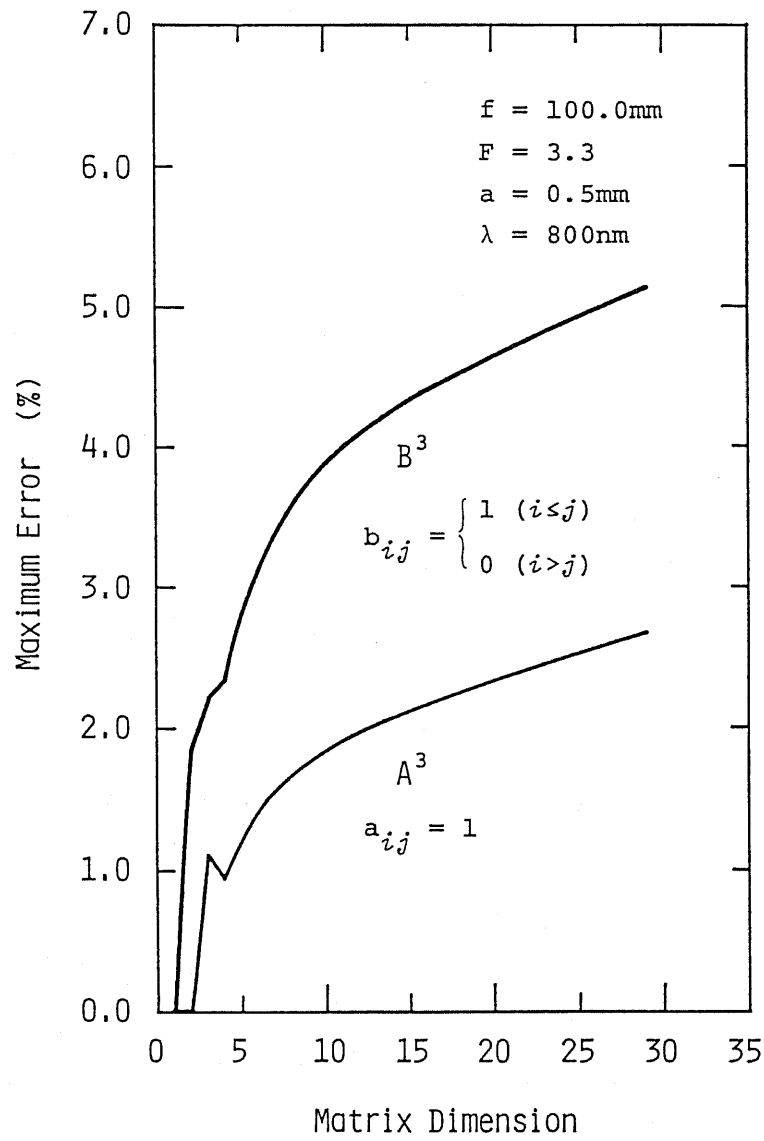


図 3 - 11. 乗算される行列の次元と最大演算誤差との関係  
 (行列 3 重積演算の場合)

なる。ただし、ある程度以上の次元になると平滑化のために、演算誤差の増加率が緩やかになる。

また、本項の条件下では、使用するレンズ（図3-1におけるCL）のFナンバーを3.3としたとき、29次正方行列まで扱うことが可能である。このときの並列スカラ乗算回数は、 $1.41 \times 10^6$ 回である。

### 3-4-5. 演算誤差の補償法

前項では、一方向拡散板の拡散指向性の演算誤差への影響について議論した。本項では、この影響を軽減するための補償法について議論する。なお、ここでは特に断りのない限り、行列3個の乗算を考える。

ここでは、一方向拡散板の拡散指向性の影響のみを考える。(3-4)式で定義される $\alpha_{\pm}$ で、 $x = x_j$ 、 $x' = x_k$ に対するものを $\alpha_{kj\pm}$ と書くことにする。dを行列マスク小開口の中心間隔、aを小開口寸法とすれば、近軸領域において $\alpha_{kj\pm}$ は、

$$\alpha_{kj\pm} = \frac{1}{f} \left[ (k-j)s \pm \frac{a}{2} \right] \quad (3-11)$$

と表すことができる。したがって、一方向拡散板の拡散指向性の影響を表す係数 $\tilde{I}_D(k, j)$ は $(k-j)$ の関数となり、

$$\tilde{I}_D(k, j) = f_D(k-j) \quad (3-12)$$

と書けることがわかる。しかも、 $p_D(\alpha)$ は偶関数であるから、

$$f_D(k-j) = f_D(j-k) \quad (3-13)$$

である。また、このとき、光学系による演算結果 $\hat{r}_{ij}$ は、

$$\hat{r}_{ij} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N G(k, j) f_D(k-j) a_{ik} b_{kl} c_{lj} \quad (3-14)$$

となる（(3-6)式では、コリメート光強度分布の影響を考慮していたが、本項では近軸領域のみを対象としているから、この影響を無視することができる）。

(3-14)式からわかるように、もしも、

$$G(k, j) = \frac{1}{f_D(k-j)} \quad (3-15)$$

とすることができれば、誤差を0にすることができる。ところが、 $l$ と $k$ とは独立であるから、この関係式がいつも成立するとは限らない。したがって、次善策として、誤差の期待値を0にする補償を考えることにしよう。また、以後、変換係数 $G(k, j)$ を $j$ のみの関数 $G(j)$ とする。

ここで、行列成分 $a_{ik}$ ,  $b_{kl}$ ,  $c_{lj}$ の分布を $0 \sim 2\xi$ の一様分布とすれば、これらの平均値 $\mu_0$ ならびに分散 $\sigma_0^2$ は次のようになる。

$$\mu_0 = \xi \quad (3-16)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\xi^2}{3} \quad (3-17)$$

これから、(3-13)式にて求められる計算結果の誤差の期待値 $\mu_{1ij}$ および分散 $\sigma_{1ij}^2$ を計算すると、次式のようになる。

$$\mu_{1ij} = N\mu_0^3 [G(j)F(j) - N] \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1ij}^2 = & N[(\mu_0^2 + \sigma_0^2)^3 + (N-2)(\mu_0^2 + \sigma_0^2)\mu_0^4 - \mu_0^6] \\ & \times \sum_{k=1}^N [G(j)f_D(k-j) - 1]^2 \\ & + N[G(j)F(j) - N]\mu_0^4\sigma_0^2 \end{aligned} \quad (3-19)$$

$$F(j) = \sum_{k=1}^N f_D(k-j) \quad (3-20)$$

(3-18)式から、次のような変換係数を用いれば、演算誤差の期待値が0になることがわかる。



$$G(k, j) = G(j) = \frac{N}{F(j)} \quad (3-21)$$

また、このときの演算誤差の分散  $\sigma_{ij}^2$  は、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^2 = & N[(\mu_0^2 + \sigma_0^2)^3 + (N-2)(\mu_0^2 + \sigma_0^2)\mu_0^4 - \mu_0^6] \\ & \times \sum_{k=1}^N [Nf_D(k-j)/F(j) - 1] \end{aligned} \quad (3-22)$$

である。

(3-21)式に示した補償は、出力面における光出力パワーから演算結果への変換係数を、積行列の列ごとに重みを付けて決定することを意味する。あるいは、同式から容易にわかるように、行列Cについて補償する、つまり、行列Cの列ごとに行列マスク内の小開口の透過率と行列成分の値との対応に予め重み付けを施すことも可能である。後者の場合、出力パワーから演算結果への変換係数は全成分に対して一律に定められる。前者の補償方法は、行列を4個以上乗算する場合には適用することはできない。しかし、後者の補償方法は、行列を4個以上乗算するときにも適用することが可能である。このことは、(3-21)式として導出された変換係数  $G(j)$  が一方向拡散板の拡散方向に対して得られたものである、つまり、「一方向」拡散板の影響を補償するためのものであることを考えれば、明らかであろう。図3-1の光学系を使用して、行列3個を乗算したときに発生する演算誤差の期待値ならびに分散が、ここで述べた補償法によって改善される様子を示したものが表3-1である。

以上に述べた列ごとの重み付けによる補償法によって、演算誤差の期待値ならびに分散はいずれも、無補償のときよりも低減される。しかし、この補償法により、いかなる行列の乗算に対しても演算誤差を軽減することが可能であるという訳ではない。例えば、三角行列同士の乗算などのように対称性が悪い行列の乗算においては(3-21)式のような補償を施すと、かえって演算誤差が増加してしまうことがある。

表 3-1. 一方向拡散板の拡散指向性に対する補償の効果  
 期待値：演算誤差の期待値  
 分散：演算誤差の分散

	補 償 前	補 償 後
変換係数	$\frac{N^2}{\sum_{k=1}^N F(k)}$	$G(j) = \frac{N}{F(j)}$
期 待 値	$N\mu_0^3 [G(j)F(j) - N]$	0
分 散	$N[(\mu_0^2 + \sigma_0^2)^3 + (N-2)(\mu_0^2 + \sigma_0^2)\mu_0^4 - \mu_0^6]$ $\times \sum_{k=1}^N [G(j)F_D(k-j) - 1]^2$ $+ N[G(j)F(j) - N]\mu_0^2\sigma_0^2$	$N[(\mu_0^2 + \sigma_0^2)^3 + (N-2)(\mu_0^2 + \sigma_0^2)\mu_0^4 - \mu_0^6]$ $\times \sum_{k=1}^N [NF_D(k-j)/F(j) - 1]$

### 3-5. 基礎実験 [1],[2],[4],[6],[7]

図3-1、図3-4に示した光学系を構成して3次正方行列2個ならびに3個の乗算を実行した。図3-12に行列3個の乗算実験に用いた光学系の写真を示す。光源には、発振中心波長800nmのLED（公称最大出力30mW）を3個使用した。球面レンズSLならびにシリンドリカルレンズCLの焦点距離は共に100mmとし、シリンドリカルレンズCL<sub>2</sub>の焦点距離は50mmとした。また、行列マスクとしては、空間光変調器の代わりに、開口が一辺4.0mmの正方形で、隣接する開口中心間隔が5.0mmとなるように並べたものを行列3個の乗算用に用いた。行列2個の乗算には、直径2.2mmの円形開口を隣接する開口の中心間隔が3.4mmとなるように並べたものを使用した。なお、今回の実験では、乗算される行列の成分は1.0あるいは0.0とした。また、一方向拡散板としては、拡散角が約50°（振幅ホログラムとしたときの値）となるものを試作、使用した。実験の手順は以下に示す通りである。

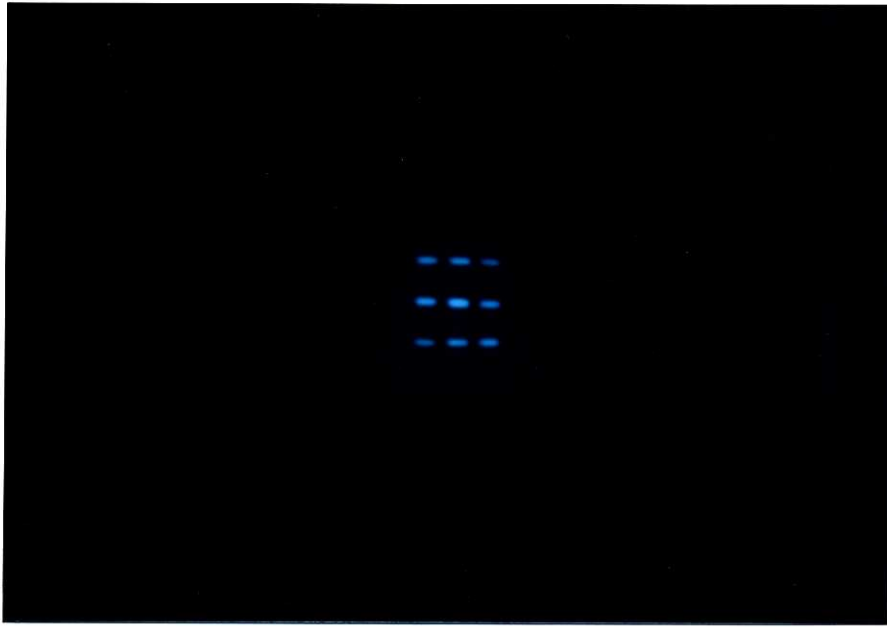
まず、すべての行列の全成分を1.0に選び、このときの出力（行列2個の乗算の場合にはすべてが3.0に、行列3個の乗算の場合には、すべてが9.0に対応する）が均一となるように、3個のLEDのパワーを調節した。この結果、各成分に対応する位置における光パワーのばらつきは、行列2個の乗算については±1.4%以内、行列3個の乗算については±1.6%以内であった。また、このときの出力パワーの平均値を用いて、出力光パワーから演算結果への変換係数を決定した。

次に、成分が1.0あるいは0.0の行列についてそれぞれ2種類の乗算を行った。

行列2個の乗算結果の出力画像の例を示したものが、図3-13である。また、この乗算結果 $Q (= AB)$ の理論値 $Q_{th}$ と実験値 $Q_{ex}$ とを比較して示したものが、表3-2である。この表から、実験値と理論値との相対誤差 $E_r (= 100(Q_{ex} - Q_{th}) / Q_{th})$ は、最大値4.0%であり、平均値1.4%であることがわかる。



図 3 - 12. リニア光源アレイを有する実時間多段行列乗算用光学系  
(行列 3 重積演算の実験系)



(a) C A S E 1



(b) C A S E 2

図 3 - 13. 行列 - 行列乗算の出力画像例

表3-2. 行列一行列乗算の実験結果  $Q_{ex}$  と理論値  $Q_{th}$  ( $Q = AB$ )  
 $E_r = 100 (Q_{ex} - Q_{th}) / Q_{th}$  ; 相対誤差

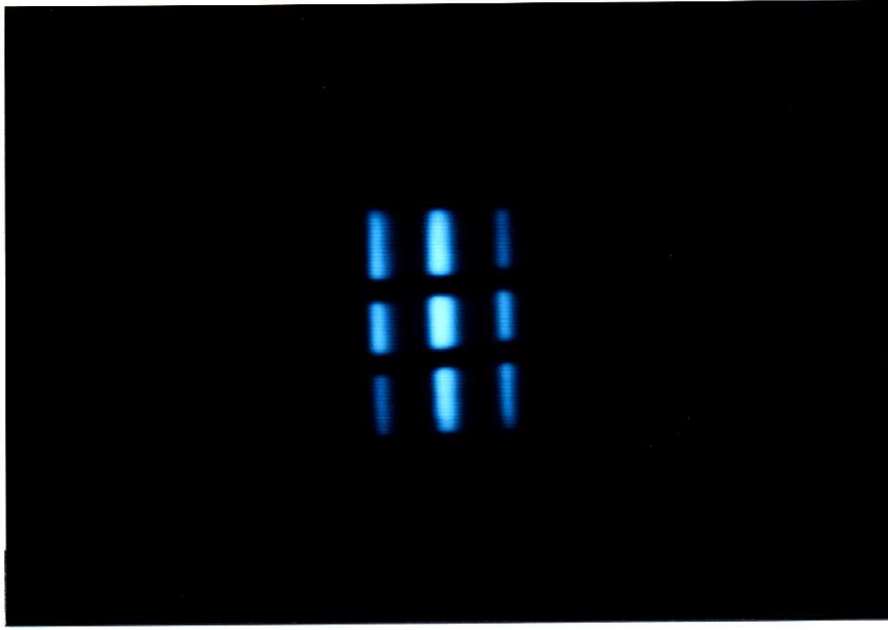
	A	B	$Q_{th}$	$Q_{ex}$	$E_r$ (%)
CASE 1	1.0 1.0 0.0	1.0 1.0 0.0	2.0 2.0 1.0	2.00 2.00 1.00	0.0 0.0 0.0
	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	2.0 3.0 2.0	2.01 3.00 1.99	+0.5 0.0 -0.5
	0.0 1.0 1.0	0.0 1.0 1.0	1.0 2.0 2.0	0.96 2.08 2.03	-4.0 +4.0 +1.5
CASE 2	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	1.0 2.0 3.0	0.98 1.94 3.01	-2.0 -3.0 +0.3
	0.0 1.0 1.0	0.0 1.0 1.0	0.0 1.0 2.0	0.00 1.01 2.07	----- +1.0 +3.5
	0.0 0.0 1.0	0.0 0.0 1.0	0.0 0.0 1.0	0.00 0.00 0.99	----- -1.0

行列3個の乗算結果の出力画像の例を示したものが、図3-14である。また、このときの乗算結果 $R (= ABC)$ の理論値 $R_{th}$ と実験値 $R_{ex}$ とを比較して示したものが表3-3である。この表から、実験結果と理論値との相対誤差 $E_r (= 100 (R_{ex} - R_{th}) / R_{th})$ は、最大値9.0%であり、平均値4.7%であることがわかる。本研究よりも前に、実時間的に行列3重積演算を実行したという報告はない。また、この基礎実験で得た演算精度は、文献[14]に示されている「外積演算」に基づく光学系を使用した実験結果（最大演算誤差10%以内）とほぼ同程度の値である。一方、簡単なモデルに基づいて推定される相対演算誤差の最大値は、3.3%である。したがって、光学系の動作原理の確認を目的として行った基礎実験の結果としては、良好な値であるといえる。

なお、今回の実験における付加的な演算誤差の原因としては、光源の出射パワーパターン、レンズの収差、ならびに、一方向拡散板の不完全性（拡散指向性の位置依存性、あるいは、理想的なパターンからのずれ）などの影響が考えられる。しかし、光源ならびに行列マスクを最適値（演算誤差を最小にする値）にまで小型化し、さらに、その他の光学部品についても最適設計を行うことによって、これらの演算誤差の大部分は、軽減することが可能であると思われる。

### 3-6. まとめ

リニア光源アレイを用いることによって、在来の光学レンズのみを用いて行列同士の積を実時間的に、しかも、光出力として与えることを可能としたインコヒーレント光学系を提案した。この光学系においては、入力行列ならびに演算結果がすべて同一の形式で与えられる。そのために、一方向拡散板を使用することによって、行列3個以上の乗算を実行するための光学系に容易に拡張することが可能である。このときの拡張用演算ユニットの構成法ならびに光学系の接続方法も示した。



(a) C A S E 1



(b) C A S E 2

図 3 - 14. 行列 3 重積演算の出力画像例



表3-3. 行列3重積演算の実験結果  $R_{ex}$  と理論値  $R_{th}$  ( $R=ABC$ )  
 $E_r = 100 (R_{ex} - R_{th}) / R_{th}$  ; 相対誤差

	A	B	C	$R_{th}$	$R_{ex}$	$E_r$ (%)
CASE 1	1.0	1.0	0.0	3.0	3.15	+5.0
	1.0	0.0	1.0	3.0	2.82	-6.0
	0.0	1.0	1.0	4.0	4.74	+17.5
CASE 2	1.0	1.0	1.0	2.0	2.83	+41.5
	0.0	1.0	0.0	3.0	3.07	+1.0
	0.0	0.0	1.0	6.0	6.33	+5.5
	1.0	1.0	1.0	1.0	1.09	+9.0
	0.0	1.0	1.0	0.0	0.00	-100.0
	0.0	0.0	1.0	0.0	1.00	+100.0

本章で提案した光学系を使用して行列3重積演算を行うときに生ずる演算誤差について、簡単なモデルに基づいて議論した。これから、行列3個の乗算については、行列マスク内の小開口寸法に最適値が存在することが明らかとなった。また、一方向拡散板の拡散指向性によって生ずる演算誤差の簡単な補償方法も示した。この補償法を適用すれば、演算誤差の期待値を0にすることが可能である。

さらに、この光学系を用いて3次正方行列2個ならびに3個の乗算を実行した基礎実験の結果も示した。この実験結果は、平均演算誤差がそれぞれ、1.4%、4.7%であった。これから、本光学系の有用性が示された。また、この演算誤差は、特性の優れた素子を使用し、光学系の最適設計を行なうことによって、さらに低減し得る。

#### 参 考 文 献

- [1] H.Nakano and K.Hotate; "Optical System for Real-Time Processing of Multiple Matrix Product," *Electron. Lett.*, Vol.21, No.10, pp.435-437 (1985).
- [2] H.Nakano and K.Hotate; "Real-Time Processing of the Multiple Matrix Product Using an Incoherent Optical System," *Appl. Opt.*, Vol.24, No.23, pp.4238-4246 (1985).
- [3] H.Nakano and K.Hotate; "Operational Error in the Optical Real-Time Multiple Matrix Multiplier and Its Compensation," *Appl. Opt.*, Vol.25, No.18, pp.3132-3136 (1986).
- [4] 中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算用光学系」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE84-122 (1985).

- [5]中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算用光学系Ⅱ - 演算誤差とその補償法 -」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE85-148 (1986).
- [6]中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算のための光学系Ⅱ - 方式の改善と基礎実験 -」、昭和60年度電子通信学会総合全国大会、1033 (1985).
- [7]中野・保立、「実時間行列乗算用光学系」、昭和60年秋季応用物理学会学術講演会、4a-H-2 (1985).
- [8]大越、「三次元画像光学」、(産業図書、昭和47年)、p.215.  
T.Okoshi; "Three Dimensional Imaging Techniques," (Academic, New York, 1976), pp.362-364.
- [9] H.Nakano and K.Hotate; "Limit of Parallelism and Operational Speed in the Optical System for Real-Time Matrix-Matrix Multiplication," First Optoelectronics Conference (OEC'86), July 29-31, 1986, Tokyo, Paper No. C7-2.
- [10] J.W.Goodman, A.R.Dias, and L.M.Woody; "Fully Parallel, High-Speed Incoherent Optical Method for Performing Discrete Fourier Transforms," Opt. Lett., Vol.2, No.1, pp.1-3 (1974).
- [11] M.Carlotto and D.Casasent; "Microprocessor-Based Fiber-Optic Iterative Optical Processor," Appl. Opt., Vol.21, No.1, pp.147-152 (1982).
- [12] R.P.Bocker, H.J.Caulfield, and K.Bromley; "Rapid Unbiased Bipolar Incoherent Calculator Cube," Appl. Opt., Vol.22, No.6, pp.804-807 (1983).
- [13] J.W.Goodman; "Statistical Optics," (Wiley Interscience, New York, 1985), Chap.7, pp.331-356.
- [14] J.N.Lee and R.A.Athale; "Optical Implementation of the Triple-Matrix Product," The 13th Congress of the International Commission for Optics (IOC-13), Aug. 20-24, 1984, Sapporo, Paper No. A1-6.

## 第 4 章

### 実時間行列乗算用光学系の 演算性能に関する基礎検討

#### 4-1. はじめに

本章では、前章で提案した実時間多段行列乗算用光学系を行列一行列乗算用光学系として用いる場合（図 3-4 に示した構成の光学系）の演算性能として、光学系で演算可能な行列の大きさ、ならびに、演算速度と演算精度との関係について議論する。この光学系を用いて演算可能な行列の次元は、主として、行列マスク内の小開口における回折によって制限される。また、本光学系における行列乗算の実行速度を制限する要因として、2次元空間光変調器の書き込み・消去時間、光検出器における  $S/N$  などが掲げられる。以上に述べた点に関する検討によって、実時間行列乗算用光学系において所望の演算性能を得るために必要な光素子の性能が、明らかとなる。

また、任意の複素数成分を有する行列の取り扱い方についても検討する。

#### 4-2. 任意複素成分を有する行列の扱い方 [1],[2]

一般に、インコヒーレント光学系を用いて演算を行う場合には、光パ

ワーの次元での演算処理となるために、原則として非負実数の演算しか取り扱うことができない。しかし、行列乗算用光学系においては、行列の表記法を工夫することにより、任意の複素数成分を有する行列も扱うことが可能である。本節では、こうした任意複素成分を有する行列の取り扱い方の例として、比較的、空間利用効率の高い2種類の方法を示す。いずれの方法も1の $n$ 乗根（ここでは、 $n = 3, 4$ ）を単位ベクトルとして、複素平面上で数を展開することに基礎を置いている。ただし、展開係数をすべて非負実数にする必要があるので、 $n \geq 3$ でなくてはならない。

#### 4-2-1.1の立方根による展開

この方法を用いると、非負実数のみを用いて任意の複素数を表現するために必要となる単位ベクトルの数を最も少なくすることができる。この場合、複素数の展開に用いる単位ベクトルは、 $1, \omega, \omega^2$ である。ただし、 $\omega = (-1 + j\sqrt{3}) / 2$ である。この3つを用いて任意の複素数を非負実数係数のみで展開できる[3]ことは明らかであろう。ただし、線形独立な基底ではなく、冗長性のある単位ベクトルを用いて展開を行うので、展開係数の組み合わせが一意には定まらないことに注意が必要である。この冗長性は、展開係数として非負実数しか許さないために発生するものである。

まず、複素数 $a$ と $b$ との乗算を考えよう。 $a, b$ の1の立方根による展開を、

$$a = a^0 + \omega a^1 + \omega^2 a^2 \quad (4-1)$$

$$b = b^0 + \omega b^1 + \omega^2 b^2 \quad (4-2)$$

とすれば、 $a$ と $b$ との積 $c$ は、

$$\begin{aligned}
c &= c^0 + \omega c^1 + \omega^2 c^2 \\
&= (a^0 b^0 + a^1 b^2 + a^2 b^1) \\
&\quad + \omega (a^0 b^1 + a^1 b^0 + a^2 b^2) \\
&\quad + \omega^2 (a^0 b^2 + a^1 b^1 + a^2 b^0) \quad (4-3)
\end{aligned}$$

で与えられる。この関係を行列を用いて表現すると、

$$(c^0 \ c^1 \ c^2) = (a^0 \ a^1 \ a^2) \begin{pmatrix} b^0 & b^1 & b^2 \\ b^2 & b^0 & b^1 \\ b^1 & b^2 & b^0 \end{pmatrix} \quad (4-4)$$

