



157

学位請求論文

可変構造系による制御系設計

指導教官

原島 文雄 教授

東京大学大学院
工学系研究科
電気工学専門課程
工 9663

橋本 秀紀

題目 [可変構造系による制御系設計]

目次

<u>第1章</u> はじめに	研究概要	1
	研究の意義	2
	研究方法	3
	各章の構成	3
<u>第2章</u> 可変構造系の理論		
2-1.	可変構造系の歴史的概観	6
2-2.	可変構造系の特徴	7
2-3.	2次系の可変構造系	9
2-4.	Sliding Mode の導入	11
2-5.	1入力系の Sliding Mode	11
2-6.	2次系の Sliding Mode	12
2-6-1.	外乱が存在しない場合	12
2-6-2.	外乱が存在する場合	16
2-7.	n次系の Sliding Mode	19
2-7-1.	外乱が存在しない場合	20
2-7-2.	外乱が存在する場合	24
2-8.	理想 Sliding Mode と現実の Sliding Mode	25
<u>第3章</u> 位置サーボ系への適用		
3-1.	はじめに	46
3-2.	位置サーボ系の制御系設計	46
3-3.	実験装置	50
3-4.	システム定数	51
3-5.	Sliding Mode による制御	52
3-6.	可変 Sliding Line	54
3-7.	全領域 Sliding Mode	54
3-8.	おわりに	59
<u>第4章</u> ロボットアームへの適用		
4-1.	はじめに	74

4-2. ロボットアームの制御	74
4-3. 可変構造系の適用	79
4-4. 実験システム	83
4-5. PTP動作に対する設計	84
4-6. CP動作に対する設計	90
4-7. おわりに	96

第5章 ON-OFF Patternの生成

5-1. はじめに	118
5-2. 可変構造系によるON-OFFパターンの生成	118
5-3. 位置サーボ系への適用	118
5-3-1. 従来の可変構造系	118
5-3-2. ON-OFFパターンに着目した可変構造系	119
5-3-3. スイッチング周波数規定要因	119
5-4. 切り換え面の構成	125
5-5. Sliding Mode存在領域	127
5-6. ARMAモデルによる予測	127
5-7. おわりに	129

第6章 ブラシレスサーボモータへの適用

6-1. はじめに	174
6-2. 可変構造系の適用	174
6-3. 制御対象	174
6-4. 制御系設計	175
6-5. マッピングの妥当性	182
6-6. 入力飽和における検討	182
6-7. シミュレーション結果	186
6-8. おわりに	187

第7章 可変構造系を用いた学習制御系の構成

7-1. はじめに	197
7-2. 学習制御系	197
7-2-1. 反復制御	198
7-2-2. 繰り返し制御	200
7-3. 可変構造系を用いた学習制御	201

7-4. 実験および結果	205
7-4-1. 実験システム	205
7-4-2. 制御系の設計	206
7-4-3. 実験結果	209
7-5. おわりに	210

第8章 可変構造系の多入力系への適用

8-1. はじめに	221
8-2. 多入力系 VSS の記述	221
8-2-1. 制御系	221
8-2-2. 多入力系の Sliding Mode (滑り状態)	226
8-2-3. Sliding Mode 存在条件	228
8-3. 多入力系 Sliding Mode の特徴	229
8-3-1. 多入力系 Sliding Mode の分類	229
8-3-2. 等価制御入力法による連続化	231
8-4. VSS の設計 I (未知ダイナミックスの処理)	234
8-4-1. 制御系	234
8-4-2. 既知ダイナミックスに対する安定性	235
8-4-3. 未知ダイナミックスに対する Sliding Mode	237
8-4-4. Practical 安定	236
8-5. VSS の設計 II	241
8-5-1. 設計の手順	241
8-5-2. 多入力系 VSS の設計	243
8-5-3. 例題	246
8-6. 線形系 VSS の性質	250
8-6-1. 出力零化	250
8-6-2. 線形作要素としての VSS	251
8-6-3. ロバスト性	253
8-7. おわりに	255

<u>第9章 おわりに</u>	269
-----------------	-----

<u>謝辞</u>	272
-----------	-----

<u>発表論文リスト</u>	273
----------------	-----

第1章 はじめに

研究概要

可変構造系の有するロバスト性に着目して、ロボットアームに代表される Motion Control に適用した。同時に、現実系の実験を通して、理論及び設計法の再構築を行っている。

(I) 修士課程においては、自由度が一つである位置サーボ系(D.C.サーボモータ)を対象として研究を進めた。制御系のパラメータ変動および外乱に対して不感な、またプラントモデルのミスマッチングにロバストな制御系を構成した。ここでは、Sliding Mode 領域を広げる可変 Sliding Line を提案し、さらにロバスト性が完全に保証される全領域型 Sliding Mode を提案し良好な結果を得ている。

(II) 修士課程における研究はロボットアームに代表される Motion Control を展望しており、博士課程では二自由度垂直多関節型ロボットアームに可変構造系を適用した。ここでは、多入力系の問題を取り扱い、従来の階層型 Sliding Mode に対して分散型 Sliding Mode を提案し実験により有効性を確認している。また、等価制御入力による前向き非線形補償の利用、時変切り換え面、連続関数の導入、積分モードの導入等の手法を提案した。理論面では、多入力系での安定性の条件の導出等を行った。

同時に、パワースイッチングデバイスの ON-OFF を直接可変構造により制御することを行っている。制御対象は D.C.サーボモータとブラシレスサーボモータで、シミュレーションによりその効果を確認している。

また、学習制御の考え方をを用いて、試行を繰り返すことによって Chattering を減少させる可変構造系を提案し実験によって有効性を確認している。

現在まで進めてきた研究のキーワードを表1-1に示す。

可変構造系の研究は、既に完成しているとみなされていたが、実対象による実験を通して以下の問題点が明らかになった。

①多入力系への適用： 可変構造系が体系だった1950年代には、多入力システムが研究対象となることは希であった。現代制御理論が完成したあとの1970年代にはいり研究が始まる。しかし、本当に位置付られたのは、ロボットアームへの適用が始まったここ数年のことである。

②観測できる状態量と可変構造系の関係、即ち、可観測性・可制御性等の導入による設計法の完備： オブザーバ・カルマンフィルタ等の進んだ信号処理(制御)をどの様に用いるか、Synthesis の立場からは大きな問題である。

◎可変構造系の一つである滑り状態(Sliding Mode) そのものの研究： 制御系における有効性は実験により確認されたが、厳密な解析はまだである。カオス等の非線形現象として興味が持たれる。

本論文では、上記①の問題点に関して答えている。②③は今後の課題である。

研究の意義

「ロバスト性」に着目したことが第一の意義である。研究着手の頃、「ロバスト性」は「内部モデル原理」と同義として使われていたが、現在では種種の曖昧さに対する許容を指す。当初から後者の意味に於て「ロバスト性」を正當に位置付け研究を進めてきた。ちなみに、次の制御系研究の流れは「知能化」である。

第二に、古くから知られていた理論を現実系に適用したことにある。マイクロ及びパワーエレクトロニクスの進歩があって出来たことであるが、この時期に可変構造系を実システムに適用したことは研究の意義として位置付けられる。このように理論だけ知られているということは制御系では多々あり、実験を通して理論として完成されていく。今の制御研究の多くがこの方向である（例えば、2自由度制御系など）。

第三に、Sliding Mode そのものの持つ有効性が挙げられる。通常の制御理論では、chattering として良くないとされていた現象であるが、プラントの積分特性に注目することによって優れた特性を示すことを実証した。ある状況では悪いと考えられていたものが、状況如何では良くなるということは現在では多い。

最後に、可変構造系の持つ可能性が挙げられる。サブシステムの集合から、あるロジックによって制御系を構成する考え方は従来の制御手法には見られない。これは、大きな非線形性を持つプラントあるいはタスクプランニング等の設計にとって強力な道具に成り得る。