となる。上式と「行列の区分けの定理」（大きな行列同士の乗算を行うときに、それぞれを小さな区画に分け、対応する小行列同士で乗算が定義されるならば、これらの小行列をあたかもスカラーであるかの如く扱い得るという数学の定理）とから、任意の複素数を成分として有する行列 A と B との乗算は、次の (4-6) - (4-8) 式で定義される拡大行列  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  を用いて実行されることがわかる。

$$\tilde{C} = \tilde{A} \tilde{B} \quad (4-5)$$

$$\tilde{A} = (A^0 \ A^1 \ A^2) \quad (4-6)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B^0 & B^1 & B^2 \\ B^2 & B^0 & B^1 \\ B^1 & B^2 & B^0 \end{pmatrix} \quad (4-7)$$

$$\tilde{C} = (C^0 \ C^1 \ C^2) \quad (4-8)$$

$$A = A^0 + \omega A^1 + \omega^2 A^2 \quad (4-9)$$

$$B = B^0 + \omega B^1 + \omega^2 B^2 \quad (4-10)$$

$$C = C^0 + \omega C^1 + \omega^2 C^2 \quad (4-11)$$

この表記法を採用した場合には、行列 A の列数が 3 倍になり、行列 B の次元も 3 倍になる。

#### 4-2-2.1 の4乗根による展開

この方法では、 $\pm 1$ ， $\pm j$ を用いて複素数を非負実係数のみで展開する [4]。詳しい議論は前節と同様なので省略する。この場合にも、任意の複素数成分を有する行列  $A$ ， $B$  の乗算は、次式に示す拡大行列  $\tilde{A}$ ， $\tilde{B}$ ， $\tilde{C}$  を用いて実行することができる。

$$\tilde{C} = \tilde{A} \tilde{B} \quad (4-12)$$

$$\tilde{A} = (A^0 \ A^1 \ A^2 \ A^3) \quad (4-13)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B^0 & B^1 & B^2 & B^3 \\ B^3 & B^0 & B^1 & B^2 \\ B^2 & B^3 & B^0 & B^1 \\ B^1 & B^2 & B^3 & B^0 \end{pmatrix} \quad (4-14)$$

$$\tilde{C} = (C^0 \ C^1 \ C^2 \ C^3) \quad (4-15)$$

$$A = A^0 + jA^1 - A^2 - jA^3 \quad (4-16)$$

$$B = B^0 + jB^1 - B^2 - jB^3 \quad (4-17)$$

$$C = C^0 + jC^1 - C^2 - jC^3 \quad (4-18)$$

(4-13)–(4-15)式のコーディングを用いると、 $A$  の列数は4倍となり、 $B$  の次元も4倍になる。

以上に示した2種類のコーディングの構造を見てすぐわかるように、光学系中で演算可能な行列の次元を考えると、4乗根を用いた複素数の展開に基づくコーディングは、立方根を利用したものに比べて不利である。しかし、4乗根を用いた展開の方が単位ベクトルの取り方が素直であり、複素数のコーディング・デコーディングのための手続きがはるかに容易である点では有利である。

### 4-3. 演算可能な行列の大きさ [1],[2]

本節では、まず、行列マスク内の小開口における回折に基づく漏話を最小限に留めるための光学系の設計法を検討する。次に、この光学系において演算可能な行列の大きさの限界に関して議論する。

#### 4-3-1. 行列マスク開口における回折

第3章で示した行列乗算用光学系で扱われる行列の次元を制約する要因として、行列マスク内の開口などにおける回折・光源の大きさ・レンズの収差などが考えられる。これらの制約条件のうち、行列マスク内の小開口における回折が最も大きく、他の条件はこれに比べ無視し得る程度のものである。そこで、本稿では、行列マスクにおける回折の影響についてのみ議論する。

レンズの有効領域を  $D \times D$ 、焦点距離を  $f$  とする。行列マスク小開口の寸法を  $a_H \times a_V$  (水平  $\times$  垂直)、隣接する小開口の中心間隔を  $d_H$ 、 $d_V$  (水平、垂直) とし、行列 A, B の大きさをそれぞれ、 $L \times M$ 、 $M \times N$  とする。光の波長を  $\lambda$  とする。使用するレンズが無収差であれば、

$$d_H = a_H \quad (4-19)$$

$$d_V = a_V \quad (4-20)$$

とすることができる。

図3-4の光学系では、B~Qは、水平方向には結像系になっており、回折の効果は垂直方向についてのみ考慮すればよい。そこで、出力像を垂直面内にて分離して読み出すために、受光面の狭い光検出器のアレイを用いることにする(光検出器の受光面の大きさの選び方については、次節で議論する)。光源の中心間隔が水平、垂直面内でそれぞれ、 $s_H$ 、 $s_V$  であるとする。出力の垂直方向の回折像の零点は、主ビームを中心



として、 $f\lambda/a_V$  の間隔で現れる。また、出力成分は、垂直方向では  $s_V$  の間隔で現れる。そこで、

$$s_V = \frac{f\lambda}{a_V} \quad (4-21)$$

とすれば、出力面内で、各主ビームがピークをとる位置に他の出力成分の回折像の零点が現れることになる。したがって、主ビームの現れる位置を中心として設置した受光面の小さい光検出器を使用すれば、行列マスク開口における回折の影響を最小限に留めることができる。この様子を模式的に示したものが、図4-1である。

#### 4-3-2. 演算可能な行列の大きさ

行列マスクAの垂直方向の寸法は、 $Ma_V$  である。従って、垂直方向において必要な光線がレンズの有効領域内を通過するための条件は、

$$(L-1)s_V + Ma_V \leq D \quad (4-22)$$

である。(4-21),(4-22)式を満たす実数  $a_V$  が存在するための必要十分条件は、

$$(L-1)M \leq \frac{D^2}{4f\lambda} \quad (4-23)$$

である。すなわち、行列Aの大きさ  $L \times M$  が上式を満たすならば、本光学系で演算することが可能である。また、行列Bの列数Nは、レンズ開口面の有限性に基づく回折(Rayleighの分解能)によって制限される。

(4-23)式に基づいて、使用するレンズ(図3-4におけるCL)のFナンバーとこの光学系によって演算可能な正方行列の次元との関係を示したものが図4-2である。なお、この計算に際しては、 $f = 100\text{mm}$ ,  $\lambda = 800\text{nm}$ とした。これから、 $F = 2.0$ のレンズを用いれば、本光学

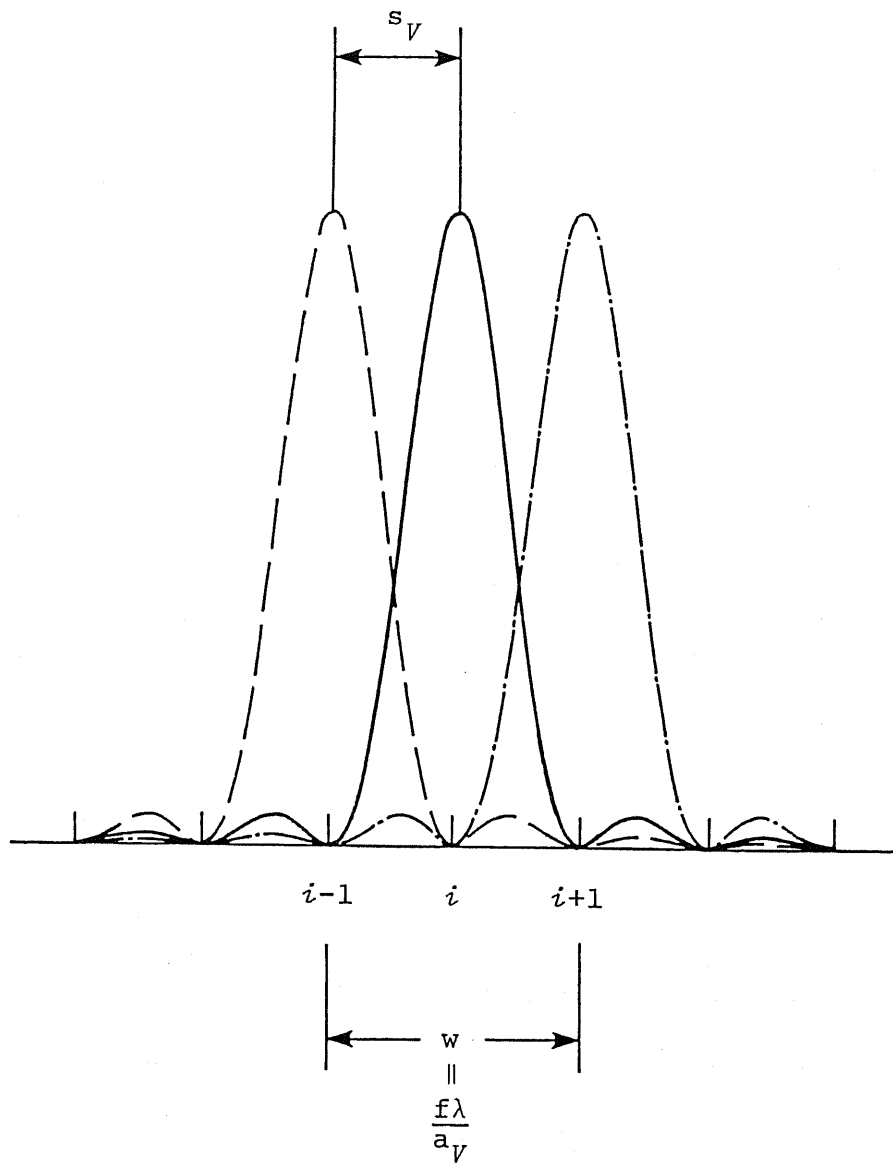


図4-1. 行列マスク小開口における回折像と出力成分の出現位置（光源の配置間隔）との関係

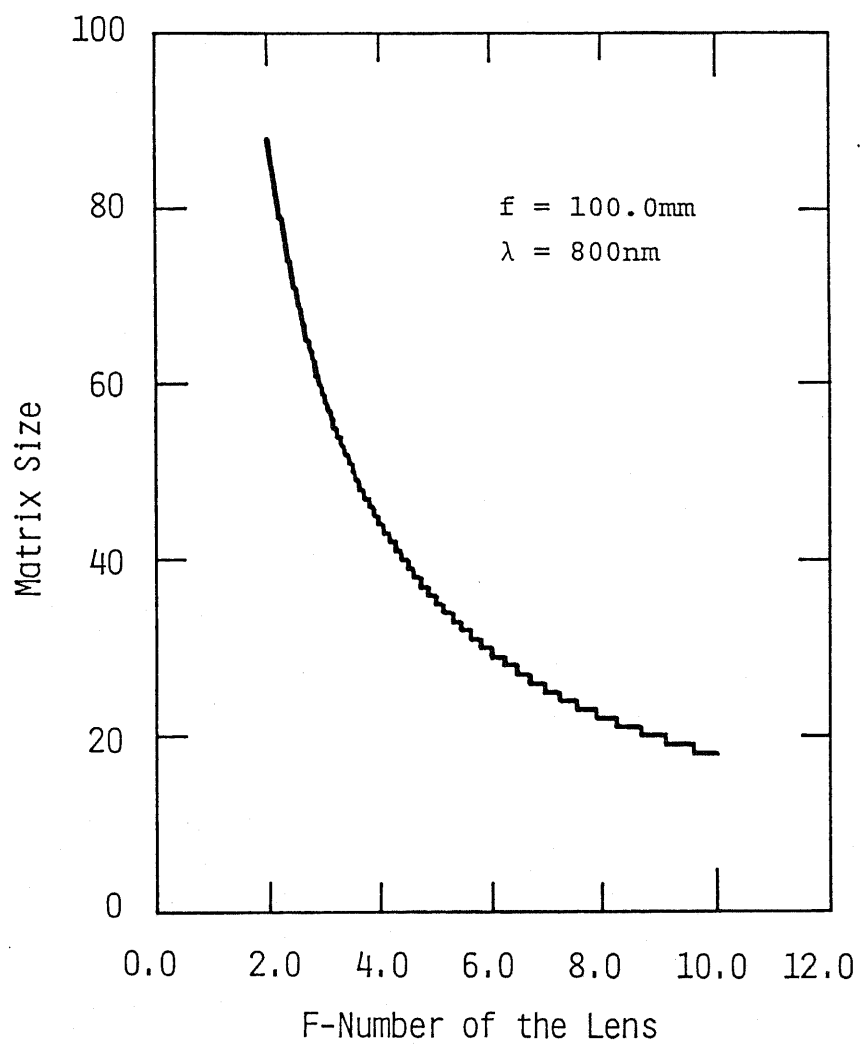


図 4 - 2 . 使用するレンズの F ナンバーと  
演算可能な正方行列の次元との関係

系で88次までの正方行列同士の乗算が可能であることがわかる。このとき、並列に実行されるスカラ乗算数は、 $6.8 \times 10^5$ 個である。

また、空間的な並列性を考えたときには、なるべくLを小さく設定し、M、Nを大きく選べるようにする方が得であることが(4-23)式からわかる。すなわち、行列-行列乗算器としての動作は、次元の非常に高い行列に対しては期待できない。これは、非常に高次元の行列乗算を実行する場合には、むしろ、ベクトル-行列乗算器として利用した方が空間の利用効率が高いことを示唆している。こうした使用モードの変更のためには、光源に関しては点灯させるLEDの数を適当に選ばばよい。また、行列マスクについては、マスク中のセグメントの取り方を変えればよい。いずれにせよ、光学系そのものを変更する必要はなく、単なるベクトル-行列乗算器にはない柔軟性を有している。

以上の議論は、光源の配置間隔ならびに行列マスク内の小開口の寸法が自由に選べる場合に成り立つものである。しかし実際には、これらの値は、使用するデバイスの特性として予め与えられるものであろう。したがって、光源の配置間隔および行列マスク小開口寸法（空間光変調器の分解能の逆数）が与えられたときに、光学系で実行し得る並列スカラ乗算数が最大となるような行列の大きさを議論することには大きな意味がある [5]。

いま、光源の水平面内、垂直面内の配置間隔をそれぞれ、 $s_H$ 、 $s_V$ とし、行列マスク小開口寸法を $a_H \times a_V$ （水平×垂直）とする。このとき、行列A、Bの大きさを、

$$L = \frac{D[(s_V + s_H) - \sqrt{s_V^2 - s_V s_H + s_H^2}]}{3s_V s_H} \quad (4-24)$$

$$M = \frac{D(2s_H - s_V + \sqrt{s_V^2 - s_V s_H + s_H^2})}{3a_V s_H} \quad (4-25)$$

$$N = \frac{D(2s_V - s_H + \sqrt{s_V^2 - s_H s_V + s_H^2})}{3a_H s_V} \quad (4-26)$$

を満たすようにとれば、図 3-4 の光学系中で実行される並列スカラ乗算の回数  $LMN$  は最大となる。例えば、 $a_H = a_V = 0.1\text{mm}$ ,  $s_H = 0.6\text{mm}$ ,  $s_V = 0.8\text{mm}$  の場合には、 $L = 23$ ,  $M = 311$ ,  $N = 358$  となり、このときの並列乗算数は最大値  $2.5 \times 10^6$  となる。

#### 4-4. 演算誤差と演算速度との関係 [1],[2]

本節では、演算誤差として、行列マスク内の小開口における回折と光検出器における雑音とに着目し、演算速度と演算誤差との関係について簡単な議論を行う。

##### 4-4-1. 演算精度を制限する要因

図 3-4 に示した光学系において行列乗算を実行する際に演算精度を制限する要因として、次の諸点が考えられる。

- (1) 行列マスク内の小開口における回折に基づく漏話。
- (2) 光検出器における雑音（ショット雑音など）。
- (3) 光源からの出射光強度の変動。
- (4) 空間光変調器の非線形応答。
- (5) 光検出器の非線形応答。

しかし、(3) から (5) までに掲げた影響は、デバイス特性の改善、外部からの制御、補償などによって軽減することが可能であろう。しかし、(1) と (2) に関しては、除去することが不可能である。そこで、本章では、この 2 点に関して検討することにしよう。

また、実時間行列乗算用光学系における演算速度を制限する要因とし

ては、空間光変調器の書き込み・消去時間、光検出器のS/N（演算精度と関係する）などが掲げられる。現状では、空間光変調器の動作速度が遅く、光計算の速度はこれによって抑えられている。今後の研究により空間変調器の動作速度が高速になれば、この点による制限は緩和されるであろう。しかし、こうしたときにも、光検出器のS/Nによる制限は残る。そこで、本節では、光検出器による演算速度の制限について論ずる。なお、使用する光検出器としてはPINフォトダイオードを仮定した。

#### 4-4-2. 行列マスク開口における回折と演算誤差

光源の間隔  $s_V$  を(4-21)式のように選び、光検出器の受光面の大きさを  $d$  とすれば、回折による漏話の最大値  $c_r$  は、次式にて与えられる。

$$c_r = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{[M/2]} \int_{k f \lambda / a_V - d/2}^{k f \lambda / a_V + d/2} \text{sinc}^2 \left( \frac{\pi a_V}{f \lambda} x \right) dx \quad (4-27)$$

ただし、ここでは、出力として期待される平均パワーを基準として、漏話量を定義している。

(4-24)式を用い、光検出器の受光面の大きさ  $d$  を回折像の主ビーム全幅  $w (= 2 f \lambda / a_V)$  で規格化した値に対する漏話量  $c_r$  の変化を示したものが図4-3である。ここでは、88次正方形行列同士の乗算を行なう場合を仮定した。これから、受光面を狭くするほど回折による漏話量（演算誤差）が少なくなることがわかる。また、例えば、回折による漏話量を  $-40 \text{ dB}$  以下とするためには、検出器の受光面の大きさを回折像主ビーム全幅の0.03倍（この場合、 $17 \mu \text{m}$ ）以下にしなければならないことがわかる。

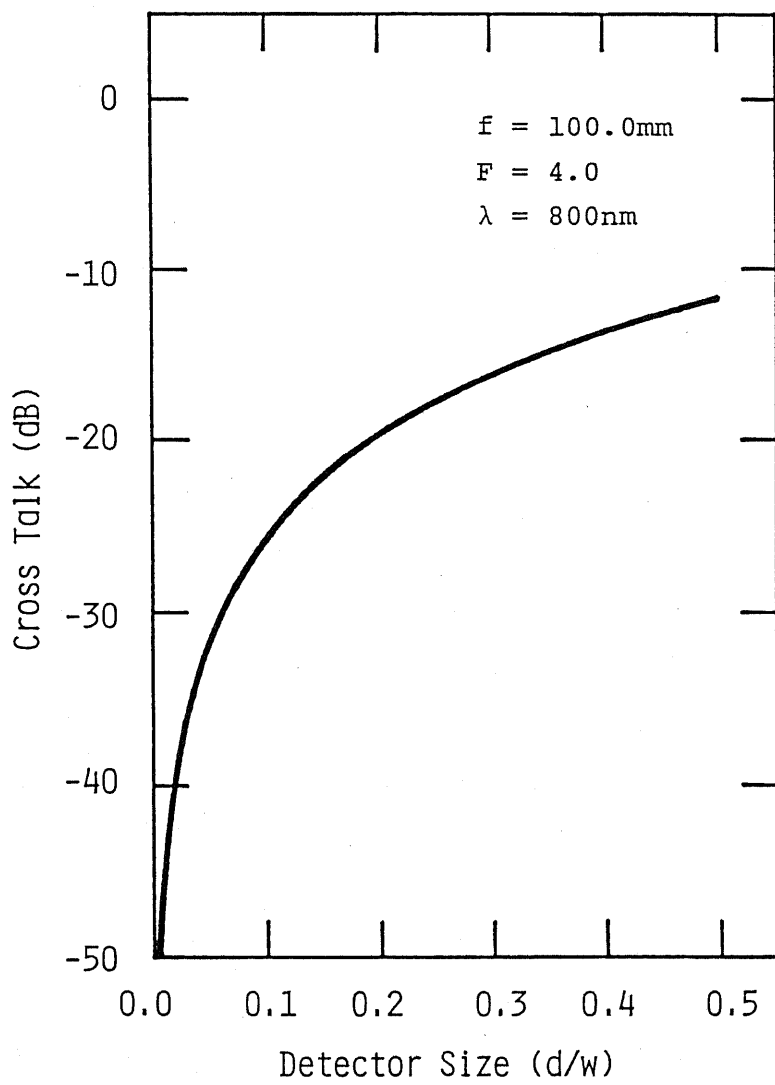


図4-3. 受光面の大きさと漏話量との関係

### 4-4-3. 演算誤差と演算速度との関係

前項の議論から、回折による漏話を小さくするためには、光検出器の受光面を狭くすればよいことがわかる。しかし、これは同時に、欲しい出力をも低レベルで検出しなくてはならないことを意味する。光源の出力を  $P_0$  とし、レンズの透過率を  $T_L$ 、行列マスク小開口を  $a_H \times a_V$  (水平×垂直) の長方形とする。また、行列マスクの最大透過率を  $T_M$  としたとき、出力面で観測される光のパワーの期待値  $P_d$  は、近似的に、

$$P_d \sim \frac{P_0 a_V a_H M}{4\pi f^2} T_M^2 T_L^{10} \int_{-a_V d/2f\lambda}^{a_V d/2f\lambda} \text{sinc}^2(\pi x) dx \quad (4-28)$$

で与えられる。ここで、光源からの出射ビームは前面全体に一様に広がるものとした。(4-29)式で求められる出力光パワー  $P_d$  を受光したときに、光検出器の  $S/N$  が所望の値以上になる条件によって、1フレーム当りの最大の演算速度(受信信号帯域)が制限されることになる。

ところで、前項の議論から、回折による漏話量は演算速度(受信信号帯域)によらないことがわかる。しかし、光検出器の  $S/N$  は、受信信号の帯域(最大演算速度)に依存する。したがって、図3-4に示した光学系によって行列乗算を行った結果に含まれる平均的な演算誤差  $N$  は、

$$N_L = \max(c_r, (S/N)^{-1/2}) \quad (4-29)$$

で与えられる。ここで、 $c_r$  は行列マスク内の小開口における回折に基づく漏話、 $S/N$  は光検出器における信号対雑音比である。

以上の議論に基づいて、 $F = 2.0$  のレンズを用いた場合の最大演算速度(受信信号帯域)と平均雑音レベルとの関係を示したものが図4-4である。ただし、光検出器における  $S/N$  は受信される光パワーの次元に換算してある。また、計算に際しては、1個当りの出力  $P_0$  が  $60\text{mW}$  のLED、暗電流  $I_d$  が  $0.1\text{nA}$ 、量子効率  $\eta$  が  $65\%$  であるショットノ



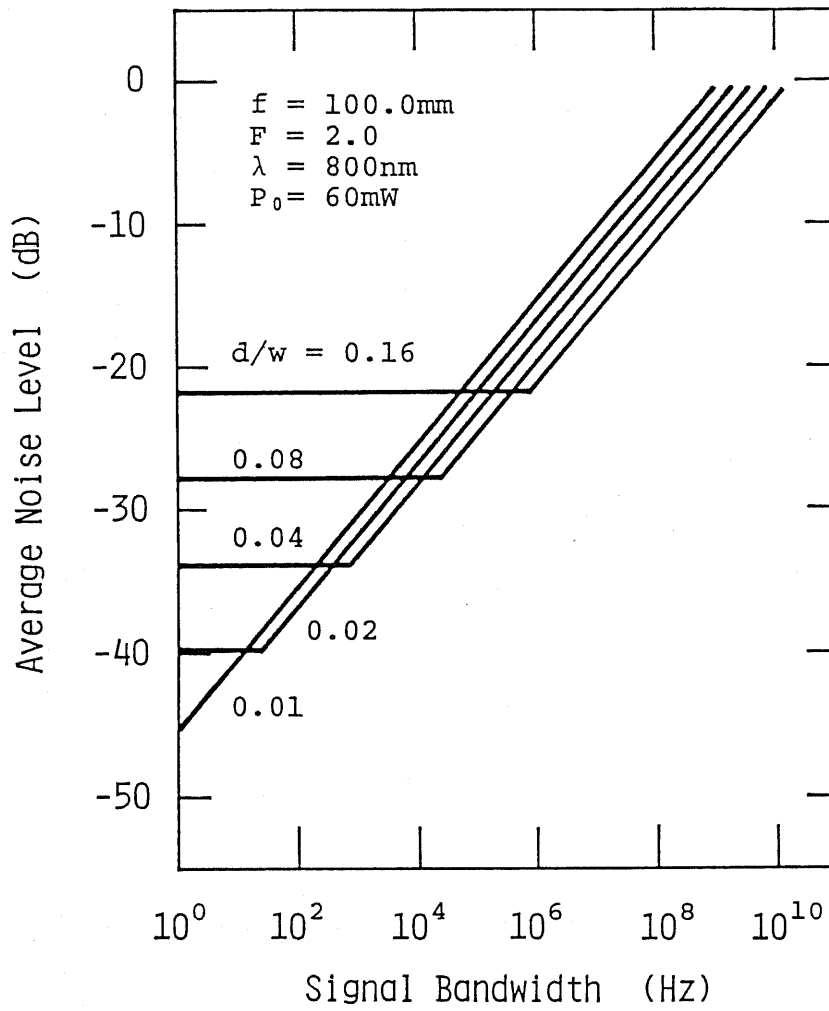


図4-4. 演算速度（信号帯域）と平均演算誤差（平均雑音レベル）との関係

行列A（ $20 \times 300$ ）とB（ $300 \times 300$ ）との乗算の場合

イズリミットのフォトダイオードを使用して、行列A(25×300)と行列B(300×300)との乗算を考えた。

図4-4を見ると、出力における平均雑音レベルがある演算速度までは一定となっており、それ以上の演算速度に対しては急激に上昇している。これは、雑音レベルが、ある演算速度までは回折に基づく漏話によって決定され、それ以上の速度では光検出器のS/Nによって決定されるためである。すなわち、最低の雑音レベルを維持し続ける間は、光検出器における積分時間が長いため、S/Nに余裕がある。しかし、それ以上の速度を要求すると、光検出器における雑音によって光学系全体の雑音レベルが決定される。そのために、この領域では、演算速度と共に雑音レベルが上昇するのである。

また、図4-4から、平均雑音レベルを-30dB以下とするためには、受信信号帯域を8kHz以下にする必要があることがわかる。これは、スカラ乗算を毎秒 $1.4 \times 10^{10}$ 回実行することに相当する。本光学系ではアナログ演算が行われているために、この演算速度を在来の電子計算機と単純に比較することには意味はない。しかし、一応の目安として比較すれば、上記のスカラ乗算回数は、現在のスーパーコンピュータとほぼ同程度の値である。

#### 4-4-4. 使用するデバイスへの要求 [5]

以上の議論は、空間光変調器の応答時間が0であると仮定したときに成立する。実際には、空間光変調器の動作速度を考慮して、行列乗算用光学系としての演算速度を議論する必要がある。

前項の議論から、演算精度をあるレベル以上に保つためには、光検出器の受光面サイズと受信信号帯域が制限されることがわかっている。こうして制限される受信信号帯域の逆数(光検出器の積分時間)を $\tau_0$ とする。また、空間光変調器の書き込み・消去時間を $\tau_S$ ,  $\tau_R$ とする。このとき、入出力まで考慮した行列乗算用光学系の演算時間は、空間光

変調器に書き込まれた1フレームあたり、

$$\tau = \tau_0 + \tau_S + \tau_R \quad (4-30)$$

となる。したがって、このときの等価演算速度（行列乗算に含まれるスカラ乗算回数に換算した演算速度）は、

$$n = \frac{1}{\tau} LMN \quad (4-31)$$

となる。いま、一つの目安として、光検出器の積分時間と空間光変調器の応答時間を釣り合わせる場合を考えよう。このとき、使用デバイスとして必要な特性を示したものが表4-1である。これが満足されれば、毎秒4000回の行列乗算（スカラ乗算に換算して毎秒  $7.0 \times 10^9$  回）が可能となる。

#### 4-5. まとめ

実時間行列乗算用光学系の演算性能に関する基礎検討として、任意複素数成分を有する行列の取扱い方、光学系において取り扱い可能な行列の大きさ、ならびに、演算速度と演算精度との関係について議論した。

1の立方根または4乗根を単位ベクトルとして用い、複素平面上で任意複素数を非負実数のみを係数として展開することによる取り扱い方を示した。前者は空間の利用効率の上では有利であるが、コーディング・デコーディングの面では、後者の方が有利である。

光学系において演算可能な行列の次元を制限する最大の要因は、行列マスク内の小開口における回折である。この制限に関して議論した。

また、回折による漏話は、演算精度をも制限する。演算精度は、光検出器における積分時間（受信信号帯域）によっても制約を受ける。この他に、行列乗算用光学系における演算速度を制限する要因としては、空間光変調器の書き込み・消去時間なども考えられる。現状では、前者に

表 4 - 1 . 実時間行列乗算用光学系に必要な  
デバイスパラメータの例

光源	種類 素子数 素子間隔 最大出力 発振波長	リニアLEDアレイ 20 $s_V=0.8\text{mm}$ , $s_H=0.6\text{mm}$ 60mW each 800nm
行列マスク	種類 有効開口 分解能 コントラスト 応答速度 最大透過率	2次元空間光変調器 35mm × 35mm 10lp/mm 1000 : 1 8kHz (Full Frame) 40%
光検出器	種類 素子数 素子間隔 量子効率 暗電流	2次元PDアレイ 20 × 300 = 6000 $s_V=0.8\text{mm}$ , $a_H=0.1\text{mm}$ 80% 100pA
レンズ	焦点距離 有効領域	100mm / 50mm 50mm × 50mm
行列 最大行列演算速度 等価演算速度		A 20 × 300 B 300 × 300 4000/sec $7.2 \times 10^9$ mult/sec

よる制約の方が厳しくなっている。しかし、空間光変調器の開発によって、この制約はやがて緩くなるものと考えられる。こうした場合でも、光検出器でのショット雑音による制約は本質的なものとして残される。そこで、本稿では、この点についての検討結果を示した。

#### 参 考 文 献

- [1] H.Nakano and K.Hotate; "Limit of Parallelism and Operational Speed in the Optical System for Real-Time Matrix-Matrix Multiplication," First Optoelectronics Conference (OEC'86), July 29-31, 1986, Tokyo, Paper No. C7-2.
- [2] 中野・保立、「実時間行列乗算用光学系における並列性と演算速度の限界」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE85-165 (1985)。
- [3] J.W.Goodman, A.R.Dias, and L.M.Woody; "Fully Parallel, High-Speed Incoherent Optical Method for Performing Discrete Fourier Transforms," Opt. Lett., Vol.2, No.1, pp.1-3 (1978).
- [4] M.Carlotto and D.Casasent; "Microprocessor-Based Fiber-Optic Iterative Optical Processor," Appl. Opt., Vol.21, No.1, pp.147-152 (1982).
- [5] 中野・保立、「2次元光源アレイを有する実時間行列乗算用光学系」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE86-112 (1986)。

## 第 5 章

### 実時間多段行列乗算用 光学系の構成 II

#### 2次元光源アレイを有する光学系の構成

##### 5-1. はじめに

第3章では、行列同士の積を実時間的に、しかも、光出力として与えるインコヒーレント光学系を提案した [1],[2]。この光学系では、リニア光源アレイを導入し、その空間的な配置法の工夫によって、行列-行列乗算に必要な  $N^3$  並列性を、特殊レンズを用いることなく実現したところに大きな特徴がある。

本章では、この実時間行列乗算用光学系を改善し、さらに演算機能を拡張した光学系を提案する [3]-[5]。この光学系を用いれば、行列同士3個の実時間乗算を、一方向拡散板を用いることなく実行することが可能である。本光学系への移行においては、光源部分が変更される。すなわち、第3章で提案した光学系はリニア光源アレイを使用したのが、本章で提案する光学系では2次元光源アレイを導入する。この光源素子数の増加によって、光学系の機能が拡張される訳である。さらに、図3-1に示した実時間多段行列乗算用光学系と同じ動作（行列3重積演算）をするために必要となるレンズ数が減少し、光学系の全長も短縮される。なお、前章までに議論してきた光学系と同様に、4個以上の行列同士の乗算を行うための光学系へ拡張することも可能である。この方法について

ても述べる。

さらに、2次元光源アレイを有する実時間多段行列乗算用光学系の演算性能（演算可能な行列の大きさ・演算速度と演算精度との関係）について、第4章と同様にして議論する。また、この光学系の動作を確認するために行った基礎実験の結果も示す。

## 5-2. 光学系の構成 [3]-[5]

本章で提案する光学系の構成を図5-1と図5-2に示す。ただし、ここでは、3次正方行列の演算を扱うための光学系を例として示した。これらの図中で、SLは焦点距離 $f$ の球面レンズを表し、CL, CL<sub>2</sub>は焦点距離がそれぞれ、 $f$ ,  $f/2$ のシリンドリカルレンズを表す。また、A, Bは演算される行列を与える2次元空間光変調器である。以下、これらを行列マスクと呼ぶ。行列A, Bの成分の値は、行列マスク内の小開口（画素）のパワー透過率として与えられる。さらに、Sは2次元のLEDアレイである。本光学系を行列3個の乗算用に用いるときには、Sによって乗算される行列の1つ（第一番目の行列）を表し、その成分の値は各光源素子の出射光強度によって与える。そのため、光学系で取り扱い得る行列成分は、原理的には非負実数に限られる。しかし、任意の複素数成分を有する行列であっても、適当なコーディングを用いることによって取扱い可能である [6]-[8]。この点については、前章で述べた通りである。

光源Sは、図3-1の光学系ではリニアLEDアレイであったが、本光学系では2次元LEDアレイになっている。この変更によって、光学系における演算機能が拡張されている。この点が重要な変更点である。図5-1は、第3章で提案した光学系[1],[2]において、光源Sを2次元LEDアレイに置き換え、光源直後のレンズ配置に若干の変更を加えたものである。これは、2次元アレイ状に光源を配置したときに、光源

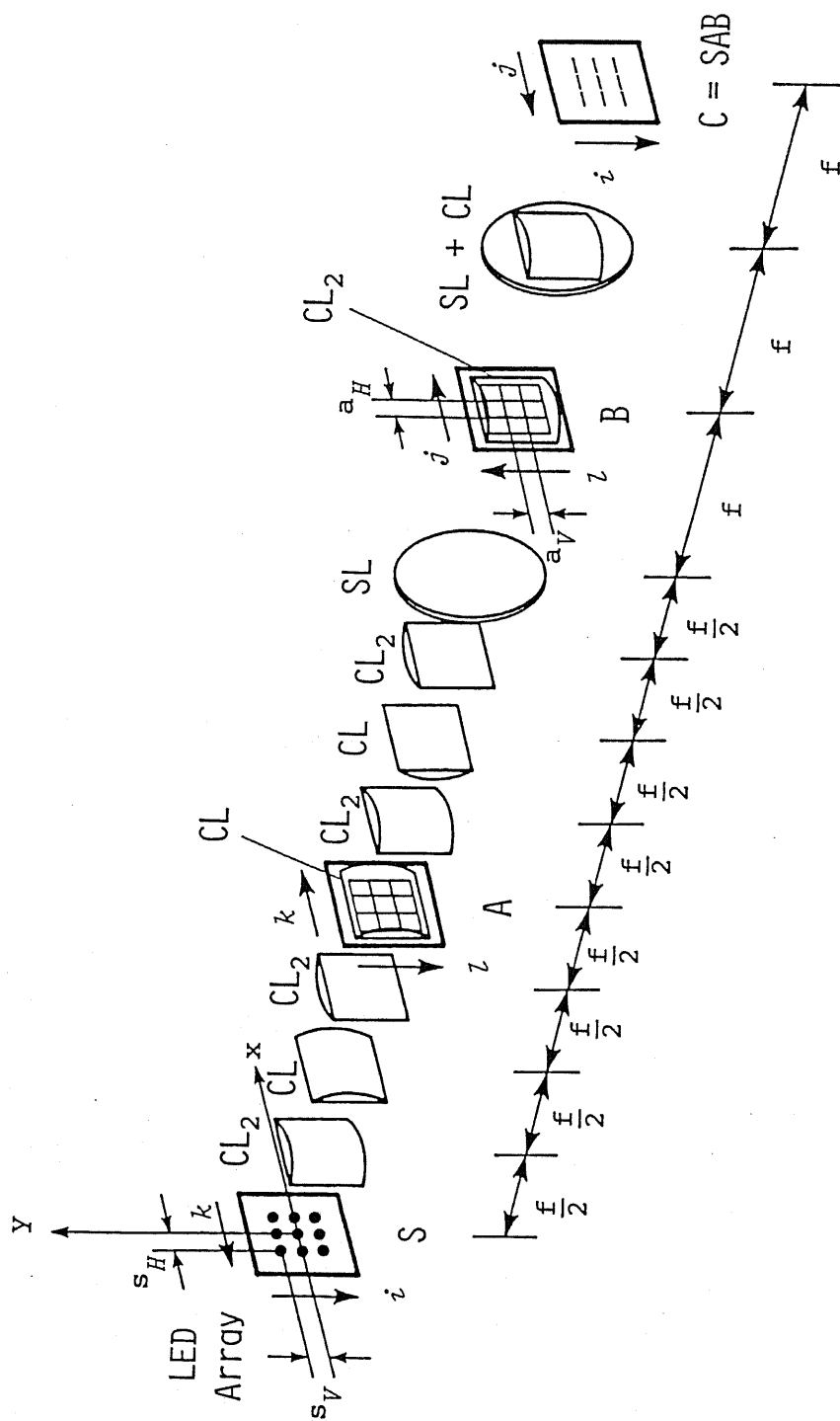


図5-1. 2次元光源アレイを有する実時間多段行列乗算用光学系の構成  
 (図3-1の光学系を改善したもの)



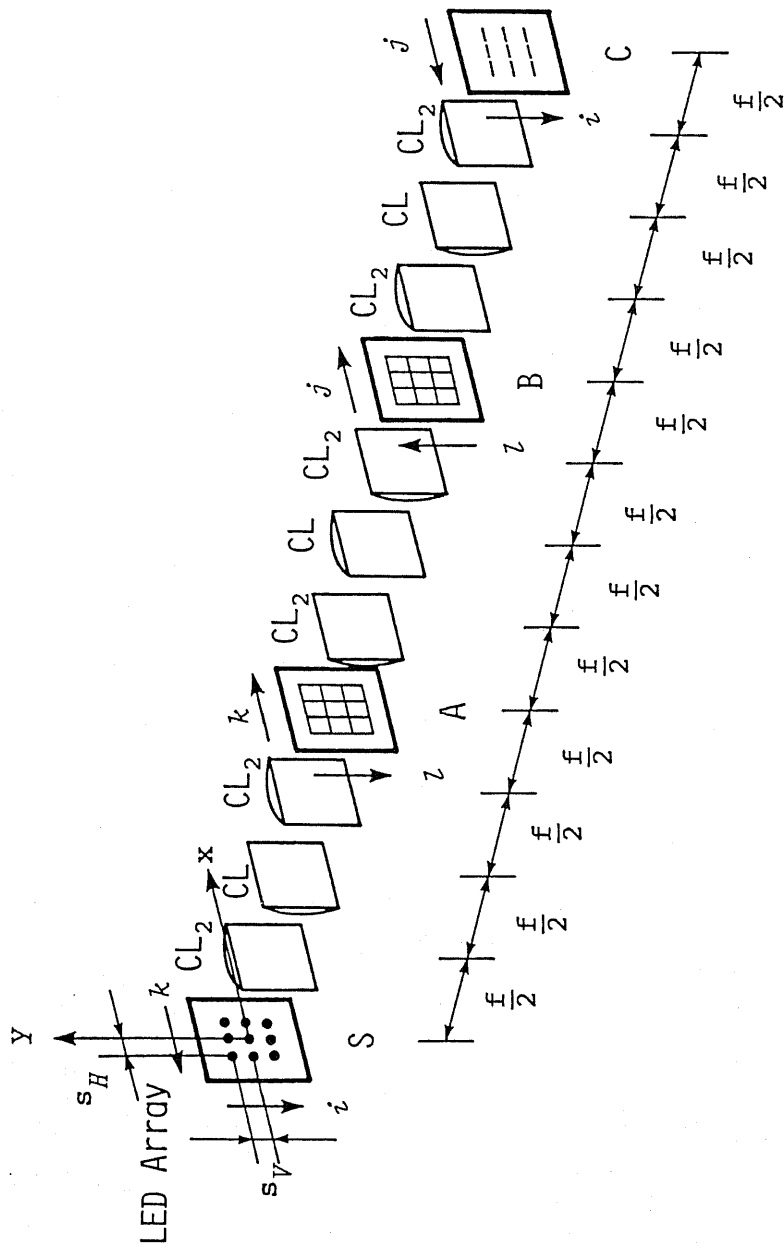


図5-2. 2次元光源アレイを有する実時間多段行列乗算用光学系の構成  
 (文献[9]のレンズ配列を応用したもの)

素子の水平面内での配置間隔が狭くなり過ぎることを回避するための措置である。したがって、図3-1に示したレンズ配置のままで、光源部分を2次元アレイ化することによって、これと全く同じ機能の光学系を構成することも可能である。

図5-2の光学系においては、以前に提案したものとは異なったレンズ配置法[9]を応用している。これは光学系を実際に構成する際の便宜を図ったものであり、図5-1の系も図5-2の系もその動作には全く相違がない。本章では、特に断わりのない限り、第3章の光学系との連続性を重んじ、図5-1の光学系について議論する。なお、本章の光学系においても、スカラの乗算は行列マスクの透過率によって実行され、加算はレンズの集光作用によって実行される。

### 5-3. 光学系の動作原理 [3]

本節では、前節で提案した2次元光源アレイを有する実時間多段行列乗算用光学系を用いて行列3個の乗算が実行可能であることを証明する。ただし、ここでは、図5-2の光学系について動作原理の証明を行う。なお、簡単のために、光学系中で用いられているレンズ開口の有限性ならびに、レンズの収差の影響を無視する。また、2次元アレイを構成する光源素子の発光面は十分に小さいものとする。

2次元光源アレイSの $(i, k)$ 成分に相当するもの $(i, k)$ の取り方は、図5-2中に示した通りとする)の出力(振幅)を $s_{ik}$ とすれば、S面上の振幅分布 $U_S(x, y)$ は、

$$U_S(x, y) = \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^L s_{ik} \delta(x - \bar{x}_k, y - \bar{y}_i) \quad (5-1)$$

と表される。ここで、S~Aの対応を考えると、x軸方向には結像系になっており、y軸方向にはフーリエ変換系になっている。このことから、

行列マスク A の光源側における振幅分布  $U_A^-(x, y)$  は、

$$U_A^-(x, y) = \sum_i \sum_k s_{ik} \delta(x + \bar{x}_k) \exp(-j \frac{2\pi}{f\lambda} \bar{y}_i y) \quad (5-2)$$

と表される。したがって、行列マスク A を通過した直後における波面の振幅分布  $U_A^+(x, y)$  は、A の振幅透過率の分布関数を  $f_A(x, y)$  として、

$$U_A^+(x, y) = U_A^-(x, y) f_A(x, y) \quad (5-3)$$

で与えられる。同様にして、行列マスク B を通過する直前、直後の振幅分布  $U_B^-(x, y)$  および  $U_B^+(x, y)$  は、次式のようなになる。

$$U_B^-(x, y) = \sum_i \sum_k s_{ik} f_A(-\bar{x}_k, -y) \times \exp[-j \frac{2\pi}{f\lambda} (-\bar{x}_k x + \bar{y}_i y)] \quad (5-4)$$

$$U_B^+(x, y) = U_B^-(x, y) f_B(x, y) \quad (5-5)$$

ここで、 $f_B(x, y)$  は行列マスク B の振幅透過率分布である。さらに、行列マスク B から行列マスク C への対応を考えれば、C 面上に現れる振幅分布  $U_C^-(x, y)$  は、

$$\begin{aligned} U_C^-(x, y) &= \sum_i \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} s_{ik} f_A(\bar{x}_k, -y_B) f_B(-x, y_B) \\ &\quad \times \exp[-j \frac{2\pi}{f\lambda} (\bar{x}_k x + \bar{y}_i y_B + y_B y)] dy_B \\ &= \sum_i \sum_k s_{ik} \exp(-j \frac{2\pi}{f\lambda} \bar{x}_k x) \\ &\quad \times [F_{y_B} \{f_A(\bar{x}_k, -y_B) f_B(-x, y_B)\} \\ &\quad * \delta(\xi - \bar{y}_i / f\lambda)]_{\xi=y/f\lambda} \end{aligned} \quad (5-6)$$

となることがわかる。

したがって、この像を狭いスリット群  $\sum_i \delta(y - \bar{y}_i)$  を通して検出することを考えれば、このときに得られる出力  $U(x, y)$  は、

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^L s_{ik} \exp(-j \frac{2\pi}{f\lambda} \bar{x}_k x) \times \int_{-\infty}^{\infty} f_A(\bar{x}_k, -y_B) f_B(-x, y_B) dy_B \quad (5-7)$$

となる。ここで、インコヒーレント光源（時間的コヒーレンスが悪いという意味）を用いて、光パワーを検出することにすれば、(4-7)式から  $x = \bar{x}_j$  ,  $y = \bar{y}_i$  における出力  $c_{ij}$  は、

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^L s_{ik}^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_A^2(\bar{x}_k, -y) f_B^2(-\bar{x}_j, y) dy \quad (5-8)$$

となることがわかる。ここに、 $\bar{x}_j$  は行列マスクBにおけるj列目の小開口中心のx座標である。以上により、光源アレイによって最初の行列を表すことにすれば、図5-2の光学系を用いて3個の行列を乗算することが可能であることが示された。

図5-1の光学系についても、同様にして動作原理の証明をすることができる。

(5-8)式から、本章の光学系では、行列3重積演算を次の手順で実行していることがわかる。

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^M s_{ik} a_{kl} b_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^L s_{ik} \left( \sum_{l=1}^M a_{kl} b_{lj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^L s_{ik} ({}^t \mathbf{a}_k \mathbf{b}_j) \end{aligned} \quad (5-9)$$

上式からわかるように、本章で提案する光学系における行列3重積演算の実行手順は、「内積演算法」のみを用いる第3章で提案した光学系における演算手順とは異なっている。すなわち、本章の光学系では、行列AとBとの乗算は「内積演算法」によって実行され、その積と行列Sと

の乗算は「外積演算法」[10]によって実行されることになる。

#### 5-4. 光学系の拡張方法 [3]

図5-1の光学系によって行列3個の乗算が可能であることは、前節の議論で明らかとなった。ここで、行列-行列乗算のために光学系を使用する場合について注意が必要である。このときにも、光学系の構成をこの図に示した構成よりも簡略化することはできない。つまり、こうした場合にも、形式的に行列3個の乗算を実行しないと結果が得られないのである。行列-行列乗算用光学系としての使用方法には、2通りの方法を掲げることができる。すなわち、光源を $S = E$ とし、2つの行列マスクによって乗算される行列を与えることにするか、あるいは、 $S$ で最初の行列を与え、2つの行列マスクの一方を $E$ とするかである（ここで、 $E$ は単位行列である）。なお、光源において $S = E$ とし、図5-1の光学系を使用して行列 $A$ と行列 $B$ との乗算を実行するときの概念図（光線追跡図）を図5-3に示す。これは、光源直後のレンズ配置の違いを除けば、図3-4の光学系に他ならない。

次に、図5-1の光学系を行列4個以上の乗算用に拡張する方法について検討しよう。この拡張を検討する場合に、上記の注意事項が参考となる。すなわち、乗算したい行列の個数が偶数ならば、光学系中に必要となる空間光変調器の数は、乗算される行列の個数に等しくなる。しかし、乗算したい行列の個数が奇数の場合には、光源アレイによってそのうちのひとつを与えることができるために、光学系中に必要となる空間光変調器の数は、乗算される行列の個数よりも1個少なく済む。

一方、リニア光源アレイを有する構成の光学系を拡張するときの議論から[2]、光学系を接続する部分にある種の拡散特性を有する光学部品を配置する必要がある。これは、光パワーの和として得られる中間積を、光パワーの和を保ちつつ次段の行列マスク上のある特定の方向に一様照

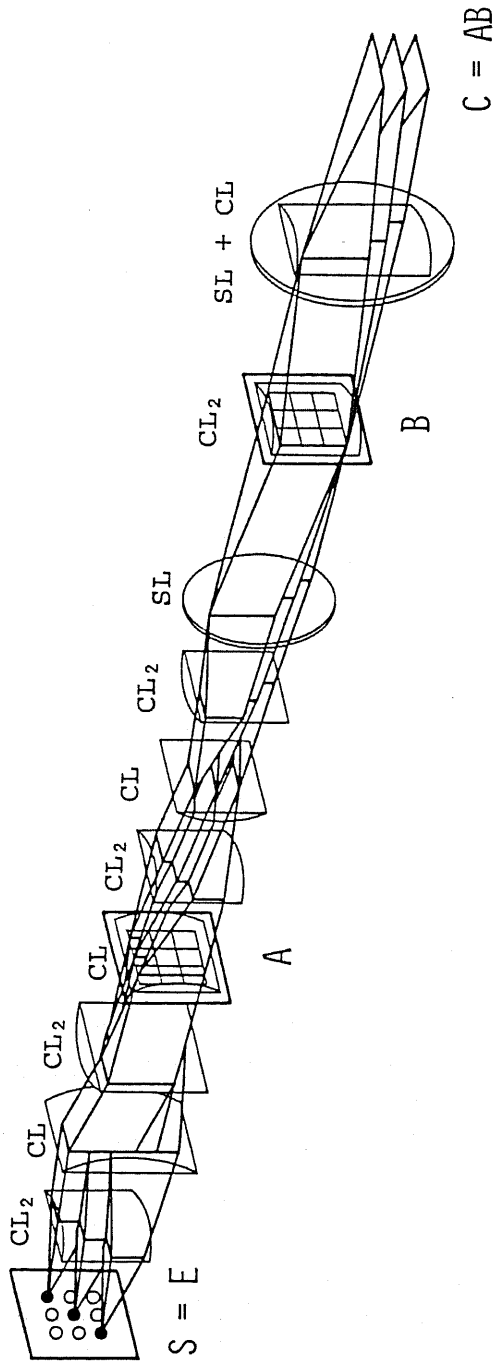


図5-3. 図5-1の光学系で  $S = E$  としたときの光線追跡図

射する必要があったからである。リニア光源アレイを用いる光学系においては、この接続部品が一方向拡散板であった[1],[2],[12]。ところが、本光学系においては、通常のディフューザが光学系の接続部品として用いられる。この理由は、図5-1において2次元光源アレイの部分をディフューザに置き換えて考えれば、容易に理解できる。すなわち、背面から光を照射したディフューザは、互いに無相関な点光源の2次元的な集合体と見做すことができる。このようにディフューザをモデリングした上で、前節の議論を適用することによって、拡張した光学系の動作を示すことができる。

図5-1の光学系を行列4個あるいは5個の乗算用に拡張した光学系の構成を示したものが図5-4である。図中、Dとして示したものがディフューザである。この光学系を用いて行列4個の乗算を行う場合、行列マスクならびに光源アレイの点滅状態の選択方法には、2通りある。このことは本節の冒頭で述べた注意事項から明らかであろう。

## 5-5. 光学系の演算性能に関する基礎検討 [3],[4]

本節では、図5-1に示した光学系によって演算可能な行列の大きさ（並列性）、ならびに、演算速度と演算精度との関係について簡単に議論する。この結果から、本光学系の設計指針が明らかとなる。なお、本節の議論の筋道は、第4章での議論[6]と同様である。

### 5-5-1. 演算可能な行列の大きさ [4]

図5-1の光学系によって演算可能な行列の大きさを制限する最大の要因は、行列マスク小開口における回折である。これ以外にも、光源の大きさ・レンズの収差等の制限要因は存在する。しかし、その影響は行

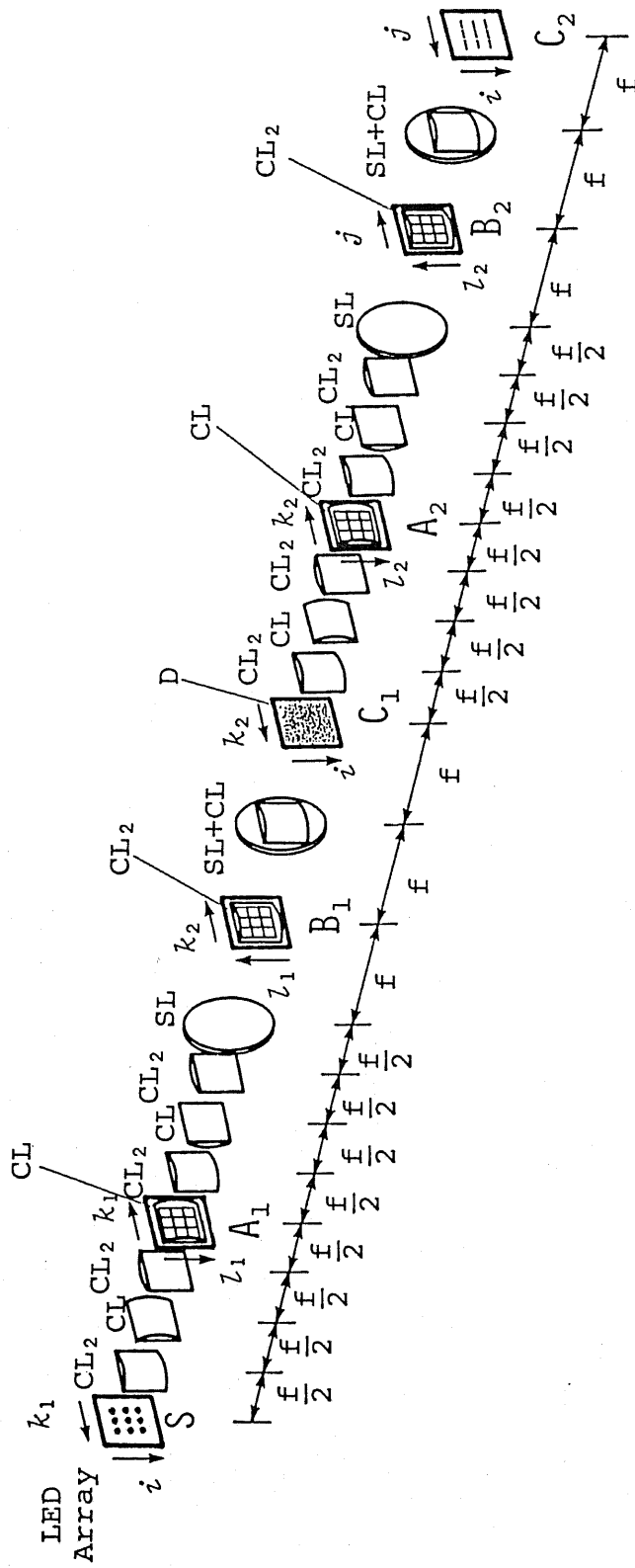


図 5-4. 図 5-1 の光学系を拡張して行列 5 個までの乗算を可能とした光学系の構成



列マスクにおける回折に比べて小さいと考えられるため、ここでは無視する。

レンズの有効領域を  $D \times D$ 、焦点距離を  $f$  とし、使用する光の波長を  $\lambda$  とする。行列マスク小開口寸法を  $a_H \times a_V$  とし、光源の配置間隔を  $s_H \times s_V$  とする（添字の  $H, V$  はそれぞれ水平面内、垂直面内における寸法を意味する）。また、行列  $S, A, B$  の大きさをそれぞれ、 $K \times L, L \times M, M \times N$  とする（このとき、光学系で一度に実行される並列スカラ乗算回数は、 $2 K L M N$  である）。ここで、第4章の議論と同様に考えれば、図5-1の光学系で演算可能な行列の大きさを制限する条件式として、

$$s_V = \frac{f\lambda}{a_V} \quad (5-10)$$

$$(K-1)s_V + Ma_V \leq D \quad (5-11)$$

$$(L-1)s_H + Na_H \leq D \quad (5-12)$$

を得る。例えば、 $\lambda = 800 \text{ nm}$  で、 $f = 100 \text{ mm}$ 、 $D = 50 \text{ mm}$  のレンズを使用して正方向列同士の乗算を実行する場合を考えると、最大88次の行列まで演算可能であることがわかる。

(5-11), (5-12)式から、 $s_H, s_V, a_H, a_V$  が与えられたとき、すなわち、光源アレイの素子間隔ならびに2次元空間光変調器の分解能が与えられたとき、光学系中で実行される並列スカラ乗算回数を最大にする  $K, L, M, N$  を求めると、

$$K = \frac{1}{2s_V} (D+s_V) \quad (5-13)$$

$$L = \frac{1}{2s_H} (D+s_H) \quad (5-14)$$

$$M = \frac{1}{2a_V} (D+s_V) = \frac{s_V}{2f\lambda} (D+s_V) \quad (5-15)$$

$$N = \frac{1}{2a_H} (D+s_H) \quad (5-16)$$

となる。このとき、光学系で実行される並列スカラ乗算回数は、

$$2KLMN = \frac{(D+s_V)^2 (D+s_H)^2}{8a_H s_H f\lambda} \quad (5-17)$$

である。先程示した例と同じ条件で、 $s_H = 0.5\text{mm}$ 、 $s_V = 0.8\text{mm}$ 、 $a_H = a_V = 0.1\text{mm}$ の場合を考えると、この光学系で演算し得る行列の大きさの限界は  $K = 25$ 、 $L = 50$ 、 $M = N = 250$  となる。この行列3重積演算に含まれる並列スカラ乗算数は、 $1.5 \times 10^8$  個である。

#### 5-5-2. 演算速度と演算精度との関係 [4]

光学系における演算速度ならびに精度を制限する要因として、空間光変調器の動作速度、光検出器における  $S/N$ 、各素子の非線形性、回折による漏話などを掲げることができる。ここでは、これらのうち、デバイスの進歩によっても解消し得ないもの、すなわち、回折による漏話と光検出器における  $S/N$  とによって制限される演算速度と精度との関係について議論する。

第4章の議論と同様にして、平均的な出力に対する回折による平均漏話量  $c_r$  は、おおよそ、

$$c_r = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{[K/2]} \int_{kf\lambda/a_V-d/2}^{kf\lambda/a_V+d/2} \text{sinc}^2 \left( \frac{\pi a_V}{f\lambda} x \right) dx \quad (5-18)$$

として与えられる。ここで、 $d$  は光検出器の垂直面内における開口寸法である。

次に、光検出器における  $S/N$  について考えよう。光検出器における  $S/N$  は、受信信号の帯域（本質的な演算速度）と受信される光パワーとによって決定される。光検出器の開口が  $a_H \times d$ （水平×垂直）の矩形であるときの受信される光パワーの期待値  $P_d$  は、

$$P_d \sim \frac{P_0 a_V a_H LM}{16\pi f^2} T_M^2 T_L^{11} \frac{1}{\pi} \int_{-a_V d/2f\lambda}^{a_V d/2f\lambda} \text{sinc}^2(\pi x) dx \quad (5-19)$$

で与えられる。ここで、 $P_0$  は光源素子の最大出力パワー、 $T_M$  は空間光変調器の最大透過率、 $T_L$  はレンズの透過率である。この式によって求められる光パワーを用いれば、受信信号の帯域が与えられると光検出器における平均的な  $S/N$  を求めることができる。また、この平均的な出力に含まれる平均雑音レベル（演算誤差） $N_L$  は、次式によって見積られる。

$$N_L = \max( c_r, (S/N)^{-1/2} ) \quad (5-20)$$

以上の議論に基づいて、平均演算誤差と受信信号帯域（空間光変調器の動作速度が無限に速ければこれが光学系における演算速度となる）との関係を示したものを図5-5に示す。ここで、光源素子間隔および行列マスク小開口寸法を前項の例で示した通りとしたときに、光学系中の並列度が最大となる演算を実行する場合を考えた。なお、この計算に際して、用いる各LEDの最大出力を6.0mW、発振中心波長を800nmとし、光検出器・空間光変調器・レンズの諸特性に関しては第4章に示したものと同一値を用いた。この図から、演算結果に含まれる平均雑音レベルを-30dB以下とするためには、受信信号帯域を4kHz以下にする必要がある。これは、毎秒  $6.2 \times 10^{11}$  回のアナログのスカラー乗算を実行する演算速度に対応する。この値は、光源の出力を向上させることにより、さらに高速化することが可能である。また、以上の議論と同様にして、等価雑音温度1200Kの熱雑音によって制限された光検出器（結合容量3pF）を使用した場合について計算を行うと、演算結果中の平均雑音レベルを-30dB以下とするためには、受信信号帯域を800Hz以下（等価スカラー乗算実行速度  $1.2 \times 10^{11}$  mult/sec）とする必要があることがわかる。しかし、現実には、空間光変調器の動作速度が遅いため、これよりも低い演算速度に留まっている。

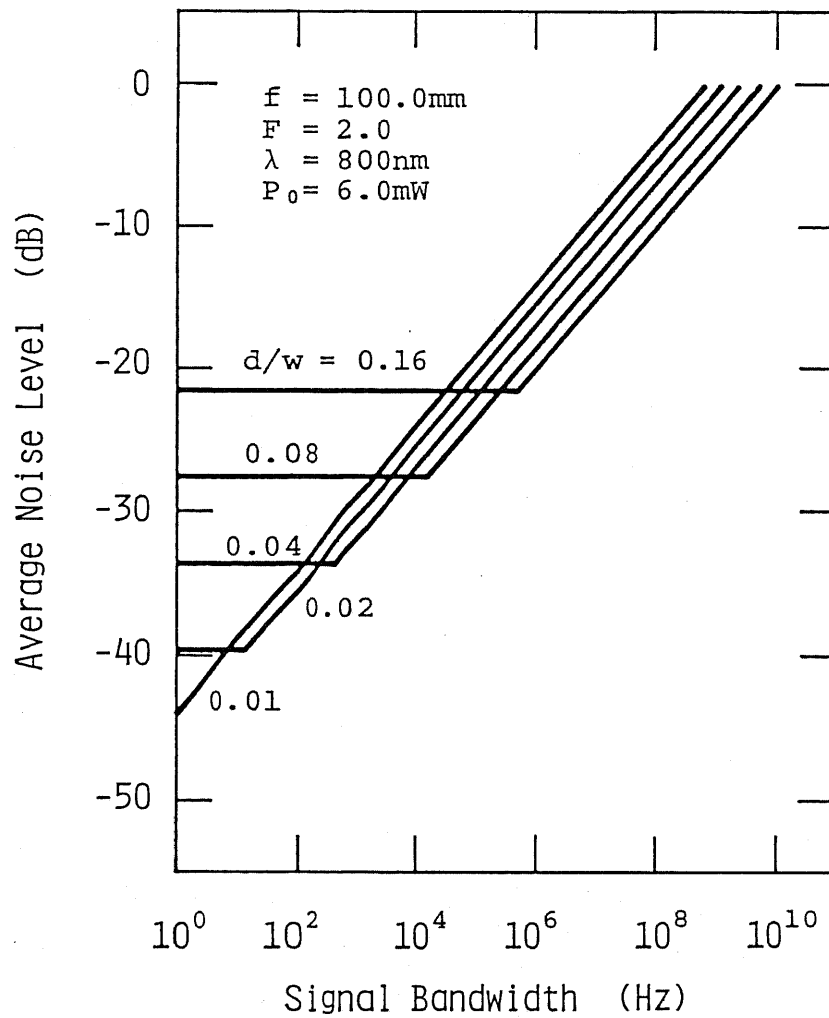


図 5 - 5 . 演算速度 (受信信号帯域) と演算誤差  
 (出力中の平均雑音レベル) との関係

行列  $S$  ( $25 \times 50$ ) ,  $A$  ( $50 \times 250$ ) ,  $B$  ( $250 \times 250$ )  
 の乗算を実行する場合

### 5-5-3. 使用デバイスへの要求 [4]

前項での議論においては、空間光変調器の応答時間を無視した。しかし、入出力時間までを含め、実際の行列乗算速度を議論するためには、この特性も考慮する必要がある。ここでも、簡単のため、第4章と同様に、光検出器における積分時間と空間光変調器の応答時間とが等しい場合について考えてみよう。この条件の下で図5-1の光学系を構成するために必要な素子の特性を表5-1に纏めて示す。

この表から、空間光変調器の動作速度が4kHz（書き込み・消去時間が $250\mu\text{s}$ ）ならば、図5-1の光学系によって、等価的にアナログのスカラ乗算を毎秒 $3.1 \times 10^{11}$ 回実行する演算速度で行列3重積演算を実行できる（平均雑音レベルを $-30\text{dB}$ 以下としたとき）ことがわかる。

### 5-6. 2種類の光学系の相互比較

5-4節の議論から、第3章で提案した光学系は、図5-1の光学系の特殊な場合であると考えられることもできる。すなわち、光源Sが単位行列Eを与え、行列AとBとの乗算をするとき、実際には3個の行列E, A, Bの乗算をこの順序で行っていたとも捉えることもできる。\*) このように見做せば、図5-1に示した光学系は図3-1の光学系[1],[2]を一般化したものと言うことができる。

---

\*) 光学系の拡張方法まで考えたときには、光源アレイの果たす役割が異なっているので、必ずしもこの解釈が的を得たものとはいえない。ここでは、単に皮相的には、こうした解釈もできるといっているに過ぎない点に注意して頂きたい。

表 5 - 1 . 2次元光源アレイを有する実時間多段行列  
乗算用光学系に必要なデバイスパラメータの一例

光 源	種 子 類 素 子 数 素 子 間 隔 最 大 出 力 発 振 波 長	2次元LEDアレイ 25 × 50 = 1250 $s_V=0.8\text{mm}$ , $s_H=0.5\text{mm}$ 6.0mW each 800nm
行 列 マ ス ク	種 効 開 類 有 効 開 口 分 解 能 コ ン ト ラ ス ト 応 答 速 度 最 大 透 過 率	2次元空間光変調器 30mm × 30mm 10lp/mm 1000 : 1 4kHz (Full Frame) 40%
光 検 出 器	種 子 類 素 子 数 素 子 間 隔 量 子 効 率 暗 電 流	2次元PDアレイ 25 × 250 = 6250 $s_V=0.8\text{mm}$ , $a_H=0.1\text{mm}$ 80% 100pA
レ ン ズ	焦 点 距 離 有 効 領 域	100mm / 50mm 50mm × 50mm
行 列 最 大 行 列 演 算 速 度 等 価 演 算 速 度		S 25 × 50 A 50 × 250 B 250 × 250 2000/sec $3.1 \times 10^{11}$ mult/sec

また、図5-2に示した光学系は、光源アレイを導入することによって、文献[9]の光学系を改良し、特殊な光学部品（相互に煽りを有する微小シリンドリカルレンズアレイ）を用いることなく、実時間的に行列-行列乗算を実行可能としたものである（リニア光源アレイを適用することによって、文献[9]の光学系をこのように改良し得ることは、米国海軍研究所のR.A.Athale博士からの私信によって指摘されている[11]）。さらに、この光学系を上記の意味で一般化したものが、図5-2に示した光学系であると見做すこともできる。

ところで、図5-1ならびに図5-2の光学系においては、一方向拡散板が用いられていない点に注目して頂きたい。第3章で提案した実時間多段行列乗算用光学系においては、行列3個の乗算を実行するためには、一方向拡散板が必須であった。しかし、以前にも指摘したように、この光学系を用いて行列3個の乗算を実行するときには、演算精度は一方向拡散板の拡散指向特性によって制限されていた[2],[12]。したがって、図5-1および図5-2の光学系において一方向拡散板を用いることなく行列3個の乗算を可能としたことは、演算精度を考慮したときにも、非常に有利な点となっている。一方、光源を2次元アレイ化したことにより、これまでの光学系よりも、光源デバイス面での負荷が確かに大きくなる。しかし、演算機能の拡張によって得られた演算精度向上のメリットに、遙かに価値がある。

第3章の図3-1に示した実時間多段行列乗算用光学系[1],[2]と図5-1および図5-2の光学系とを、行列を3個乗算する場合について比較したものを表5-2に示す。これから、図5-2に示した光学系が最も優れていることがわかる。ただし、光パワーの利用効率を考えたときには、図3-1の光学系において光源部分を2次元アレイ化したもの（図5-1に似た構成の光学系）が最も優れた特性を示す。

表 5 - 2 . 3 種類 の 光 学 系 の 相 互 比 較

		図 3 - 1 の 光 学 系	図 5 - 1 の 光 学 系	図 5 - 2 の 光 学 系
演 算 機 能		行 列 3 個 の 乗 算		
レ ン ズ	SL	6 枚	3 枚	0 枚
	CL	2 枚	3 枚	3 枚
	CL <sub>2</sub>	5 枚	5 枚	6 枚
一 方 向 拡 散 板		必 要	不 要	不 要
光 学 系 全 長		10 f	7 f	6 f
光 学 系 の 拡 張		可 能	可 能	可 能



## 5-7. 基礎実験 [4],[5]

図5-1ならびに図5-2に示した光学系の動作を確認するために、双方のレンズ配置を用いた実験系を構成して、基礎実験を行った。本節では、この結果を示す。

### 5-7-1. 基礎実験 I [4]

図5-1の光学系の動作を確認する目的で、実験系を構成して、3次正方行列3個の乗算を実行した。実験系の写真を図5-6に示す。光源としては、発振中心波長が800nmのLED（公称最大出力30mW）を9個使用した。隣接するLEDの配置間隔は5.4mmであり、これを結像光学系を用いて2.7mmに縮小している。球面レンズSLならびにシリンドリカルレンズCLの焦点距離は共に100mmとし、シリンドリカルレンズCL<sub>2</sub>の焦点距離は50mmとした。また、行列マスクとしては、空間光変調器の代りに、直径1.5mmの円形開口を中心間隔2.7mmで並べたものを用いた。今回の実験でも、第3章の実験と同様に、乗算される行列の成分は1.0あるいは0.0とした。実験の手順は、以下に述べる通りである。

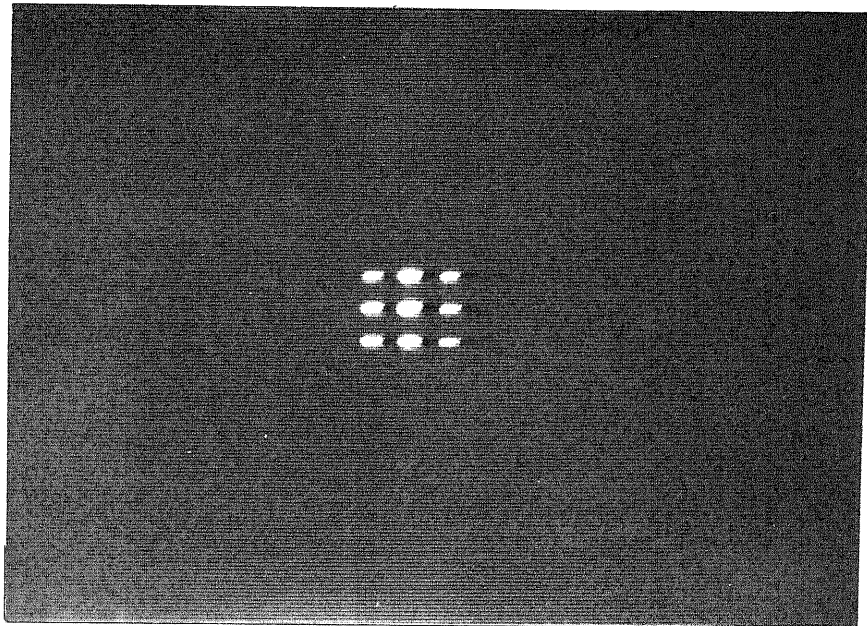
まず、A、Bを共に単位行列とし、Sの全成分を1.0としたときに、出力の光パワー分布が一様となるようにLEDの出力を調整した。この結果、出力像の各成分に対応するもののパワーのばらつきは、±0.3%以内となった。この調整結果に基づいて、出力から演算結果への変換係数を決定した。

次に、成分が1.0または0.0の行列について5種類の行列3重積演算を実行した。

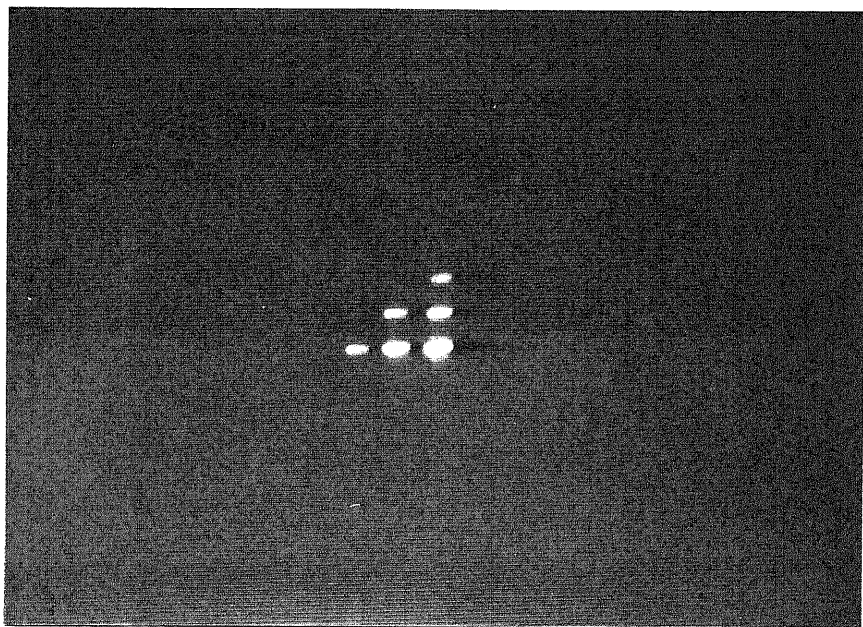
乗算結果の出力画像の例を示したものが図5-7である。この演算結果  $C = (SAB)$  について、実験結果  $C_{ex}$  と理論値  $C_{th}$  とを、表5-3



図 5 - 6 . 2次元光源アレイを有する実時間多段行列乗算用光学系  
(行列3重積演算の実験系)



(a) C A S E 1



(b) C A S E 4

図 5 - 7 . 出力画像の例

表5-3. 行列3重積演算の実験結果  $C_{ex}$  と理論値  $C_{th}$  ( $C = S A B$ )  
 $E_r = 100 (C_{ex} - C_{th}) / C_{th}$  ; 相対誤差

	S	A	B	$C_{th}$	$C_{ex}$	$E_r$ (%)
CASE 1	1.0 1.0 0.0	1.0 0.0 0.0	1.0 1.0 0.0	3.0 4.0 2.0	2.98 3.97 1.97	-3.7 -0.8 -1.5
	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	3.0 5.0 3.0	2.94 5.23 2.97	-2.0 +4.6 -1.0
	0.0 1.0 1.0	0.0 0.0 1.0	0.0 1.0 1.0	2.0 4.0 3.0	1.97 4.12 2.98	-3.0 +3.0 -0.7
CASE 2	0.0 1.0 0.0	1.0 0.0 0.0	0.0 1.0 0.0	1.0 3.0 1.0	1.00 3.00 1.04	0.0 0.0 +4.0
	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	1.0 5.0 1.0	0.97 5.25 1.03	-3.0 +5.0 +3.0
	0.0 1.0 0.0	0.0 0.0 1.0	0.0 1.0 0.0	1.0 3.0 1.0	1.00 3.00 1.00	0.0 0.0 0.0
CASE 3	0.0 1.0 0.0	1.0 1.0 0.0	0.0 1.0 0.0	1.0 3.0 1.0	1.01 3.00 1.05	+1.0 0.0 +5.0
	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	3.0 7.0 3.0	2.83 7.11 2.98	-5.7 +1.6 -0.7
	0.0 1.0 0.0	0.0 1.0 1.0	0.0 1.0 0.0	1.0 3.0 1.0	1.00 3.01 1.01	0.0 +0.3 +1.0
CASE 4	1.0 0.0 0.0	1.0 0.0 0.0	1.0 0.0 0.0	1.0 0.0 0.0	1.01 0.00 0.00	+1.0 -----
	1.0 1.0 0.0	1.0 1.0 0.0	1.0 1.0 0.0	3.0 1.0 0.0	2.80 1.00 0.00	-6.7 0.0 -----
	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	6.0 3.0 1.0	6.18 3.00 1.00	+3.0 0.0 0.0
CASE 5	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	1.0 3.0 6.0	0.99 3.06 5.64	-1.0 +2.0 -6.0
	0.0 1.0 1.0	0.0 1.0 1.0	0.0 1.0 1.0	0.0 1.0 3.0	0.00 1.01 2.84	----- +1.0 -5.3
	0.0 0.0 1.0	0.0 0.0 1.0	0.0 0.0 1.0	0.0 0.0 1.0	0.00 0.00 0.97	----- ----- -3.0

に比較して示す。これから、実験値と理論値との相対誤差  $E_r$  ( $= 100 \times (C_{ex} - C_{th}) / C_{th}$ ) の最大値は 6.7% であり、平均値は 2.0% であることがわかる。これらの値は、提案した光学系の動作を確認するための実験結果としては良好な値といえよう。また、当初の予想通りに、ここで得た結果は、一方向拡散板を使用する図 3-1 の光学系による演算結果よりも精度が向上している。

今回の実験で使用したレンズ（特にシリンドリカルレンズ）の収差（本実験で使用したレンズは、全く収差対策の施していない単レンズである）・LED からの出射光強度分布などの影響のために、付加的な演算誤差が生じている。しかし、これらの悪影響の大部分は、実用に供する際に、特性の優れた光学部品を使用し、光学系の最適設計を行うことにより軽減されることが考えられる。

#### 5-7-2. 基礎実験 II [4]

図 5-2 に示した光学系の動作を確認するための基礎実験も行った。この実験に使用した LED・レンズ・行列マスク等のパラメータは、前項に示したものと全く同じである。また、実験の手順も前項の実験と全く同じである。

乗算される行列は、1.0 あるいは 0.0 の成分からのみ成り、6 種類の乗算を実行した。表 5-4 に乗算結果  $C$  ( $= S A B$ ) の実験値  $C_{ex}$  と理論値  $C_{th}$  とを比較して示した。この表から、ここで得た実験値と理論値との相対誤差  $E_r$  ( $= 100 (C_{ex} - C_{th}) / C_{th}$ ) の最大値は、6.0% であり、平均値は 2.0% であることがわかる。この結果は、前項で示した図 5-1 の光学系を使用した実験結果と同程度の精度であり、これは光学系の動作を確認するための実験結果としては、十分な値である。

ここでも、レンズの収差・LED の出射パターン等の影響で、付加的な演算誤差が生じている。しかし、前にも述べたように、この問題は、実用に供する際に特性の優れたデバイスを使用することにより、解消す

表5-4. 行列3重積演算の実験結果  $C_{ex}$  と理論値  $C_{th}$  ( $C = SAB$ )  
 $E_r = 100 (C_{ex} - C_{th}) / C_{th}$  ; 相対誤差

	S	A	B	$C_{th}$	$C_{ex}$	$E_r$ (%)
CASE 1	1.0 1.0 0.0	1.0 0.0 0.0	1.0 1.0 0.0	3.0 4.0 2.0	3.00 4.05 1.96	0.0 +1.3 -2.0
	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	3.0 5.0 3.0	2.96 5.00 2.89	-1.3 0.0 -3.7
	0.0 1.0 1.0	0.0 0.0 1.0	0.0 1.0 1.0	2.0 4.0 3.0	2.00 4.12 3.02	0.0 +3.0 +0.7
CASE 2	1.0 1.0 0.0	1.0 1.0 0.0	1.0 1.0 0.0	3.0 3.0 2.0	2.93 3.02 1.97	-2.3 +0.7 -1.5
	1.0 1.0 1.0	0.0 1.0 0.0	1.0 1.0 1.0	4.0 5.0 4.0	3.96 4.89 3.83	-1.0 -2.2 -4.3
	0.0 1.0 1.0	0.0 1.0 1.0	0.0 1.0 1.0	2.0 3.0 3.0	2.01 3.14 2.92	+0.5 +4.3 -2.7
CASE 3	0.0 1.0 0.0	1.0 1.0 0.0	1.0 1.0 0.0	1.0 1.0 1.0	1.01 1.05 1.01	+1.0 +5.0 +1.0
	1.0 1.0 1.0	0.0 1.0 0.0	1.0 1.0 1.0	4.0 5.0 4.0	3.99 4.94 3.87	-0.3 -1.2 -3.3
	0.0 1.0 0.0	0.0 1.0 1.0	0.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	1.04 1.06 1.00	+4.0 +6.0 0.0
CASE 4	0.0 1.0 0.0	1.0 0.0 0.0	1.0 1.0 0.0	2.0 3.0 2.0	2.04 3.07 1.98	+2.0 +2.3 -1.0
	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	3.0 5.0 3.0	2.98 5.01 2.88	-0.7 +0.2 -4.0
	0.0 1.0 0.0	0.0 0.0 1.0	0.0 1.0 1.0	2.0 3.0 2.0	2.02 3.08 2.03	+1.0 +2.7 +1.5
CASE 5	0.0 1.0 0.0	1.0 0.0 0.0	1.0 0.0 0.0	2.0 1.0 0.0	1.98 1.03 0.00	-1.0 +3.0 ----
	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 0.0	1.0 1.0 0.0	6.0 3.0 1.0	5.93 3.02 1.04	-1.2 +0.7 +4.0
	0.0 1.0 0.0	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	2.0 1.0 0.0	1.97 1.02 0.00	-1.5 +2.0 ----
CASE 6	0.0 1.0 0.0	1.0 1.0 1.0	1.0 1.0 1.0	0.0 1.0 2.0	0.00 1.02 1.97	---- +2.0 -1.5
	1.0 1.0 1.0	0.0 1.0 1.0	0.0 1.0 1.0	1.0 3.0 6.0	1.06 3.04 5.76	+6.0 +1.3 -4.0
	0.0 1.0 0.0	0.0 0.0 1.0	0.0 0.0 1.0	0.0 1.0 2.0	0.00 1.03 2.03	---- +3.0 +1.5

ることが可能であると考えられる。

## 5-8. まとめ

本章では、第3章で提案した光学系の光源部分を2次元アレイに置き換えることによって、光学系の演算機能を拡張することができることを示した。先の光学系においては、行列3個の実時間乗算のために、一方向拡散板は必須であるにも拘らず、同時に演算誤差要因でもあった。しかし、2次元光源アレイを有する構成を採ることによって、一方向拡散板を使用することなく、行列3個の実時間乗算が実行可能となる。この点は、演算精度を考えたとき、非常に大きな改善効果を持つといえる。また、本章で示した光学系も行列4個以上の乗算用光学系に拡張することが可能である。本章の光学系を拡張するに当たっては、一方向拡散板ではなく、通常のディフューザが使用される。ディフューザを使用した光学系の拡張方法も示した。

本光学系の動作を確認する目的で、3次正方行列（成分は1.0あるいは0.0）3個の乗算を基礎実験として行った。その結果として、最大演算誤差6.7%、平均演算誤差2.0%を得た。ここで得た値は、特性の優れた光学素子を使用することによって、改善することが可能である。また、当初の期待通りに、一方向拡散板を使用する光学系によるものよりも演算精度を向上することができた。

## 参 考 文 献

- [1] H.Nakano and K.Hotate; "Optical System for Real-Time Processing of Multiple Matrix Product," *Electron. Lett.*, Vol.21, No.10, pp.435-437 (1985).
- [2] H.Nakano and K.Hotate; "Real-Time Processing of the Multiple Matrix Product Using an Incoherent Optical System," *Appl. Opt.*, Vol.24, No.23, pp.4238-4246 (1985).
- [3] 中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算用光学系Ⅲ - 光源アレイの2次元化による演算機能の拡張 -」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE86-23 (1986).
- [4] 中野・保立、「2次元光源アレイを有する実時間多段マトリクス乗算用光学系」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE86-112 (1986).
- [5] 中野・保立、「実時間行列乗算用光学系Ⅲ」、昭和61年秋季応用物理学会学術講演会、27p-ZE-6 (1986).
- [6] H.Nakano and K.Hotate; "Limit of Parallelism and Operational Speed in the Optical System for Real-Time Matrix-Matrix Multiplication," *First Optoelectronics Conference (OEC'86)*, July 29-31, 1986, Tokyo, Paper No. C7-2.
- [7] J.W.Goodman, A.R.Dias, and L.M.Woody; "Fully Parallel, High-Speed Incoherent Optical Method for Performing Discrete Fourier Transforms," *Opt. Lett.*, Vol.2, No.2, pp.1-3 (1978).
- [8] M.Carlotto and D.Casasent; "Microprocessor-Based Fiber-Optic Iterative Optical Processor," *Appl. Opt.*, Vol.21, No.1, pp.147-152 (1982).
- [9] P.N.Tamura and J.C.Wyant; "Matrix Multiplication Using Coherent Optical Techniques," *Proc. Photo-Opt. Instrum. Eng.*, Vol.83, pp.97-104 (1976).



- [10] R.A.Athale and J.N.Lee; "Optical Processing Using Outer-Product Concepts," Proc. IEEE, Vol.72, No.7, pp.931-941 (1984).
- [11] R.A.Athale; Private Communication to Dr. K.Hotate (June 21, 1985).
- [12] H.Nakano and K.Hotate; "Operational Error in the Optical Real-Time Multiple Matrix Multiplier and Its Compensation," Appl. Opt., Vol.25, No.18, pp.3132-3136 (1986).

## 第 6 章

### デジタル演算の導入方法

#### 6-1. はじめに

本論文で提案した実時間多段行列乗算用光学系も含め、これまでに検討されてきた行列乗算用光学系の大半は、本質的にアナログ演算系である。したがって、扱い得る行列成分のダイナミックレンジ・演算精度などが制限される。こうしたアナログ演算の欠点の克服を目的として、デジタル的な演算を導入する手法が検討されている [1]-[20]。また、光剰余演算等、演算に用いる数値の表現方法に対する検討も数多く行われているが、この点については、最終章で触れることにしたい。

本章では、実時間多段行列乗算用光学系に対してデジタル的な演算を導入するための空間的なコーディング手法を示す。さらに、このコーディングの原理を確認するために行った基礎実験の結果も併せて報告する。最後に、こうしたコーディングを用いてデジタル的な演算を導入することによって新たに生ずる問題点を指摘する。

#### 6-2. 行列-行列乗算用のコーディング [21]-[23]

多数個の行列を乗算するためのコーディングを考えるために、まず手始めとして、行列-行列乗算のためのコーディング方法について検討し

よう。なお、ここでは、簡単のために、乗算される行列の成分が3ビットの二進数で表される場合のコーディング方法について述べることにする。さらにビット数が大きくなる場合、あるいは、さらに大きな法を用いる場合についても同様にして取扱うことができる。

### 6-2-1. 内積演算法に基づくコーディング

まず、2つのスカラ  $a$  と  $b$  との乗算を考える。スカラ  $a$  と  $b$  とが次式のように与えられているとする。

$$a = a^0 2^0 + a^1 2^1 + a^2 2^2 \quad (6-1)$$

$$b = b^0 2^0 + b^1 2^1 + b^2 2^2 \quad (6-2)$$

ここで、演算結果の各ディジットが2以上になることを許せば、 $a$  と  $b$  との積  $c$  は、

$$\begin{aligned} c &= c^0 2^0 + c^1 2^1 + c^2 2^2 + c^3 2^3 + c^4 2^4 \\ &= a^0 b^0 2^0 + (a^0 b^1 + a^1 b^0) 2^1 + (a^0 b^2 + a^1 b^1 + a^2 b^0) 2^2 \\ &\quad + (a^1 b^2 + a^2 b^1) 2^3 + a^2 b^2 2^4 \end{aligned} \quad (6-3)$$

として与えられる。この関係を行列乗算の形で表すと、

$$\begin{pmatrix} c^0 & c^1 & c^2 \\ * & * & c^3 \\ * & * & c^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ a^1 & a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^0 & b^1 & b^2 \\ 0 & b^0 & b^1 \\ 0 & 0 & b^0 \end{pmatrix} \quad (6-4)$$

となる。したがって、(6-4) 式の右辺の乗算を実時間行列乗算用光学系を用いて実行することによって、スカラ  $a$  と  $b$  との積  $c$  の5つのディジット  $c^0 \sim c^4$  を実時間的に、しかも、並列に得ることができる [21], [22]。このコーディングでは、 $a$ ,  $b$  が共に正方行列（一般に  $n$  ビット表記の場合には、共に  $n$  次正方行列となる）として与えられるものの、積行列中で\*として示した部分には無意味な出力項が生ずる。これを避

けるためには、次のように拡張したコーディングを用いればよい[23]。

$$\begin{pmatrix} c^0 & c^1 & c^2 \\ c^1 & c^2 & c^3 \\ c^2 & c^3 & c^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^0 & a^1 & a^2 \\ 0 & a^0 & a^1 & a^2 & 0 \\ a^0 & a^1 & a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ b^1 & b^2 & 0 \\ b^0 & b^1 & b^2 \\ 0 & b^0 & b^1 \\ 0 & 0 & b^0 \end{pmatrix} \quad (6-5)$$

ここで、先に指摘したように積  $c$  の5つのディジットが必ずしも1あるいは0になるとは限らない点に注意が必要である。こうした数の表現法を、混二進 (Mixed Binary) 符号[9]と呼ぶ。以上に示したコーディングを使用すると、冗長な出力成分が発生する。これを除去するには、次のベクトル-行列乗算形式のコーディング [6]を用いればよい。

$$\begin{aligned} & (c^0 \ c^1 \ c^2 \ c^3 \ c^4) \\ & = (a^0 \ a^1 \ a^2) \begin{pmatrix} b^0 & b^1 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^0 & b^1 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^0 & b^1 & b^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6-6)$$

以上に示したコーディングにおける重要な点は、スカラをデジタル表現したベクトル (ディジットを並べたもの) の一方あるいは双方を、行ごと (列ごと) に1つずつシフトさせて並べ、さらに、空いた場所を0で埋め尽くすことによって、コーディング用の行列を得ている点である。(6-5), (6-6)式に示したいずれのコーディング方法も行列同士の乗算に拡張することができ、本論文で提案した実時間行列乗算用光学系に適用し得る。しかし、以下の議論では、冗長度の低い (6-6)式に示したコーディングを用いる場合についてのみ議論する。これを  $n$  ビット数同士の乗算に対して使用するときには、スカラ  $a$  は  $(1, n)$  型行列で表され、 $b$  は  $(n, 2n-1)$  型行列で与えられることになる。

行列の区分けの定理 (大きな行列同士の乗算を行う時に、それぞれの間で乗算が定義できるように双方の行列を小行列に分割する。このとき得られる小行列をあたかもスカラであるかの如く扱い得るという定理)

を適用することにより、行列同士の乗算を実行するためのコーディングを導くことができる。ここで、成分を3ビット表示した2次正方行列AとBとの乗算を考えると、次式に示すようなコーディングを施せばよい。

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} c_{11}^0 & c_{11}^1 & c_{11}^2 & c_{11}^3 & c_{11}^4 & c_{12}^0 & c_{12}^1 & c_{12}^2 & c_{12}^3 & c_{12}^4 \\ c_{21}^0 & c_{21}^1 & c_{21}^2 & c_{21}^3 & c_{21}^4 & c_{22}^0 & c_{22}^1 & c_{22}^2 & c_{22}^3 & c_{22}^4 \end{pmatrix} \\
 = & \begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{11}^1 & a_{11}^2 & a_{12}^0 & a_{12}^1 & a_{12}^2 \\ a_{21}^0 & a_{21}^1 & a_{21}^2 & a_{22}^0 & a_{22}^1 & a_{22}^2 \end{pmatrix} \\
 & \cdot \begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{11}^1 & b_{11}^2 & 0 & 0 & b_{12}^0 & b_{12}^1 & b_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11}^0 & b_{11}^1 & b_{11}^2 & 0 & 0 & b_{12}^0 & b_{12}^1 & b_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11}^0 & b_{11}^1 & b_{11}^2 & 0 & 0 & b_{12}^0 & b_{12}^1 & b_{12}^2 \\ b_{21}^0 & b_{21}^1 & b_{21}^2 & 0 & 0 & b_{22}^0 & b_{22}^1 & b_{22}^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_{21}^0 & b_{21}^1 & b_{21}^2 & 0 & 0 & b_{22}^0 & b_{22}^1 & b_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21}^0 & b_{21}^1 & b_{21}^2 & 0 & 0 & b_{22}^0 & b_{22}^1 & b_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (6-7)
 \end{aligned}$$

ここに示したコーディングを使用すれば、積行列Cの全ディジットが実時間的、かつ並列に求められる。また、不要な成分等も生じない。したがって、(6-4)、(6-5)式のコーディングを使用する場合に問題となる不要な出力成分、あるいは、冗長な出力成分の発生による空間利用効率の低下が回避される。

### 6-2-2. 外積演算法に基づくコーディング [21]

次に、以下に示すようなベクトル同士の乗算を考えてみよう。

$$\begin{pmatrix} p^{01} & p^{11} & p^{21} \\ p^{12} & p^{22} & p^{31} \\ p^{23} & p^{32} & p^{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} (b^0 \ b^1 \ b^2) \quad (6-8)$$

このとき、積行列Pの成分を次式に示すように、非対角方向に足し合わ

せる。

$$c^k = \sum_l p^{kl} \quad (6-9)$$

この結果として得られる5つのディジット  $c^0 \sim c^4$  は、(6-3)式によって求められる  $a$  と  $b$  との積  $c$  のディジットに他ならない。(6-9)式に現れるベクトル乗算は、「外積演算法」に基づいて行列乗算を実行するときに現れるものと同じ相関行列の計算であり、このコーディングは外積演算法に基づく行列乗算用光学系で使用するものとして提案されたものである [6]。しかし、このコーディングを本論文で提案した光学系に対しても適用することが可能である [21]。

ここで、行列の区分けの定理を適用することによって、(6-9)式のコーディングを行列-行列乗算用のコーディングとして、

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} p_{11}^{01} & p_{11}^{11} & p_{11}^{21} & p_{12}^{01} & p_{12}^{11} & p_{12}^{21} \\ p_{11}^{12} & p_{11}^{22} & p_{11}^{31} & p_{12}^{12} & p_{12}^{22} & p_{12}^{31} \\ p_{11}^{23} & p_{11}^{32} & p_{11}^{41} & p_{12}^{23} & p_{12}^{32} & p_{12}^{41} \\ p_{21}^{01} & p_{21}^{11} & p_{21}^{21} & p_{22}^{01} & p_{22}^{11} & p_{22}^{21} \\ p_{21}^{12} & p_{21}^{22} & p_{21}^{31} & p_{22}^{12} & p_{22}^{22} & p_{22}^{31} \\ p_{21}^{23} & p_{21}^{32} & p_{21}^{41} & p_{22}^{23} & p_{22}^{32} & p_{22}^{41} \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 \\ a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}^0 & b_{11}^1 & b_{11}^2 & b_{12}^0 & b_{12}^1 & b_{12}^2 \\ b_{21}^0 & b_{21}^1 & b_{21}^2 & b_{22}^0 & b_{22}^1 & b_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (6-10)
 \end{aligned}$$

$$c_{ij}^k = \sum_l p_{ij}^{kl} \quad (6-11)$$

を得る [6], [21]。実時間行列乗算用光学系において、上記のようにコーディングした行列同士の乗算を実行することにより、積行列の成分の混

二進数表現を並列に得ることができる。ただし、このコーディングを使用するときには、光行列一行列乗算を実行した後、(6-11)式に示した加算を並列に実行する必要がある。

以上、2種類の思想に基づくコーディングを示した。「内積演算法」に基づくコーディングを使用すれば、混二進数出力でよければ、実時間演算が可能である。しかし、行列を表記するための冗長度ならびに1回ごとの演算結果(光出力)に現れる数のダイナミックレンジの観点では、「外積演算法」に基づくコーディングの方が有利である。

これらのコーディングを本論文で提案した実時間行列乗算用光学系で使用する場合についてのみ考えると、行列Bを与えるための冗長性はほとんど問題にはならない。したがって、「内積演算法」に基づくコーディング、すなわち、(6-6),(6-7)式に示したものを使用することが最も望ましいといえる。

また、デジタルコーディングを使用する際に、2の補数表現を用いれば、負数を成分に有する行列の演算も第4章で示したような拡大行列を用いることなく扱うことができる。しかし、このときには、条件判断を含む複雑な後処理が必要となる[20]。そこで、演算に際して負数を法とするデジタル符号[24]を使用すれば、こうした後処理の問題が不要となる。

### 6-2-3. 時系列入力によるデジタル的乗算 [22]

ここでは、実時間行列乗算用光学系に最も適した内積演算法に基づくコーディングを使用する場合について考察する。

(6-6),(6-7)式に示したコーディングの構造を考えると、行列Bに対してのみ冗長になっている。そこで、これを表6-1に示すような時系列の形で与えることにすれば、行列Bの表記に対しても空間的な冗長性は不要になる。ここでは、簡単のために、3ビット表示のスカラ乗算の

表 6 - 1 . 行列 - 行列乗算用の時系列入力

T	a	b	c <sup>0</sup>	c <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>	c <sup>3</sup>	c <sup>4</sup>
1	a <sup>0</sup> a <sup>1</sup> a <sup>2</sup>	b <sup>0</sup> 0 0	a <sup>0</sup> b <sup>0</sup>				
2	a <sup>0</sup> a <sup>1</sup> a <sup>2</sup>	b <sup>1</sup> b <sup>0</sup> 0		a <sup>0</sup> b <sup>1</sup> +a <sup>1</sup> b <sup>0</sup>			
3	a <sup>0</sup> a <sup>1</sup> a <sup>2</sup>	b <sup>2</sup> b <sup>1</sup> b <sup>0</sup>			a <sup>0</sup> b <sup>2</sup> +a <sup>1</sup> b <sup>1</sup> +a <sup>2</sup> b <sup>0</sup>		
4	a <sup>0</sup> a <sup>1</sup> a <sup>2</sup>	0 b <sup>2</sup> b <sup>1</sup>				a <sup>1</sup> b <sup>2</sup> +a <sup>2</sup> b <sup>1</sup>	
5	a <sup>0</sup> a <sup>1</sup> a <sup>2</sup>	0 0 b <sup>2</sup>					a <sup>2</sup> b <sup>2</sup>

T : Time Slot



場合について示した。すなわち、二進数で表示したスカラ  $a$  を与える行ベクトルは固定とし、 $b$  を表す列ベクトルの各成分を、1クロックにつきそれぞれ、1つずつシフトさせるように更新してゆけばよい。このようにすれば、1クロックごとに積  $c$  の各ディジットが1つずつ得られ、5クロック後には、全てのディジットを混二進符号として得ることができる。この場合、出力として、混二進符号のままよければ、1クロックごとに得られる出力は、そのまま意味を持っており、後処理等は不要である。

行列同士の乗算は、ここに示した時系列入力を全成分に対して並列に施すことによって実行し得ることは明らかであろう。

#### 6-2-4. 純二進符号への変換 [23]

以上に示したコーディングを使用することにより、行列同士のディジタル乗算を混二進出力として実行し得ることがわかった。本節では、この混二進符号出力を純二進 (Pure Binary) 符号へ変換することを考える。なお、簡単のために、スカラ乗算の場合について記述する。行列乗算の場合には、以下に述べる後処理を各成分ごとに並列に実行するだけである。

$b$  の入力を表 6-1 に示したように時系列で与える場合について考える。この時、積  $c$  のディジットが1クロックにつき、下位のものから1つずつ求められる。そこで、出力を逐次 A/D 変換し、1クロックごとに得られる A/D 変換後のディジタル出力を1ビットずつシフトさせて足し合わせてゆくことによって純二進符号として出力することができる。この様子を示したものが図 6-1 である。ここでは、A/D 変換後のシフト-加算過程を、加算実行時に下位のディジットに対する処理結果の LSB を出力させ、加算器内で2つの入力の相対位置が1ビットずつずれるようにして実現することを想定している。このように、 $b$  のベクトル入力を更新 (シフト) するタイミングと A/D 変換、加算のタイミン

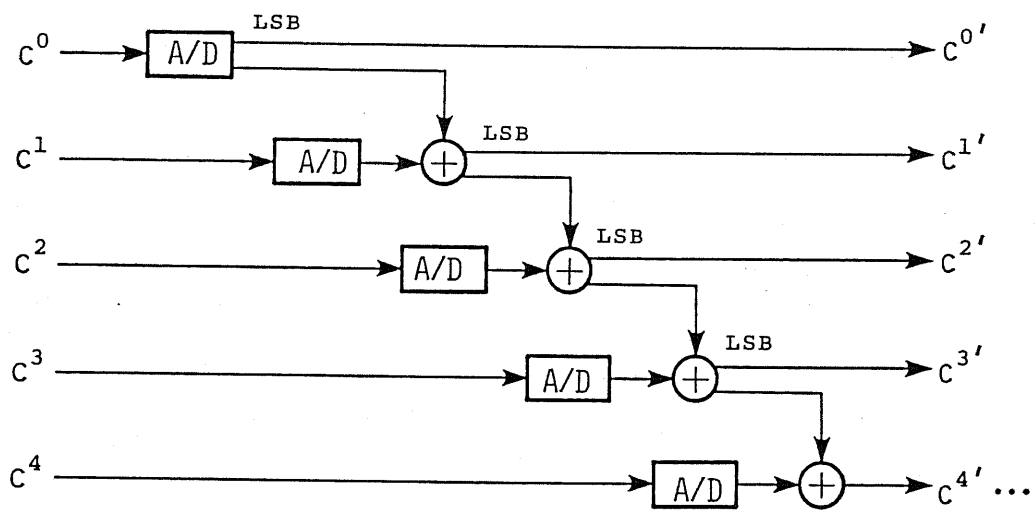


図 6 - 1 . 混二進数から純二進数への変換

グとをすべて同期をとって実行すれば、この例の場合には、7クロック後に  $a$  と  $b$  との積  $c$  が純二進符号で得られることになる。

なお、スカラ  $b$  の冗長な表現を一度に与えた場合には、各ディジットごとに A/D 変換器を並列に設置して、変換後のディジタル出力を1ビットずつずらして加算すれば、混二進符号を純二進符号に変換することができる。しかし、この場合でも、純二進符号に変換するために必要となる手数は、時系列入力を使用したときとほとんど変わらない。したがって、純二進符号として行列積を得ることを要求する場合には、使用する電子素子 (A/D 変換器、加算器) の数が少なく済む時系列入力を採用した方がよい。

### 6-3. 多段行列乗算用のコーディング [23]

前節で議論した行列-行列乗算用コーディングを拡張し、多数個の行列を乗算する場合に用いるべきディジタルコーディング手法に関して検討する。本節では、原則として行列3重積演算のためのコーディング手法について議論を進める。しかし、前節のコーディングから本節のコーディングへ拡張したときと同じ考え方によって、行列4個以上の乗算用コーディングを導くことも可能である。なお、ここでも前章と同様、簡単のために、乗算される行列の成分が3ビットの二進数で与えられる場合を例として述べる。

#### 6-3-1. 空間的コーディング [23]

本項では、空間的なコーディングを施した行列を乗算して得られた積行列に対して、後処理の必要でない「内積演算法」に基づくコーディングを拡張したものについて考察しよう。

スカラ  $s$  を次式のように 3 ビット二進数表現する。

$$s = s^0 2^0 + s^1 2^1 + s^2 2^2 \quad (6-12)$$

このとき、3 つのスカラ  $s$  ,  $a$  ,  $b$  の積  $c$  は、混二進数出力を許せば、

$$\begin{aligned} c &= c^0 2^0 + c^1 2^1 + c^2 2^2 + c^3 2^3 + c^4 2^4 + c^5 2^5 + c^6 2^6 \\ &= s^0 a^0 b^0 2^0 + (s^0 a^0 b^1 + s^0 a^1 b^0 + s^1 a^0 b^0) 2^1 \\ &\quad + (s^0 a^0 b^2 + s^0 a^2 b^0 + s^2 a^0 b^0 + s^0 a^1 b^1 + s^1 a^0 b^1 \\ &\quad + s^1 a^1 b^0) 2^2 + (s^0 a^1 b^2 + s^0 a^2 b^1 + s^1 a^0 b^2 + s^1 a^2 b^0 \\ &\quad + s^2 a^0 b^1 + s^2 a^1 b^0 + s^1 a^1 b^1) 2^3 + (s^0 a^2 b^2 + s^2 a^0 b^2 \\ &\quad + s^2 a^2 b^0 + s^1 a^1 b^2 + s^1 a^2 b^1 + s^2 a^1 b^1) 2^4 + (s^1 a^2 b^2 \\ &\quad + s^2 a^1 b^2 + s^2 a^2 b^1) 2^5 + s^2 a^2 b^2 2^6 \end{aligned} \quad (6-13)$$

で与えられる。この関係を (6-6) 式と同様、行列乗算の形式で表現すると、

$$\begin{aligned} &(c^0 \ c^1 \ c^2 \ c^3 \ c^4 \ c^5 \ c^6) \\ &= (s^0 \ s^1 \ s^2) \begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^0 & a^1 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^0 & a^1 & a^2 \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} b^0 & b^1 & b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^0 & b^1 & b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^0 & b^1 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^0 & b^1 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^0 & b^1 & b^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6-14)$$

となる。すなわち、(6-14) 式の行列乗算を実時間多段行列乗算用光学系を用いて実行することにより、3 つのスカラ  $s$  ,  $a$  ,  $b$  の積  $c$  の各ディジットを実時間的、かつ並列に求めることができる。上式のような考え方を繰返せば、多数個の行列を乗算するためのコーディングを導くことは容易である。しかし、上式からもわかるように、このコーディングを用いると、第 2、第 3 … と後の行列程、その表記のために必要な冗長度が増し、空間の利用効率が低下する。一般に、このコーディングを使用して  $n$  ビット数同士 3 個を乗算するときには、 $s$  ,  $a$  ,  $b$  はそれぞれ、

(1, n) 型, (n, 2n-1) 型, (2n-1, 3n-2) 型の行列で与えられる。

ここで、再び行列の区分けの定理を考えると、行列3重積演算のためには、次のコーディングを使用すればよいことがわかる。

$$\begin{pmatrix} c_{11}^0 c_{11}^1 c_{11}^2 c_{11}^3 c_{11}^4 c_{11}^5 c_{11}^6 & c_{12}^0 c_{12}^1 c_{12}^2 c_{12}^3 c_{12}^4 c_{12}^5 c_{12}^6 \\ c_{21}^0 c_{21}^1 c_{21}^2 c_{21}^3 c_{21}^4 c_{21}^5 c_{21}^6 & c_{22}^0 c_{22}^1 c_{22}^2 c_{22}^3 c_{22}^4 c_{22}^5 c_{22}^6 \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} s_{11}^0 s_{11}^1 s_{11}^2 & s_{12}^0 s_{12}^1 s_{12}^2 \\ s_{21}^0 s_{21}^1 s_{21}^2 & s_{22}^0 s_{22}^1 s_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^0 a_{11}^1 a_{11}^2 0 & 0 & a_{12}^0 a_{12}^1 a_{12}^2 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^0 a_{11}^1 a_{11}^2 0 & 0 & a_{12}^0 a_{12}^1 a_{12}^2 0 \\ 0 & 0 & a_{11}^0 a_{11}^1 a_{11}^2 0 & 0 & 0 & a_{12}^0 a_{12}^1 a_{12}^2 0 \\ a_{21}^0 a_{21}^1 a_{21}^2 0 & 0 & a_{22}^0 a_{22}^1 a_{22}^2 0 & 0 \\ 0 & a_{21}^0 a_{21}^1 a_{21}^2 0 & 0 & a_{22}^0 a_{22}^1 a_{22}^2 0 \\ 0 & 0 & a_{21}^0 a_{21}^1 a_{21}^2 0 & 0 & 0 & a_{22}^0 a_{22}^1 a_{22}^2 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} b_{11}^0 b_{11}^1 b_{11}^2 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12}^0 b_{12}^1 b_{12}^2 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11}^0 b_{11}^1 b_{11}^2 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12}^0 b_{12}^1 b_{12}^2 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11}^0 b_{11}^1 b_{11}^2 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12}^0 b_{12}^1 b_{12}^2 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11}^0 b_{11}^1 b_{11}^2 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12}^0 b_{12}^1 b_{12}^2 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{11}^0 b_{11}^1 b_{11}^2 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12}^0 b_{12}^1 b_{12}^2 0 \\ b_{21}^0 b_{21}^1 b_{21}^2 0 & 0 & 0 & 0 & b_{22}^0 b_{22}^1 b_{22}^2 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{21}^0 b_{21}^1 b_{21}^2 0 & 0 & 0 & 0 & b_{22}^0 b_{22}^1 b_{22}^2 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21}^0 b_{21}^1 b_{21}^2 0 & 0 & 0 & 0 & b_{22}^0 b_{22}^1 b_{22}^2 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{21}^0 b_{21}^1 b_{21}^2 0 & 0 & 0 & 0 & b_{22}^0 b_{22}^1 b_{22}^2 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21}^0 b_{21}^1 b_{21}^2 0 & 0 & 0 & 0 & b_{22}^0 b_{22}^1 b_{22}^2 0 \end{pmatrix}$$

(6-15)

ここでは、成分を3ビット表現した2次正方行列3個の乗算を実行する場合について示した。(6-15)式に示した行列3重積演算を実時間多段行列乗算用光学系で実行すれば、積行列の各成分を実時間的、かつ、並列に混二進符号として得ることができる。

### 6-3-2. 時系列入力によるデジタル的乗算 [23]

前節同様に、時系列の入力を実行することができれば、行列を空間的に冗長な形で表記する必要がなくなる。本項では、行列3重積演算についてのみ適用可能な手法について議論することにしよう。

表6-1と同様に、デジタル表記したaのベクトル入力をシフトさせて時系列で更新することにすれば、表6-2に示すような時系列演算により、積cの各ディジットを混二進符号として得ることができる。このとき、シフト操作は、aを表す列ベクトルについてのみ行う。この場合には、時系列入力の書き換えを空間光変調器の中で行う必要がある。また、行列-行列乗算時とは異なり、光演算後に加算過程を必要とする。

ここで、図5-1に示した2次元光源アレイを有する実時間多段行列乗算用光学系を用いる場合を想定すると、時系列で入力を更新する部分が光源であった方が取り扱いが容易になる。このようにするためには、表6-3に示すような時系列の入力を用いればよい。この場合にも、光演算実行後に電氣的な加算を実行する必要がある。この方法では、sとaとのデジタル乗算が内積演算法によって時系列を経て実行され、その結果とbとの乗算が外積演算法[6]のアルゴリズムに基づいて実行されることになる。すなわち、この時系列入力に対応する空間的なコーディングは、次式に示すものである。

$$\begin{pmatrix} p^{01} & p^{11} & p^{21} \\ p^{12} & p^{22} & p^{31} \\ p^{23} & p^{32} & p^{41} \\ p^{33} & p^{42} & p^{51} \\ p^{43} & p^{52} & p^{61} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s^0 & 0 & 0 \\ s^1 & s^0 & 0 \\ s^2 & s^1 & s^0 \\ 0 & s^2 & s^1 \\ 0 & 0 & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} (b^0 \ b^1 \ b^2) \quad (6-16)$$

表6-2. 行列3重積演算の時系列入力 (SLMでデータを更新する場合)

T	s	a	b	$s^0 a^0 b^0$	$s^0 a^0 b^1$	$s^0 a^0 b^2$					
1	$s^0 s^1 s^2$	$a^0$ 0 0	$b^0 b^1 b^2$		$s^0 a^0 b^1$	$s^0 a^0 b^2$					
2	$s^0 s^1 s^2$	$a^1$ $a^0$ 0	$b^0 b^1 b^2$	$s^0 a^1 b^0$ $+s^1 a^0 b^0$	$s^0 a^1 b^1$ $+s^1 a^0 b^1$	$s^0 a^1 b^2$ $+s^1 a^0 b^2$					
3	$s^0 s^1 s^2$	$a^2$ $a^1$ $a^0$	$b^0 b^1 b^2$		$s^0 a^2 b^0$ $+s^1 a^1 b^0$ $+s^2 a^0 b^0$	$s^0 a^2 b^1$ $+s^1 a^1 b^1$ $+s^2 a^0 b^1$	$s^0 a^2 b^2$ $+s^1 a^1 b^2$ $+s^2 a^0 b^2$				
4	$s^0 s^1 s^2$	0 $a^2$ $a^1$	$b^0 b^1 b^2$			$s^1 a^2 b^0$ $+s^2 a^1 b^0$	$s^1 a^2 b^1$ $+s^2 a^1 b^1$	$s^1 a^2 b^2$ $+s^2 a^1 b^2$			
5	$s^0 s^1 s^2$	0 0 $a^2$	$b^0 b^1 b^2$				$s^2 a^2 b^0$	$s^2 a^2 b^1$	$s^2 a^2 b^2$		
			+	$c^0$	$c^1$	$c^2$	$c^3$	$c^4$	$c^5$	$c^6$	

T : Time Slot

表6-3. 行列3重積演算用の時系列入力 (光源アレイでデータを更新する場合)

T	s	a	b	$s^0 a^0 b^0$	$s^0 a^0 b^1$	$s^0 a^0 b^2$					
1	$s^0$ 0 0	$a^0$ $a^1$ $a^2$	$b^0$ $b^1$ $b^2$	$s^0 a^0 b^0$	$s^0 a^0 b^1$	$s^0 a^0 b^2$					
2	$s^1$ $s^0$ 0	$a^0$ $a^1$ $a^2$	$b^0$ $b^1$ $b^2$	$s^1 a^0 b^0$ $+s^0 a^1 b^0$	$s^1 a^0 b^1$ $+s^0 a^1 b^1$	$s^1 a^0 b^2$ $+s^0 a^1 b^2$					
3	$s^2$ $s^1$ $s^0$	$a^0$ $a^1$ $a^2$	$b^0$ $b^1$ $b^2$		$s^2 a^0 b^0$ $+s^1 a^1 b^0$ $+s^0 a^2 b^0$	$s^2 a^0 b^1$ $+s^1 a^1 b^1$ $+s^0 a^2 b^1$	$s^2 a^0 b^2$ $+s^1 a^1 b^2$ $+s^0 a^2 b^2$				
4	0 $s^2$ $s^1$	$a^0$ $a^1$ $a^2$	$b^0$ $b^1$ $b^2$			$s^2 a^1 b^0$ $+s^1 a^2 b^0$	$s^2 a^1 b^1$ $+s^1 a^2 b^1$	$s^2 a^1 b^2$ $+s^1 a^2 b^2$			
5	0 0 $s^2$	$a^0$ $a^1$ $a^2$	$b^0$ $b^1$ $b^2$				$s^2 a^2 b^0$	$s^2 a^2 b^1$	$s^2 a^2 b^2$		
			+	$c^0$	$c^1$	$c^2$	$c^3$	$c^4$	$c^5$	$c^6$	

T : Time Slot



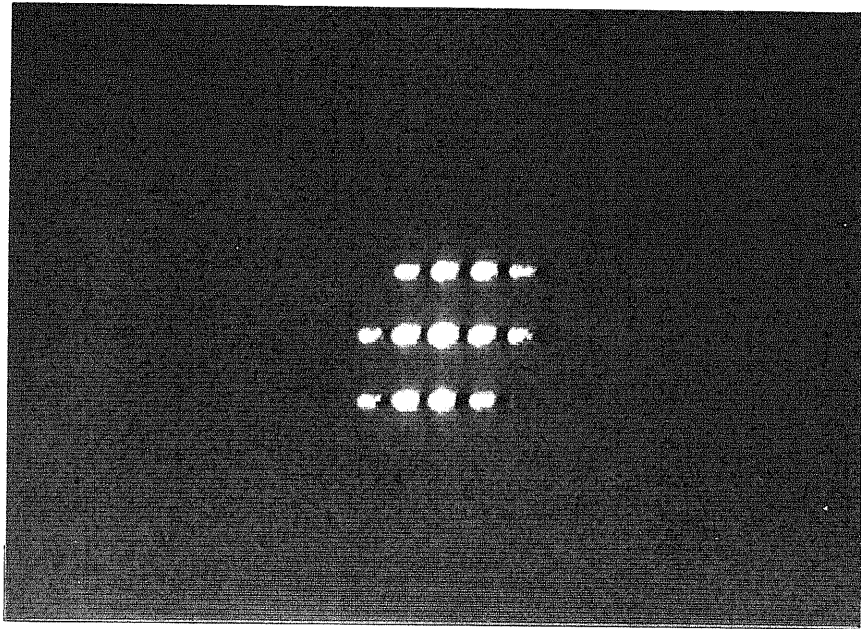
$$c^k = \sum_l p^{kl} \quad (6-17)$$

以上に示したように、空間的なコーディングを施すことによって、多数個の行列をデジタル的に乗算することができる。しかし、大きな行列に対して高精度演算を行うためには、混二進数出力となるので、かなりダイナミックレンジの広い光検出器が必要である。また、後処理の段階で、混二進数出力から純二進数出力への変換のための複雑な信号処理が必要である。これらの点は、行列-行列乗算時以上にその要求が厳しくなる。

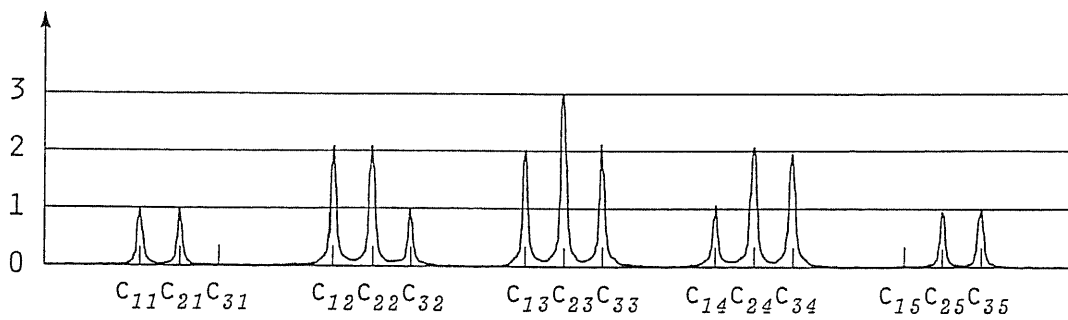
#### 6-4. 基礎実験 [21]-[23]

図5-1の光学系を構成して、行列3重積演算を実行した。光源として、発振中心波長 800 nm の LED (公称最大出力 30 mW) を 9 個使用した。LED の配置間隔は、5.4 mm であり、これを結像光学系を用いて 2.7 mm に縮小している。球面レンズ S L ならびにシリンドリカルレンズ C L の焦点距離は、共に 10 cm とし、シリンドリカルレンズ C L<sub>2</sub> の焦点距離は 5 cm とした。また、空間光変調器の代わりに、行列 A を与えるためには、直径 1.5 mm の円形開口を中心間隔 2.7 mm で並べた行列マスクを使用した。さらに、行列 B を与える行列マスクとしては、直径 1.0 mm の円形開口を中心間隔が、水平面内では 1.35 mm、垂直面内では 2.7 mm となるように並べたものを使用した [23]。

図6-3(a)に3ビット二進数で与えられたベクトル-スカラー乗算を(6-6)式に示した行列-行列乗算用のコーディングを用いて実行した結果、得られた出力画像の一例を示す。この出力成分の光強度分布を測定した結果を図6-3(b)に示す。



(a) 出力画像例



(b) 演算結果のパワー分布

図 6 - 3 . ベクトル - スカラ乗算の実験結果

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t(3 \ 7 \ 6) \cdot 7 = {}^t(21 \ 49 \ 42)$$

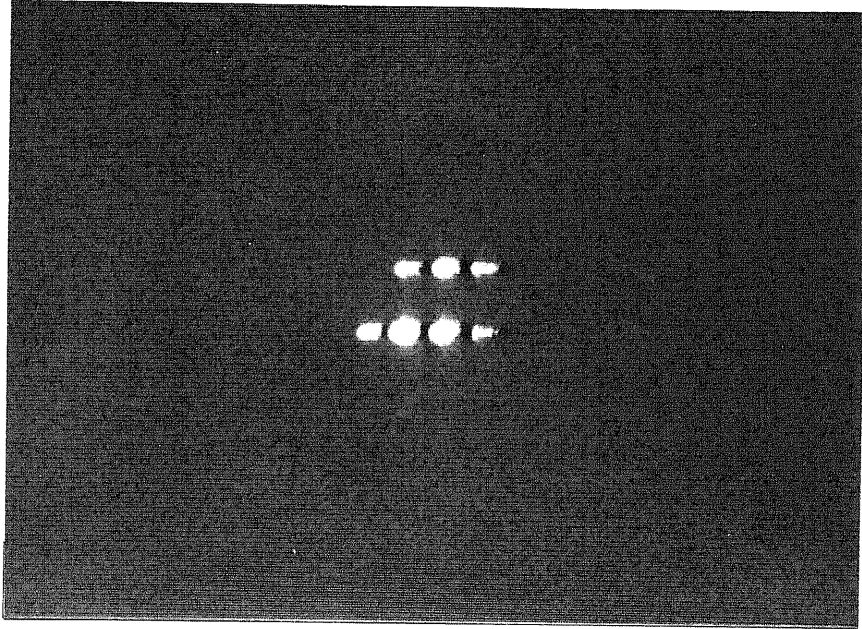
次に、2ビット二進数で与えられたベクトル-スカラー-スカラー乗算を(6-12)式に示した行列3重積演算用のコーディングを用いて実行した。この結果得られた出力画像の一例を図6-4(a)に示す。さらに、この出力成分の光強度分布を測定した結果を図6-4(b)に示す。

これらの結果から、(6-6),(6-12)式に示した空間的なデジタル演算用コーディングが本光学系において有効であることが確認された。

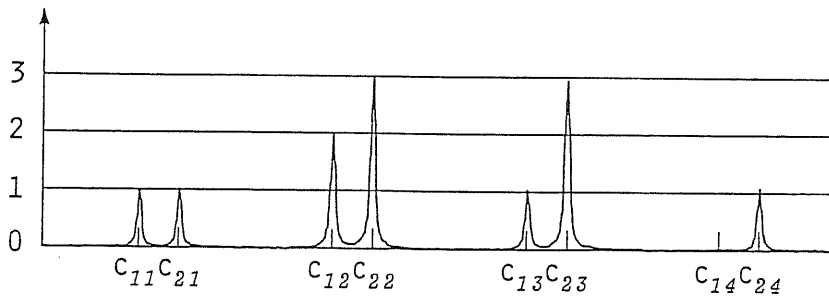
また、第3章の行列-行列乗算の実験結果を外積演算法に基づいたコーディングを、使用したデジタル的乗算の実行結果(この場合、3ビット表現のベクトル同士の内積に対応する)と捉えることも可能である。この観点から、第3章の実験結果を評価すれば、6-2節に述べた外積演算法に基づいたコーディングも本光学系において有効であることが確認される[21]。

#### 6-5. デジタル演算導入に伴う問題点 [23]

本章で示した行列の表記法では、乗算において後ろの方に現れる行列ほど、冗長度の高い表記を施す必要がある。こうした空間的に冗長度を有する行列表記を用いることにより、積の全ディジットを並列かつ実時間的に得ることが可能になる。したがって、例えば $n$ ビット数の成分を有する行列-行列乗算を行うときに光学系で演算可能な行列の大きさは、第一の行列の行数はアナログ演算の場合と同じで、その列数は $n$ 分の1に、第二の行列の列数は $(2n-1)$ 分の1に低下する(第二の行列の列数は、空間光変調器の分解能が向上すればこれ程に低下せずに済ませられる)。また、 $n$ ビット数の成分を有する行列の3重積演算の場合には第一・第二の行列の大きさは行列-行列乗算の場合と同様に低下し、最後の行列の列数は $(3n-2)$ 分の1になってしまう(最後の行列の列数については、空間光変調器の分解能が向上すれば、これ程には低下しない)。以上に述べたように、空間的なコーディングのみを用いて行



(a) 出力画像例



(b) 演算結果のパワー分布

図6-4. ベクトル-スカラー-スカラー乗算の実験結果

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t(1\ 3) \cdot 3 \cdot 3 = {}^t(9\ 27)$$

列乗算をデジタル的に実行しようとするれば、光学系で並列に実行し得るスカラ乗算数がアナログ演算実行時に比べて少なくなってしまう。そこで、時系列演算の実行を許せば、行列表記の冗長性を避けることができ、アナログ演算のときに比べ、演算可能な行列の大きさの低下をビット数分だけに、つまり最小限に、留めることができる。

ところが、ここに示した手法を用いる場合、例えば入力純二進符号で与えられても、結果は混二進符号と呼ばれるアナログ信号として得られる。そのため、高精度演算を実行するためには、ダイナミックレンジの広い光検出器を使用しなくてはならない。すなわち、行列-行列乗算の場合には  $2nM$  ( $n$ :ビット数、 $M$ :第一の行列の列数) のダイナミックレンジが要求され、行列3重積演算の場合には  $2n(2n-1)LM$  ( $L$ :第一の行列の列数、 $M$ :第二の行列の列数) が要求される。さらに、結果を純二進符号に変換するためには、光出力を検出した後にも高精度の電気信号処理が必要となる。これらを実現することは、容易なことではない[25]。こうした不便は、すべて、本光学系の中に閾値判定・桁上げの機構が備わっていないことに起因するものである。

以上に述べた点から、本章で述べたデジタル演算用のコーディングを使用して精度向上を図るためには、後処理等に関してさらに新しい着想が必要であると思われる。ただし、二進数のコーディングを使用することにより、空間光変調器のコントラスト比が要求を満足さえすれば、中間調を使用しないので、動作に多少の非線形性があっても入力行列成分のダイナミックレンジを拡大することは可能となる。したがって、現段階においては、デジタルコーディングを導入した演算には、この点に特徴を求めるのが妥当なところであろう。

## 6-6. まとめ

前章までに提案した実時間多段行列乗算用光学系に対して、行列の空

間的なコーディング手法を用いることによってデジタル的な演算を導入し得ることを示した。また、これらのコーディングを使用して混二進符号による乗算を簡単な実験系で実行した結果も報告した。さらに、こうしたコーディングを使用する混二進乗算を実行する際の問題点も指摘した。

#### 参 考 文 献

- [1] R.A.Athale and J.N.Lee; "Architectural and Hardware Issues in High Accuracy Optical Matrix Processors," Topical Meeting on Optical Computing, March 18-20, 1985, Incline Village, Nevada, Paper No. TuD6.
- [2] H.J.Whitehouse and J.M.Speiser; "Linear Signal Processing Architectures," in 'Aspects of Signal Processing Part II,' Ed. by G.Tacconi, (NATO Advanced Study Institute, Boston, 1976), pp.669-702.
- [3] D.Psaltis, D.Casasent, D.Neff, and M.Carlotto; "Accurate Numerical Computation by Optical Convolution," Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Vol.232, p.151-156 (1980).
- [4] W.C.Collins, R.A.Athale, and P.D.Stilwell; "Improved Accuracy for an Optical Iterative Processor," Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Vol.352, p.59-66 (1983).
- [5] H.J.Caulfield; "Floating Point Optical Matrix Calculations," Opt. Eng., Vol.22, No.6, pp.765-766 (1983).
- [6] R.A.Athale, W.C.Collins, and P.D.Stilwell; "High Accuracy Matrix Multiplication with Outer Product Optical Processor," Appl. Opt., Vol.22, No.3, pp.368-370 (1983).

- [7] R.P.Bocker, S.R.Clayton, and K.Bromley; "Electrooptical Matrix Multiplication Using the Twos Complement Arithmetic for Improved Accuracy," Appl. Opt., Vol.22, No.13, pp.2019-2021 (1983).
- [8] P.S.Guilfoyle; "Systolic Acousto-Optic Binary Convolver," Opt. Eng., Vol.23, No.1, pp.20-25 (1984).
- [9] R.P.Bocker; "Optical Digital RUBIC (Rapid Unbiased Bipolar Incoherent Calculator) Cube Processor," Opt. Eng., Vol.23, No.1, pp.26-33 (1984).
- [10] H.J.Caulfield; "Spatial Encoding for Optical Floating Point Computation," Appl. Opt., Vol.23, No.2, pp.239-241 (1984).
- [11] A.P.Goutzoulis; "Systolic Time-Integrating Acoustooptic Binary Processor," Appl. Opt., Vol.23, No.22, pp.4095-4099 (1984).
- [12] K.Wagner and D.Psaltis; "A Space Integrating Acousto-Optic Matrix-Matrix Multiplier," Opt. Commun., Vol.52, No.3, pp.173-177 (1984).
- [13] C.M.Veber; "Integrated Optical Architectures for Matrix Multiplication," Opt. Eng., Vol.24, No.1, pp.19-25 (1985).
- [14] S.Cartwright and S.C.Gustafson; "Convolver-Based Optical Systolic Processing Architectures," Opt. Eng., Vol.24, No.1, pp.59-64 (1985).
- [15] D.Casasent and B.K.Taylor; "Banded-Matrix High-Performance Algorithm and Architecture," Appl. Opt., Vol.24, No.10, pp.1476-1480 (1985).
- [16] R.P.Bocker, M.E.Lasher, W.J.Miceli, R.H.Patterson, and B.L. Drake; "Optical Fixed-Point Arithmetic," Proc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Vol.564, pp.150-156 (1985).

- [17] V.Chandran, T.F.rile, and J.F.Walkup; "Optical Techniques for Real-Time Binary Multiplication," Appl. Opt., Vol.25, No.14, pp.2272-2276 (1986).
- [18] Y.Imai and Y.Ohtsuka; "Optical Computing Based on Interference Fringe Shifting," Opt. Eng., Vol.25, No.1, pp.98-102 (1986).
- [19] H.Takahashi, K.Matsushita, and E.Shimizu; "Optical Matrix Processor," First Optoelectronics Conference (OEC'86), July 29-31, 1986, Tokyo, Paper No. C7-3.
- [20] B.K.Taylor and D.P.Casasent; "Twos-Complement Data Processing for Improved Encoded Matrix-Vector Processors," Appl. Opt., Vol.25, No.6, pp.956-961 (1986).
- [21] H.Nakano and K.Hotate; "Digital Encoding for Incoherent Optical Matrix-Matrix Multiplier," Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO'86), June 9-13, 1986, San Francisco, Paper No. FK-5.
- [22]中野・保立、「実時間マトリクス乗算用光学系 - デジタル演算の導入 -」、昭和61年度電子通信学会総合全国大会、870 (1986).
- [23]中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算用光学系IV - デジタルコーディング手法の導入 -」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE86-129 (1986).
- [24] C.Perlee and D.Casasent; "Negative Base Encoding in Optical Linear Algebra Processors," Appl. Opt., Vol.25, No.2, pp.168-169 (1986).
- [25] D.Psaltis and R.A.Athale; "High Accuracy Computation with Linear Analog Optical Systems: A Critical Study," Appl. Opt., Vol.25, No.18, pp.3071-3077 (1986).



## 第 7 章

# 実時間多段行列乗算用光学系の 応用

### 7-1. はじめに

本章では、ここまでに議論してきた実時間多段行列乗算用光学系を応用したアナログ線形演算法について議論する。ここでは、その一例として逆行列演算について検討しよう。逆行列演算は、行列を応用した線形演算としては最も頻繁に登場する重要な演算の一つである。

フィードバックループを利用することによって、逆フィルタ特性が得られることはよく知られている。この性質は、古典的なアナログ並列光情報処理の研究でもよく利用されている。したがって、実時間行列乗算機能を含んだフィードバック機構を有する光学系を構成することによって、逆行列演算を光学的に実行することが可能となる。本章では、こうしたフィードバックループを有する光学系の構成方法を示し、光学系における演算誤差について簡単に議論する。

### 7-2. フィードバック機構と逆行列

図 7-1 に示すようなフィードバックループを考える。フィードバックループ中の行列  $M$  が、

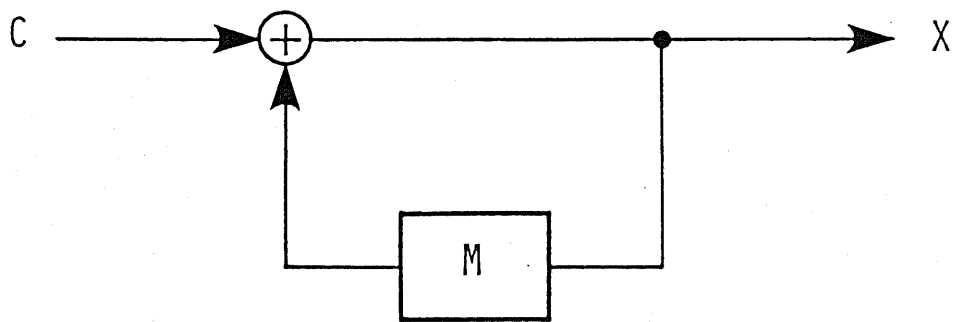


図7-1. フィードバックと逆行列演算

$$|\lambda_m(M)| < 1 \quad (7-1)$$

を満たすとき、出力  $X$  は収束する [1]。ここで、上式の左辺は行列  $M$  の固有値のうちで絶対値が最大のものを意味する。このとき、出力  $X$  は次式のようになる。

$$X = (E - M)^{-1}C \quad (7-2)$$

これは、フィードバック機構を導入することにより、逆行列演算が可能となることを示唆している。特に、入力  $C$  を単位行列  $E$  とした場合には、出力として  $(E - M)$  の逆行列が得られる。つまり、行列  $A$  のすべての固有値が複素平面上で  $(1, 0)$  を中心とする半径 1 の円内（円周上を含まない）に存在すれば、フィードバックループ中に行列  $M (= E - A)$  を与えることによって、行列  $A$  の逆行列を求めることができる。

逆行列を求めたい行列  $A$  が上記の条件を満足しない場合には、もし  $A$  がエルミート行列ならば、 $A$  をスカラー倍した行列  $\hat{A}$  が上記の条件を満足するように乗数を選ぶことができる。こうして得られる  $\hat{A}$  の逆行列を求めることによって、行列  $A$  の逆行列を得ることができることは明らかであろう。このとき、乗数とするスカラーは、 $A$  のナチュラルノルムの逆数の 2 倍程度の数値を選べばよいとされている [2]。また、 $A$  がエルミート行列でない場合も、適当な変形を施すことによって演算が可能になることが示されている [2]。

### 7-3. 逆行列演算用光学系 [3],[4]

本節では、実時間多段行列乗算用光学系に対して、前節で述べたフィードバック機構の性質を活用し、ある種の逆行列演算をも可能とした光学系を示す。また、逆行列演算時の演算誤差に関して簡単に検討する。

### 7-2-1. 逆行列演算用光学系の構成・動作

図7-1のフィードバック処理機構を準光学的（光学系と電気回路とのハイブリッド構成という意味）に実現したものの構成例を、図7-2に示す。なお、この図中で、 $SL$ 、 $SL'$ は焦点距離がそれぞれ、 $f$ 、 $2f$ の球面レンズを表しており、 $CL$ 、 $CL_2$ は焦点距離がそれぞれ、 $f$ 、 $f/2$ のシリンドリカルレンズを意味する。 $BS$ はビームスプリッタである。また、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ は演算される行列を与える2次元空間光変調器である。行列成分の値は、空間光変調器内の各小開口（画素）のパワー透過率によって与えられる。さらに、 $P_1$ 、 $P_2$ は2次元光検出器アレイであり、 $Amp$ はフィードバックループ中での光の減衰を補償するための2次元増幅器アレイである。

また、 $S$ は2次元LEDアレイであり、 $E$ はリニアLEDアレイである。ただし、2次元アレイ $S$ を構成する光源素子は各々の出射光強度を独立に外部から制御可能であり、リニアアレイ $E$ を構成する光源素子の出射光強度は一様に保たれるものとする。すなわち、 $S$ は行列を表記するために設置されているものであり、 $E$ は"Source Encoding"（第3章参照）のために設置されているものであって、双方の役割は全く異なることに注意して頂きたい。ここで、2次元光検出器アレイ $P_1$ と、2次元増幅器アレイ $Amp$ とは構成要素がそれぞれ、1対1に結合されており、それぞれが、2次元光源アレイ $S$ の素子とやはり、1対1で結合されているものとする。したがって、この部分を適当な2次元の光増幅器アレイがあれば、それと置き換えることが可能である。以下に、本光学系の動作について説明しよう。

まず、フィードバックループをOFFにし（シャッタを閉じ）、リニア光源アレイ $E$ を消灯した状態を考える。このとき、2次元光源アレイ $S$ を構成する各LEDの出射光強度を外部信号によって制御し、これによって最初の行列 $S$ を与えることにする。このようにすれば、 $S \sim P_2$ は図5-1に示した実時間行列3重積演算用光学系の後方に結像光学系

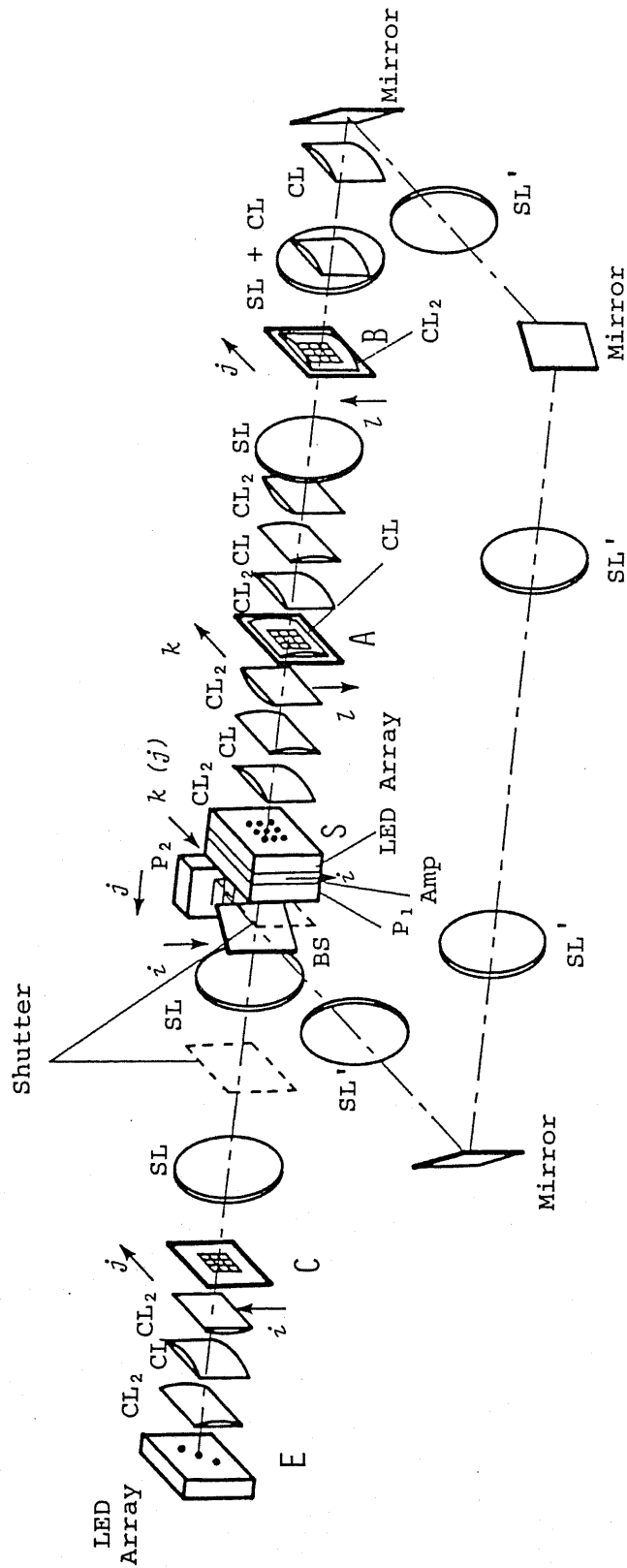


図7-2. ファイババックループを有する行列演算用光学系の構成  
 (図5-1の光学系を応用したもの)  
 シャッタ 閉 → 行列3重積演算  
 シャッタ 開 → 逆行列演算

を連結した構成となる。すなわち、このモードで図7-2の光学系を使用すれば、行列3個の実時間乗算が可能である。

次に、フィードバックをONにし（シャッタを開き）、リニア光源アレイEを点灯した状態を考える。このときには、前節の議論により、本光学系において逆行列演算が可能となる。すなわち、 $A = M$ 、 $B = E$ 、 $C = C$ とすれば、この光学系によって、図7-1に示したフィードバック処理機構が実現されることになる。したがって、出力が安定した状態では、出力ポート $P_2$ において $(E - M)$ の逆行列と行列Cとの積が得られる。

図5-2に示した光学系を用いても、同様の逆行列演算用光学系を構成することができる[4]。この構成を図7-3に示す。

#### 7-2-2. 逆行列演算実行時の演算誤差に関する基礎検討

図7-2の光学系によって、逆行列演算を実行する時の演算誤差について簡単に議論する。このときの演算誤差は、文献[2]とほぼ同様にして議論することができる。

ここで、

$$A = E - M \quad (7-3)$$

とし、(7-2)式の入出力関係を次式のような拡大行列を用いて記述する。

$$\tilde{X} = \tilde{A}^{-1} \tilde{C} \quad (7-4)$$

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} \quad (7-5)$$

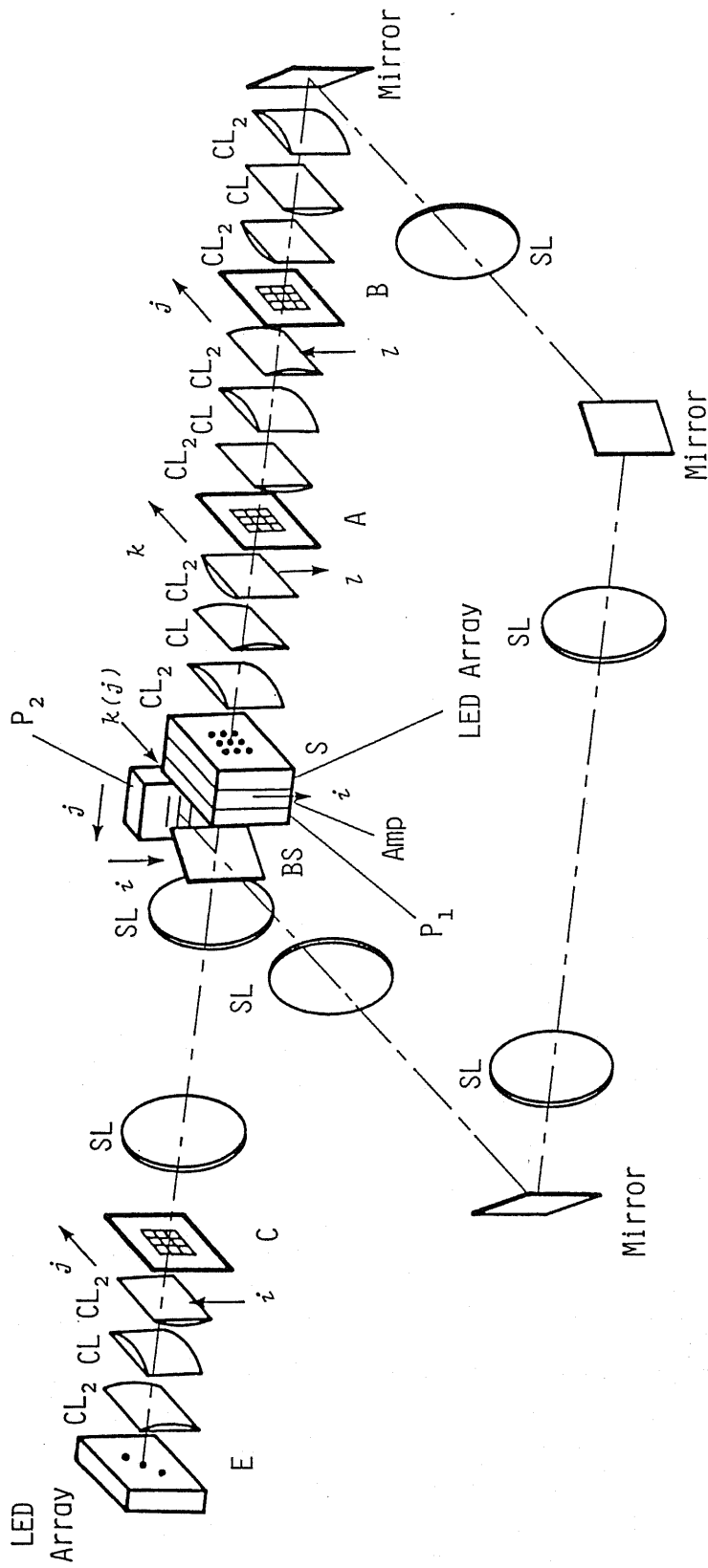


図7-3. ファイババックループを有する行列演算用光学系の構成  
 (図5-2の光学系を応用したもの)

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix} \quad (7-6)$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix} \quad (7-7)$$

このとき、誤差検討のためのモデルとして、図7-4に示すようなものを考えることができる。文献[2]の解析モデルとの相違点は、入力ポート（図7-2におけるE～BSの部分）の存在によって生ずる歪みの影響を余分に考察する必要がある点である。図7-4で、 $\tilde{M}$ はMを上式と同様の考え方で拡大した行列である。さらに、 $G_1$ は増幅器アレイの伝達特性を表し、

$$G_1 = \alpha E \quad (7-8)$$

である。 $G_2$ は実時間行列乗算用光学系における漏話などによる演算誤差を与える伝達特性、 $G_3$ は入力ポート（E～BS）の伝達特性を表す。また、 $w^{(k)}$ は、フィードバックループを $k$ 回通過した演算結果に対する光検出器 $P_1$ における雑音を表す。ここで、増幅器アレイ設置の目的から、行列乗算用光学系の演算誤差が小さいとすれば、

$$G_1 G_2 = E + \Delta \quad (7-9)$$

$$\|\Delta\| \ll 1 \quad (7-10)$$

と考えることができる。また、受光器の雑音 $w^{(k)}$ に関して、

$$\langle W^{(k)} W^{(l)*} \rangle = \sigma^2 \delta(k-l) E \quad (7-11)$$

を仮定する。

以上の過程のもとに、図7-2の光学系において発生する演算誤差の



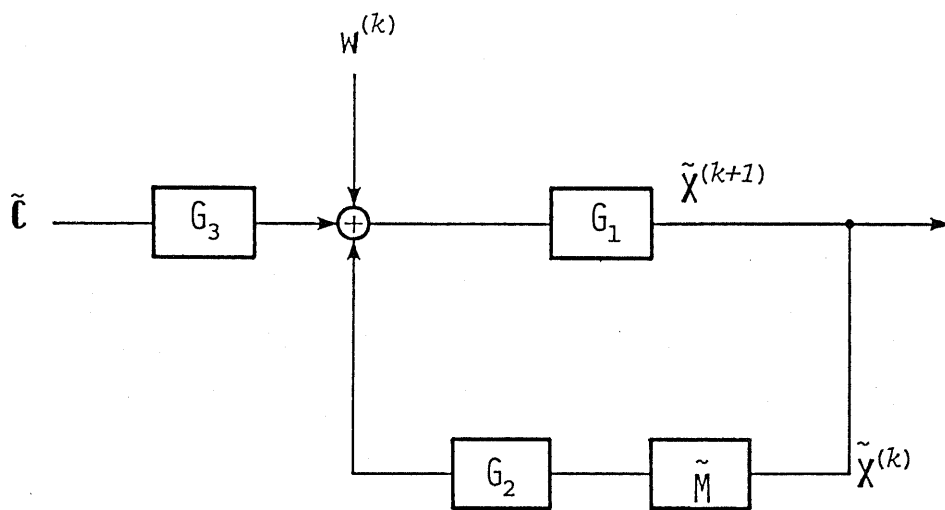


図 7 - 4 . 逆行列演算時の誤差検討のためのモデル

要因をストカスティックなものとし、系統的なものに分けて考える。詳しい式の導出方法は付録Cで議論することとし、ここでは結果のみを示す。光検出器における雑音によって生ずる演算誤差（ストカスティックなもの） $\varepsilon_s$  は、次式のように見積られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &\sim \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{1-(1-\|\Delta\|)\cdot\|E-A\|}} \\ &\sim \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{1-\|E-A\|}} \end{aligned} \quad (7-12)$$

さらに、系統的な演算誤差も考慮に入れると、本光学系の線形性により、出力が収束した状態における演算誤差 $\varepsilon$ は、

$$\varepsilon \sim \varepsilon_s + \|\tilde{A}^{-1}\Delta(E-\tilde{A})\| + \frac{\|A^{-1}(G_3-E)C\|}{\|\tilde{A}^{-1}\tilde{C}\|} \quad (7-13)$$

と見積られる。なお、上式で右辺の第2項はフィードバック中における漏話等による演算誤差であり、第3項は入力ポート（図7-2におけるE～BSの部分）における歪みの影響によるものである。

#### 7-4. まとめ

本論文の前半で提案した「実時間多段行列乗算用光学系」の応用例として、逆行列演算を示した。

実時間行列乗算用光学系と逆フィルタ特性を有するフィードバックとを組み合わせることによって、逆行列演算が可能となる。この原理に基づき、2次元光源アレイを有する実時間行列3重積演算用光学系を応用した逆行列演算用光学系の構成例を示した。また、この光学系を使用して逆行列演算を実行するときの演算誤差についても簡単な検討を行った。なお、この光学系では、フィードバックの途中に適当な

電気処理系を挿入することができるので、収束判定等のさらに高度な演算を実現する可能性を秘めている。

本章で議論した行列演算は、アナログ演算である。したがって、演算精度の面では若干心配ではある。しかし、適用分野によっては、大きな威力を発揮し得るものと期待される。

#### 参 考 文 献

- [1] 齋藤、「線形代数入門」、第7章、p.212、東京大学出版会（昭和41年）。
- [2] J.W.Goodman and M.S.Song; "Performance Limitations of an Analog Method for Solving Simultaneous Linear Equations," Appl. Opt., Vol.21, No.3, pp.502-506 (1982).
- [3] 中野・保立、「2次元光源アレイを有する実時間行列乗算用光学系」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE86-112 (1986).
- [4] 中野・保立、「フィードバックループを有する実時間行列演算用光学系」、昭和61年度電子通信学会光・電波部門全国大会、441 (1986).

## 第 8 章

### 結 論

—— 今後の研究への期待と展望 ——

#### 8-1. はじめに

本論文の目的は、「実時間行列演算」のための光学的手法を提案し、その演算性能を明らかとすることであった。この演算は、光波が天賦の素質として有する「並列情報伝達性」、「並列情報処理性」を活用した数値演算として重要なものである。本論文では、行列演算において基本となる多段行列乗算を中心として議論を進めてきた。

第 3 章では、従来からの空間積分法によるベクトル-行列乗算用光学系を多重化するために、“Source Encoding” 技術の導入を提案した [1]-[3]。この考え方は、行列乗算のみに留まらず、他の光学的情報処理においても活用され得るものと期待される。空間的配置を工夫した点光源のリニアアレイを用いることによって、特殊光学レンズ等を使用することなく行列-行列乗算に必要な  $N^3$  並列性を得ているところに本光学系の特徴がある [2]。また、入力行列と出力行列とが全く同じ形式 ( $N^2$  フォーマット) で与えられる。したがって、出力面内に一方向拡散板を配置することによって行列 3 個以上を乗算するための光学系へ容易に拡張することが可能である。本光学系の動作は簡単な実験によって確認されている [1]-[3]。また、本光学系で使用する一方向拡散板の特性によって系統的に生ずる行列 3 重積演算実行時の演算

誤差に関して議論し、その補償法も示した [4],[5]。

第4章では、この光学系を行列-行列乗算用として構成した状態での演算性能（演算可能な行列の大きさ、ならびに、演算速度と演算精度との関係）に関して簡単な考察を行った。その結果、中規模程度の行列乗算に使用すれば、今後のデバイスの進歩によってアナログ演算ではあるが、かなりの高速演算を実現し得ることが明らかとなった [6],[7]。また、この演算性能を実現するために必要となるデバイスの性能（要求値）も示した。

第5章では、光源部分を2次元アレイ化することにより、演算性能をさらに強化することが可能であることを示した [8]。ここで提案した光学系では、簡単な光学系構成で行列3重積演算が可能である。また、行列3重積演算については、リニア光源アレイを使用する場合に演算誤差の発生要因となった一方向拡散板を使用する必要がなく、演算精度向上の面からも好ましいものである。この光学系の動作も簡単な実験によって確認されている [9]。また、第4章と同様にして、本光学系の演算性能を議論した。

第6章では、本質的にアナログ演算器である実時間多段行列乗算用光学系に対してデジタル的な演算を導入するための一つの手法を示した [10],[11]。すなわち、空間的なコーディング手法によって、混二進数演算を導入することの可能性を示した。行列-行列乗算用のコーディング手法ならびに多段行列乗算用のコーディング手法を示し、これを使用して簡単なベクトル乗算の実験を行った。このデジタル的な演算手法を導入することにより、空間光変調器の非線形動作に対する許容度が大きくなる。

第7章では、本論文で提案した実時間多段行列乗算用光学系を応用した線形演算の一例として逆行列演算法について検討した。つまり、フィードバック処理機構の活用により、逆フィルタ特性を得ることが可能である点に着目し、これと実時間行列乗算用光学系とを融合したシステムを提案した [9]。この演算システムは、簡単な操作によって、行列乗算モードと逆行列演算モードとを選択することが可能な構成になっている。

ここでは、光と電気とのハイブリッド構成での演算法を示したが、適当なデバイスが登場すれば全光学的に構成することも可能である。

本論文の随所で述べたように、実時間多段行列乗算用光学系の持つ潜在的能力は非常に高く、アナログ演算処理の範囲であれば本論文で示した逆行列演算以外にも数多くの応用が可能であると考えられる。しかしながら、本質的にアナログのパワー演算であることが大きな特徴であると同時に、演算能力を十分に発揮させる上での障害にもなっている。この点に関する一つの対策が、第6章の議論である。しかし、本文中でも述べたように、これで十分であるとは言い難い面がある。したがって、光計算に適した数表現法の検討が、光デバイスの進歩と共に今後の重要な検討課題になるといえよう。

そこで、本章では、まず、これまでに検討されてきた数表現の例を簡単に紹介する。次に、実時間多段行列乗算用光学系に対して適用可能と思われるアナログ演算用の数表現を一つ提示し、本論文を締め括ることにしたい。

## 8-2. 種々の数表現

本論文の第6章で、2進数を用いた演算手法の検討を行ったが、この方法では、桁ごとに重みが付いているために上位の桁での誤差が演算結果に与える悪影響が問題となる。この観点から、2進数演算をDMAC (Digital Multiplication by Analog Convolution) アルゴリズムによって実行する手法に対して、批判的な意見もある[12]。従来の電子式計算機との整合の面からは、確かに2進数を用いることが望ましい。しかし、光数値演算システムを実用化してゆくためには、この点にのみこだわることなく、より光計算に適した数表現法を模索する必要がある。

光計算の研究の中で、かなり古くから検討されているものに、「光剰余演算」がある[13]-[17]。剰余数システムとは、法とよばれる互いに

素な整数の組の上に成り立っており、それぞれの法に対する剰余をセットとして表記する数表現法である。この数表現法の大きな特徴は、加算と乗算とを全く同じ手法で演算することができ、しかも、桁上げがない点である。この点は、論理判断機構を持たない光数値演算システムにおいて大きな福音である。ただし、通常の数表現システムとのインターフェースを構成することが容易でない点に難がある。剰余演算を光学的に実行する手続は幾つか検討されているが、数表現システムを構成するそれぞれの法に対する演算マップを光配線で実現することが基本となっている[13], [14]。カーネギーメロン大学のD.Casasentらは、光シストリックプロセッサの中で剰余数システムを利用し、行列乗算の精度向上を図る検討を行っている[18]。また、ウェスティングハウスエレクトリック社のJ.C.Bradleyらは、アダプティブフェイズドアレイレーダの信号処理のために用いる剰余演算による光シストリックプロセッサの検討を行っている[19]。この他に、我が国でも新潟大学の安東教授ら[20]ならびに大阪市立大学の志水教授ら[21]によって、剰余演算を用いた行列乗算の検討が行われている。しかし、剰余算法を実時間多段行列乗算用光学系に適用することは、特殊な光配線技術を併用しない限りは困難であると思われる。

BDM社のR.A.Athaleは、すべての桁が同じ重みを持つ数システムの使用を提案した[21]。この方法によれば、すべての桁が同じ重みを持つため、混二進数演算における上位の桁の誤差がすべての演算精度を支配してしまうという問題点が回避される。しかし、この数表現システムでは、ダイナミックレンジを広くすることは困難であり、したがって、演算精度も中程度に留まらざるを得ない。この数表現法を実時間多段行列乗算用光学系に適用することは、容易である。

以上は、算術としての数表現法の例である。これらは、本質的にアナログ演算の精度に限定される光数値演算の精度を多少でも向上させるために検討されているものである。最後に、光情報としての数表現法について考えてみたい。

本論文では、光のパワー（振幅）のみを用いた演算法を検討した。し

かし、光情報としては、この他に位相ならびに偏波状態などを用いることも可能なはずである。特に、光の偏波状態は、光ディジタル演算の中で大きな威力を発揮するものとして着目されている[23]。光ディジタル演算では、直交する2つの偏波状態を用いて1と0とを表し、偏波双安定が利用される。ところで、アナログ演算処理に偏波情報も併用することによって、任意の実数を簡単に取扱うことが可能になると考えられる。すなわち、直交する2つの偏波状態を用いて数の符号を与え（例えば、縦偏波は正数を表し、横偏波は負数を表す）、パワーによってその絶対値を与えるような数表現法を導入するのである。こうした数表現を用いれば、実数成分を有する行列乗算に関しては第4章で議論した拡大行列を使用する必要がなくなる。ただし、このような偏波状態とパワー状態とを併用した実数演算を実現するためには、偏波依存性のない透過型空間光変調器（透過率によって乗数の絶対値を与える）ならびに偏波面を $90^\circ$ 回転させるロテータ（このON、OFFによって乗数の符号を与える）が必要となる。また、出力の検出機構も両偏波状態に対するものが独立に必要となるであろう。これら以外にも検討すべき点は存在するであろうが、光の偏波状態を数値演算のために併用することによって、本論文で提案した「実時間多段行列乗算用光学系」の演算機能が拡張されることが期待される。

### 8-3. まとめ

本論文では、光波の持つ「並列性」という重要な特徴を活用した数値演算システムとして「実時間多段行列乗算用光学系」を提案し、その演算性能について議論し、また、基礎実験によって動作を確認した。さらに、アナログ線形演算への一応用例として逆行列演算法についても検討した。

実時間多段行列乗算用光学系は本質的にアナログ演算器であるため、



演算精度向上のためには、演算に使用する数表現システムについて検討する必要がある。本論文では、空間的なコーディング手法による混二進数演算の導入法を議論した。

また、アナログ演算のレベルにおいても、本論文で提案した範囲では使用されていない光の情報（例えば、偏波状態等）を併用することによって、本光学系の演算機能を拡張することが可能であると期待される。この点に関する検討も今後の重要な課題の一つとなるであろう。こうした演算機能拡張は、今後の光デバイス技術の進歩によって可能性が高まってゆくものと期待される。

#### 参 考 文 献

- [1] H.Nakano and K.Hotate; "Optical System for Real-Time Processing of Multiple Matrix Product," *Electron. Lett.*, Vol.21, No.10, pp.435-437 (1985).
- [2] H.Nakano and K.Hotate; "Real-Time Processing of the Multiple Matrix Product Using an Incoherent Optical System," *Appl. Opt.*, Vol.24, No.23, pp.4238-4246 (1985).
- [3] 中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算用光学系」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE84-122 (1985).
- [4] H.Nakano and K.Hotate; "Operational Error in the Optical Real-Time Multiple Matrix Multiplier and Its Compensation," *Appl. Opt.*, Vol.25, NO.18, pp.3132-3136 (1986).
- [5] 中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算用光学系Ⅱ - 演算誤差とその補償法 -」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE85-148 (1986).

- [6] H.Nakano and K.Hotate; "Limit of Parallelism and Operational Speed in the Optical System for Real-Time Matrix-Matrix Multiplication," First Optoelectronics Conference (OEC'86), July 29-31, 1986, Tokyo, Paper No. C7-2.
- [7] 中野・保立、「実時間行列乗算用光学系における並列性と演算速度の限界」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE85-178 (1986).
- [8] 中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算用光学系Ⅲ - 光源アレイの2次元化による演算機能の拡張 -」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE86-23 (1986).
- [9] 中野・保立、「2次元光源アレイを有する実時間行列乗算用光学系」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE86-112 (1986).
- [10] H.Nakano and K.Hotate; "Digital Encoding for Incoherent Optical Matrix-Matrix Multiplier," Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO'86), June 9-13, 1986, San Francisco, Paper No. FK-5.
- [11] 中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算用光学系Ⅳ - デジタルコーディング手法の導入 -」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE86-129 (1986).
- [12] D.Psaltis and R.A.Athale; "High Accuracy Computation with Linear Analog Optical Systems: A Critical Study," Appl. Opt., Vol.25, No.18, pp.3071-3077 (1986).
- [13] 石原、「剰余算法を用いた光演算 (I)」、O plus E, Vol.5, pp.63-68 (1980).
- [14] 石原、「剰余算法を用いた光演算 (II)」、O plus E, Vol.6, pp.68-76 (1980).
- [15] A.Huang, Y.Tsunoda, J.W.Goodman, and S.Ishihara; "Optical Computation Using Residue Arithmetic," Appl. Opt., Vol.18, No.2, pp.149-162 (1979).

- [16] D.Psaltis and D.Casasent; "Optical Residue Arithmetic: A Correlation Approach," Appl. Opt., Vol.18, No.2, pp.163-171 (1979).
- [17] A.Tai, I.Cindrich, J.R.Fienup, and C.C.Aleksoff; "Optical Residue Arithmetic Computer with Programmable Modules," Appl. Opt., Vol.18, No.16, pp.2812-2823 (1979).
- [18] J.Jackson and D.Casasent; "Optical Systolic Array Processor Using Residue Arithmetic," Appl. Opt., Vol.22, No.18, pp.2817-2821 (1983).
- [19] P.R.Beaudet, A.P.Goutzoulis, E.C.Malarkey, and J.C.Bradley; "Residue Arithmetic Techniques for Optical Processing of Adaptive Phased Array Radars," Appl. Opt., Vol.25, No.18, pp.3097-3112 (1986).
- [20] 矢部、安東、関川、関根、三田、「行列乗算用光コンピュータ」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE85-104(1985).
- [21] 北村、松下、志水、「オプトロニック剰余演算システム」、昭和59年度電子通信学会総合全国大会、1032 (1984).
- [22] R.A.Athale; "Highly Redundant Number Representation for Medium Accuracy Optical Computing," Appl. Opt., Vol.25, No.18, pp.3122-3128 (1986).
- [23] A.W.Lohmann; "Polarization and Optical Logic," Appl. Opt., Vol.25, No.10, pp.1594-1597 (1986).

## 付 録

### 付録A. 一方向拡散板の拡散指向性

ホログラム作製時の光学系として、図A-1に示すような1次元モデルを考える。ここで、y軸方向のスリット幅は十分に狭いものとする。さらに、一方向拡散板を作製するときに用いるディフューザの粗面の度合いの相関長は、光の波長に比べて十分に短いものと仮定する。

ホログラフィ作製時に用いるディフューザの振幅透過率を $T(x)$ 、照射光の電界を $E_i(x)$ とすれば、乾板上の光電界 $E(x)$ は、

$$E(x) = \int_{-a/2}^{a/2} T(x') E_i(x') \exp[j\frac{k}{2\ell}(x-x')^2] dx' \quad (\text{A-1})$$

で与えられる。これから、記録過程が線形ならば、ホログラムの透過率 $t(x)$ は、乾板上の光強度を $I(x)$ として、次式のようなになる。

$$t(x) = \exp[j\{t_0 + KI(x)\}] \quad (\text{A-2})$$

今、このホログラムを一様照射光で再生したときを考える。このときの透過光強度のパワースペクトラムは、 $t(x)$ の自己相関 $\Gamma(x_1, x_2)$ のフーリエ変換に等しい。したがって、 $t(x)$ の自己相関を求めればよい。(A-2)式から、

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2) &= \langle t(x_1) t^*(x_2) \rangle \\ &= \langle \exp[jK\{I(x_1) - I(x_2)\}] \rangle \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

である。ここで、

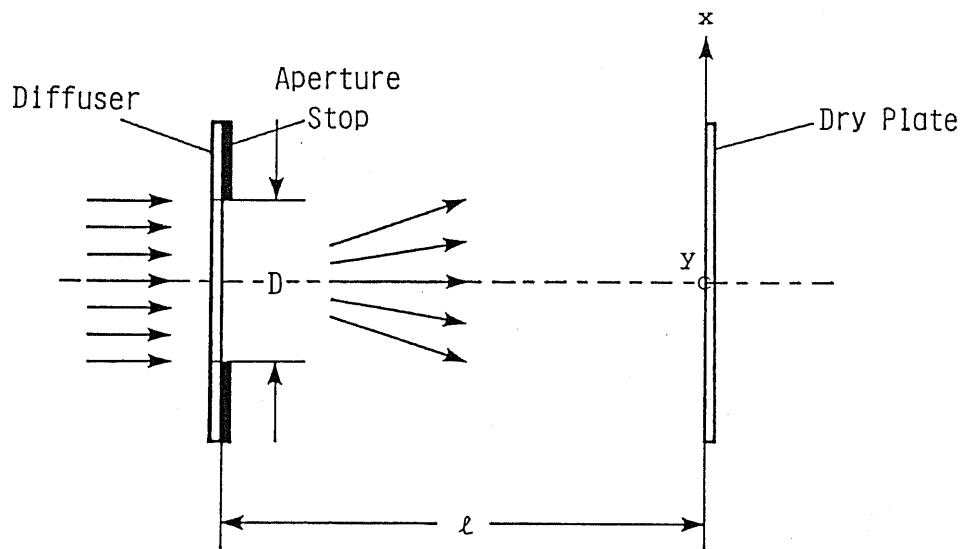


図 A - 1 . 一方向拡散板作製時の光学系の 1 次元モデル

$$E(x_1) = E_1 = E_{1r} + jE_{1i} \quad (A-4)$$

$$E(x_2) = E_2 = E_{2r} + jE_{2i} \quad (A-5)$$

とおけば、 $E_1$ 、 $E_2$  は共に複素ガウス過程に従い [1]、その確率密度関数は、

$$p(E_v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{E_{vr}^2 + E_{vi}^2}{2\sigma^2}\right) \quad (A-6)$$

で与えられ、 $E_1$ 、 $E_2$  の結合確率密度分布は、

$$\begin{aligned} p(E_1, E_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2 \sigma^4 (1-\rho_1^2 - \rho_2^2)} \\ &\times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2 (1-\rho_1^2 - \rho_2^2)} \{ |E_1|^2 + |E_2|^2 \right. \\ &\quad - 2\rho_1 (E_{1r}E_{2r} + E_{1i}E_{2i}) \\ &\quad \left. - 2\rho_2 (E_{1i}E_{2r} - E_{1r}E_{2i}) \right] \end{aligned} \quad (A-7)$$

で与えられる。ただし、

$$\langle E_{vr}^2 \rangle = \langle E_{vi}^2 \rangle = \sigma^2 \quad (A-8)$$

$$\langle E_{vr}E_{vi} \rangle = 0 \quad (A-9)$$

である。さらに、

$$\langle E_{1r}E_{2r} \rangle = \langle E_{1i}E_{2i} \rangle = \rho_1 \sigma^2 \quad (A-10)$$

$$\langle E_{1i}E_{2r} \rangle = -\langle E_{1r}E_{2i} \rangle = \rho_2 \sigma^2 \quad (A-11)$$

を仮定した。これを用いて  $\Gamma(x_1, x_2)$  を計算すると、

$$\Gamma(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + (KI)^2 [1 + \text{sinc}^2 \frac{kD}{2\ell} (x_1 - x_2)]} \quad (A-12)$$

を得る。これをフーリエ変換することによって、一方向拡散板の拡散指向性  $p_D(\alpha)$  を (A-13) 式のように求めることができる。

$$P_D(\alpha) = \frac{2\ell}{kD} F\left(\frac{2\ell}{kD} \alpha\right) \quad (\text{A-13})$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(KI)^2(1-\text{sinc}^2 X)} \exp(-j2\pi ux) dx \quad (\text{A-14})$$

(A-14)式を計算するのは困難であるが、これより直ちに、一方向拡散板の拡散指向性が入射光の光軸方向に対して対称であることはわかる。また、(A-13)式から、一方向拡散板の拡散指向特性が相似性を有することがわかる。すなわち、ホログラム作製時の露光条件が等しいならば、作製された一方向拡散板による散乱幅をホログラム作製時に使用したスリットの長さで規格化したパラメータによって、拡散指向性を一意に記述することができる。これらの性質が3-4章で活用されている。

#### 付録B. 行列マスク内の開口間隔の一つの目安

第3章で述べた行列マスク小開口間隔についてその設計指針の一方法を述べる。ここでの議論は、第3章の議論のためのものであり、第4章以降の議論で用いられるものではない。つまり、一方向拡散板を光学系の途中に使用するために生ずる特殊性に関して議論を展開するために用いた一つの極めて粗い目安に過ぎない（第5章で議論したように考えれば、さらに行列マスクの小開口間隔を狭くすることが可能である）。

行列マスク小開口が一辺  $a$  の正方形である場合について、その中心間隔  $s$  の一つの目安について簡単な近似の下で議論しよう。

まず、図3-4に示した演算ユニットにおける回折による像のぼけを考える。ここで、 $Q_i \sim M_i$  では、垂直面内で各ビームが完全な平行光であるとする。水平面内では、マスク  $M_i$  のある位置を通過した光線は、マスク  $C_i$  の特定の位置を通過しなくてはならない。この対応関係が狂うと、演算誤差を生じることになる。 $M_i$  で有限の開口を通過して回折

が起こることによるビームの広がり半角  $\Delta\theta$  は、

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{a} \quad (\text{B-1})$$

と見積られる。ところが、この面内で  $M_i \sim C_i$  は結像系になっている。したがって、 $C_i$  における像のぼけには、レンズによる回折と一方向拡散板の不完全性のみが寄与し、 $M_i$  の開口寸法には依存しない。 $M_i \sim C_i$  間のレンズ開口をすべて  $D_L$  とし、一方向拡散板による不要方向への広がり角を  $\Delta\theta_D$  とすれば、 $C_i$  における像のぼけ  $\delta_1$  は、

$$\bar{\delta}_1^2 \sim 3\delta_L^2 + (f\Delta\theta_D)^2 \quad (\text{B-2})$$

$$\delta_L \sim 2.44 \frac{\lambda f}{D_L} \quad (\text{B-3})$$

と見積られる。水平面内においては、マスク  $M_i$  からマスク  $C_i$  への対応を考える限り、回折の影響を考える必要はない。

以上の準備の下に、図 3-1 の光学系における回折の影響について考える。水平面内で問題となる回折のうちで最大のものは、R の位置（出力面）での像のぼけ  $\delta_{R1}$  である。これは、

$$\delta_{R1}^2 \sim \frac{25}{4}\delta_L^2 + 2(2f\Delta\theta)^2 + a_\ell^2 + (f\Delta\theta_D)^2 \quad (\text{B-4})$$

の程度と見積られる。ここで、 $a_\ell$  は光源の大きさを示す。また、垂直面内で問題となる回折の影響のうち最大のものは、行列マスク B の位置での像のぼけ  $\bar{\delta}_{B2}$  であり、

$$\bar{\delta}_{B2}^2 \sim 3\delta_L^2 \quad (\text{B-5})$$

の程度に見積られる。

(B-4), (B-5) 両式より、R の位置で正しく演算結果を得るための行列マスク小開口の中心間隔  $s$  の目安として、

$$s > \max(\delta_{R1}, a + \bar{\delta}_{B2}) \quad (\text{B-6})$$



を用いればよいことがわかる。この目安によれば、回折像の第2サイドローブ以降が隣接する開口に影響を及ぼし得る。しかし、これは、本論中で議論した誤差要因に比べてはるかに小さいために、本論の議論では、この目安を採用した。

### 付録C. 逆行列演算実行時の演算誤差に関する基礎検討

図7-2の光学系によって、逆行列演算を実行する時の演算誤差について簡単に議論する。このとき、演算誤差を検討するためのモデルとして、図C-1に示すようなものを考えることができる。文献[2]の解析モデルとの相違点は、入力ポート（図7-2におけるE～BSの部分）の存在によって生ずる歪みの影響を余分に考察する必要がある点である。図C-1で、 $G_1$ は増幅器アレイの伝達特性を表し、

$$G_1 = \alpha E \quad (C-1)$$

である。 $G_2$ は実時間行列乗算用光学系における漏話などによる演算誤差を与える伝達特性、 $G_3$ は入力ポート（E～BS）の伝達特性を表す。また、 $w^{(k)}$ は、フィードバックループを $k$ 回通過した演算結果に対する光検出器 $P_1$ における雑音を表す。ここで、増幅器アレイ設置の目的から、行列乗算用光学系の演算誤差が小さいとすれば、

$$G_1 G_2 = E + \Delta \quad (C-2)$$

$$\|\Delta\| \ll 1 \quad (C-3)$$

と考えることができる。また、光検出器の雑音 $w^{(k)}$ に関して、

$$\langle w^{(k)} w^{(l)*} \rangle = \sigma^2 \delta(k-l) E \quad (C-4)$$

を仮定する。

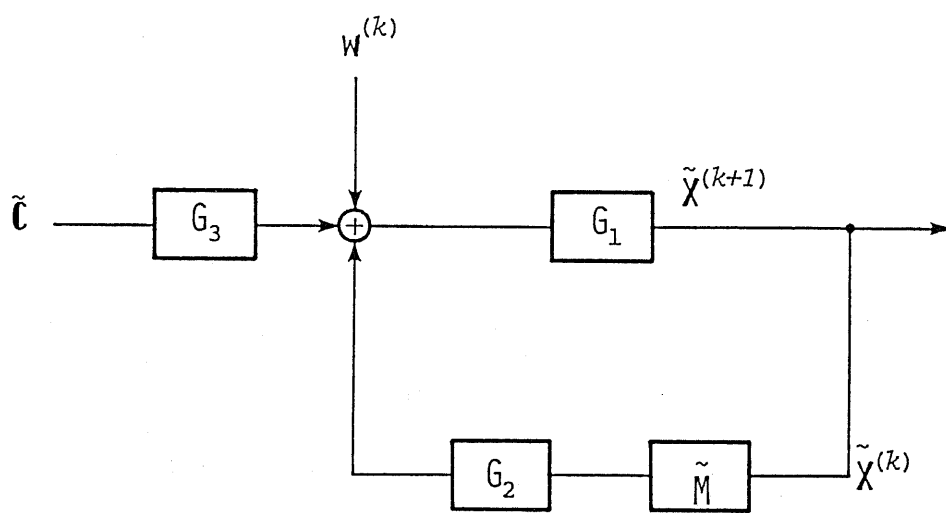


図 C - 1 . 逆行列演算時の誤差検討のためのモデル

ここで、フィードバックループを  $k$  回通過したことによって得られる中間結果を  $\tilde{x}^{(k)}$  とすれば、

$$\tilde{x}^{(k+1)} = G_1 G_2 (E - \tilde{A}) \tilde{x}^{(k)} + G_1 G_3 \tilde{c} + G_1 W^{(k)} \quad (C-5)$$

となる。ここで、

$$y^{(k)} = \tilde{x}^{(k)} - (E - \tilde{A})^{-1} \tilde{c} \quad (C-6)$$

とおけば、(7-9) 式の関係は、次のように書くことができる。

$$y^{(k+1)} = (E + \Delta) (E - \tilde{A}) y^{(k)} + G_1 W^{(k)} \quad (C-7)$$

さらに、 $y^{(k)}$  をストカスティックな誤差  $\hat{y}^{(k)}$  と系統的な誤差  $\bar{y}^{(k)}$  とに分けて考える。光学系が線形であるから、両者を独立に考えることができる。したがって、

$$y^{(k)} = \bar{y}^{(k)} + \hat{y}^{(k)} \quad (C-8)$$

を得る。

まず、系統的な演算誤差について考察しよう。(C-7)式は、初期入力に依存した演算誤差をも含んでいる。しかし、この演算誤差は、初期入力を適当に与えれば、収束した状態では0となる。そこで、問題となるのは、システムが理想的な状態からずれていることに起因する演算誤差である。この点について考える。(C-5)式より、系統的な演算誤差のみが発生するときに、収束した後に得られる  $\bar{x}$  は、

$$\bar{x} = (E + \Delta) (E - \tilde{A}) \bar{x} + G_1 G_3 \tilde{c} \quad (C-9)$$

で与えられる。これを変形すると、

$$\bar{x} \sim (E - \tilde{A})^{-1} \tilde{c} + \tilde{A}^{-1} \Delta (E - \tilde{A}) \tilde{A}^{-1} \tilde{c} \quad (C-10)$$

を得る。したがって、光学系が理想的状態からずれていることによる演算誤差  $\varepsilon_{sy}$  は、

$$\varepsilon_{sy} \sim \|\tilde{A}^{-1}\Delta(E-\tilde{A})\| + \frac{\|\tilde{A}^{-1}(G_3-E)\tilde{c}\|}{\|\tilde{A}^{-1}\tilde{c}\|} \quad (C-11)$$

の程度と見積られる。ここで、右辺の第1項はフィードバックループ中における漏話等によって生ずる演算誤差の影響を表し、第2項は入力ポート（図7-2のE~BS）の部分における歪みの影響を表している。

次に、ストカスティックな演算誤差の影響について考察しよう。これは、光検出器における雑音に起因する演算誤差として捉えられる。ここで、

$$\hat{y}^{(k+1)} = (E+\Delta)(E-\tilde{A})\hat{y}^{(k)} + G_1W^{(k)} \quad (C-12)$$

$$\hat{y}^{(0)} = 0 \quad (C-13)$$

であるから、 $\hat{y}^{(k+1)}$ について

$$\hat{y}^{(k+1)} = \sum_{l=0}^k [(E+\Delta)(E-\tilde{A})]^{k-l} G_1W^{(l)} \quad (C-14)$$

を得る。 $\hat{y}^{(k+1)}$ の共分散行列  $K^{(k+1)}$ は、

$$\begin{aligned} K^{(k+1)} &= \langle y^{(k+1)} y^{(k+1)*} \rangle \\ &= \sum_{l=0}^k \sum_{m=0}^k [(E+\Delta)(E-\tilde{A})]^{k-l} \langle G_1W^{(l)} G_1^*W^{(m)*} \rangle \\ &\quad \cdot [(E-\tilde{A}^*)(E+\Delta^*)]^{k-m} \end{aligned} \quad (C-15)$$

である。ここで、(7-6)~(7-8)式の関係から、

$$\langle G_1W^{(l)} G_1^*W^{(m)*} \rangle = \alpha^2 \sigma^2 \delta(l-m) E \quad (C-16)$$

であることがわかる。したがって、

$$K^{(k+1)} = \alpha^2 \sigma^2 \sum_{l=0}^k [(E+\Delta)(E-\tilde{A})(E-\tilde{A}^*)(E+\Delta^*)]^l \quad (C-17)$$

を得る。共分散行列のノルムによって演算誤差を評価することにすれば、光検出器における雑音によって生じる演算誤差  $\varepsilon_s$  は、次式のように見積られる。

$$\varepsilon_s \sim \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{1-(1+\|\Delta\|)\cdot\|E-A\|}} \quad (C-18)$$

以上を纏めると、図7-2の光学系によって(7-2)式を計算したときに生ずる演算誤差  $\varepsilon$  は、系統的な演算誤差とストカスティックな演算誤差との線形和として、

$$\begin{aligned} \varepsilon \sim & \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{1-(1+\|\Delta\|)\cdot\|E-A\|}} + \|\tilde{A}^{-1}\Delta(E-\tilde{A})\| \\ & + \frac{\|\tilde{A}^{-1}(G_s-E)\mathbf{c}\|}{\|\tilde{A}^{-1}\mathbf{c}\|} \end{aligned} \quad (C-19)$$

と見積られる。

#### 参 考 文 献

- [1] J.W.Goodman; "Statistical Optics," (Wiley Interscience, New York, 1985), Chap.7, pp.347-356.
- [2] J.W.Goodman and M.S.Song; "Performance Limitations of an Analog Method for Solving Simultaneous Linear Equations," Appl. Opt., Vol.21, No.3, pp.502-506 (1982).

## 謝 辞

本研究を進めるにあたって、当初より適切な御指導・御鞭撻を頂き、また、公私共に大変御世話になりました保立和夫講師に深く謝意を表します。光波のランダム干渉理論に関して有益な御助言を賜りました本学境界領域研究施設の伊藤紘二助教授にも感謝致します。

また、実験の遂行ならびに検討にあたり、常に暖かく御協力・御助言下さいました保立研究室に在籍中の皆様ならびに卒業生の皆様に感謝致します。

## 本研究に関連する発表文献

### 1. 学会誌掲載論文

- [1-1] H.Nakano and K.Hotate; "Optical System for Real-Time Processing of Multiple Matrix Product," Electron.Lett., Vol.21, No.10, pp.435-436 (1985).
- [1-2] H.Nakano and K.Hotate; "Real-time Processing of the Multiple Matrix Product Using an Incoherent Optical System," Appl.Opt., Vol.24, No.23, pp.4238-4246 (1985).
- [1-3] H.Nakano and K.Hotate; "Operational Error in the Optical Real-Time Multiple Matrix Multiplier and Its Compensation," Appl.Opt., Vol.25, No.18, pp.3132-3136 (1986).
- [1-4] H.Nakano and K.Hotate; "Optical System for Real-Time Multiplication of the Multiple Matrix with a 2-D Light Source Array," Appl.Opt.(投稿中) .

### 2. 口頭発表

#### (2-1) 国際会議

- [2-1-1] H.Nakano and K.Hotate; "Digital Encoding for Incoherent Optical Matrix-Matrix Multiplier," Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO'86), June 9-13, 1986, San Francisco, U.S.A., Paper No. FK-5.

[2-1-2] H.Nakano and K.Hotate; "Limit of Parallelism and Operational Speed in the Optical System for Real-Time Matrix-Matrix Multiplication," First Optoelectronics Conference OEC'86, July 29-31, 1986, Tokyo, Japan, Paper No. C7-2.

(2-2) 国内研究会・シンポジウム

- [2-2-1] 中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算用光学系」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE84-122 (1985. 3).
- [2-2-2] 中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算用光学系Ⅱ — 演算誤差とその補償法 —」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE85-148 (1986. 2).
- [2-2-3] 中野・保立、「実時間行列乗算用光学系における並列性と演算速度の限界」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE85-165 (1986. 3).
- [2-2-4] 中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算用光学系Ⅲ — 光源アレイの2次元化による演算機能の拡張 —」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE86- 23 (1986. 5).
- [2-2-5] 中野・保立、「2次元光源アレイを有する実時間行列乗算用光学系」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE86-112 (1986.10).
- [2-2-6] 中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算用光学系Ⅳ — デジタルコーディング手法の導入 —」、電子通信学会光・量子エレクトロニクス研究会、OQE86-129 (1986.11).
- [2-2-7] 中野・保立、「実時間多段行列演算用光学系」、第18回光コンピュータ研究会 (1987. 2).
- [2-2-8] 中野・保立、「光行列演算システム」、昭和62年春季第34回応用物理学関係連合講演会 (1987. 3).



### (2-3) 国内大会

- [2-3-1] 中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算のための光学系」、昭和59年度電子通信学会光・電波部門全国大会、511(1984.10).
- [2-3-2] 中野・保立、「実時間多段マトリクス乗算のための光学系Ⅱ — 方式の改善と基礎実験 —」、昭和60年度電子通信学会総合全国大会、1033 (1985. 3).
- [2-3-3] 中野・保立、「実時間行列乗算用光学系」、昭和60年秋季第46回応用物理学会学術講演会、4a-H-2 (1985.10).
- [2-3-4] 中野・保立、「実時間マトリクス乗算用光学系 — デジタル演算の導入 —」、昭和61年度電子通信学会総合全国大会、870 (1986. 3).
- [2-3-5] 中野・保立、「実時間行列乗算用光学系Ⅱ」、昭和61年春季第33回応用物理学関係連合講演会、2a-F-8 (1986. 4).
- [2-3-6] 中野・保立、「フィードバックループを有する実時間行列演算用光学系」、昭和61年度電子通信学会光・電波部門全国大会、441 (1986. 9).
- [2-3-7] 中野・保立、「実時間行列乗算用光学系Ⅲ」、昭和61年秋季第47回応用物理学会学術講演会、27p-ZE-6 (1986. 9).

### 3. その他

- [3-1] 中野・保立、「実時間行列乗算用光学系」、オプトニュース、Vol.30, pp.28-29 (光産業技術振興協会、昭和61年, No.2) .