研究方法

実験を中心に置き、その結果を理論面に反映させ設計法を完備していった。実験と理論の両輪が現在の制御研究では必要であるとの認識に基づいてである。

特に、解析よりは Synthesis の立場から研究を進める。

各章の構成

本論文は全体で9章からなる。以下に各章の内容を簡単に記す。

第1章：はじめに

本研究の位置付けを示す。特に、新しい点と研究の意義を明らかにする。

第2章：可変構造系の理論

本研究の中心課題である可変構造系の基礎理論を、1入力系 Sliding Mode を中心に示す。可変構造系の制御研究における位置付けから説き起こし、基礎となる概念（離散的なサブシステムの集合から連続的な制御目的を達成する）を示す。続いて、最も簡単な可変構造系を示し、本研究で用いる Sliding Mode（滑り状態）を導出する。1入力2次系の設計問題を Sliding Mode 存在条件・到達条件として定式化し、さらに1入力 n 次系まで拡張する。そのなかで、外乱抑制およびロバスト性の問題を議論している。この章は、本論文全体を通じての基礎部分であり、著者独自の観点からまとめられている。

第3章：位置サーボ系への適用

1入力系 Sliding Mode の Motion Control への最初の適用であり、1自由度位置サーボ系（D.C.サーボモータ）へ適用し実験を行い Sliding Mode のロバスト性を確認した。実システムへ適用した研究としては世界で最も早い部類にはいる。本章では、Sliding Mode 適用の方針を明らかにしている。更に、ロバスト性を確保するために、可変 Sliding Line、全領域 Sliding Mode を提案し実験を通してその効果を確認している。

第4章：ロボットアームへの適用

1自由度位置サーボ系での研究成果を基に、Motion Control の中心に位置するロボットアームへの応用を行っている。この応用の際、最大の問題となるのは多入力系 Sliding Mode の取扱である。本章では、従来提案されていた階層型 Sliding Mode ではなく実用性が高い分散型 Sliding Mode を提案し、実際に製作した2自由度直多関節型ロボットアームを用いてその有効性を確認している。さらに、前向き非線形補償、連続関数の導入、積分モードの設定等を提案し現実的な制御系の構築を行っている。なお、Sliding Mode をロボットへ応用する研究は次第に多くなっているが、実システムに対して実験を行った報告はない。

第5章：ON-OFFパターンの生成

可変構造系の特徴である「離散化された入力」に着目し、パワースイッチングデバイスを直接 ON OFF することによって D.C. サーボモータを駆動している。直接 ON OFF して有効な制御を得るためには、制御対象によって決まる自動発振

周波数を引き上げる必要がある。本章では、電機子電流を状態量として取り込み 3 次系の Sliding Mode を実現し ON OFF 周波数を引き上げることを行っている。また、サンプリング遅れに対しては予測型のアルゴリズムを導入し実システムへの対処法を与えている。有効性はシミュレーションによって確かめられている。

第 6 章：ブラシレスサーボモータへの適用

電圧型インバータの「空間ベクトル」を可変構造系における「離散化された入力」として位置付け、可変構造系のみを用いてブラシレスサーボモータの位置決め制御を行っている。「空間ベクトル」を選ぶロジックとしては、「Sliding Mode 存在条件を満足する範囲で指令値に最も近い（ノルム最小）ものを選ぶ」を提案している。その結果、従来のアナログ PWM アンプを廃し簡単な構成でなおかつロバスト性を有する制御系が得られ、シミュレーションによって有効性を確認している。

第 7 章：可変構造系を用いた学習制御系の構成

学習制御系に可変構造系を導入し、試行を繰り返す毎に Chattering が減少する Sliding Mode 制御系を構成している。これは、Sliding Mode 時の制御入力が低周波成分に相当する等価制御入力と Chattering に相当する高周波成分とに分かれることに着目している。この事実から、試行を繰り返すことによって高周波成分を落とし低周波成分のみにする学習機能を実現している。また、1 自由度の位置サーボ系の実験を通して、この学習系が有効に働くことを確認している。

第 8 章：可変構造系の多入力系への適用

現在のところ理論的課題として残されている多入力系 Sliding Mode の設計に関して検討を行っている。リアブノフ流の安定論に沿って、多入力系 Sliding Mode の定義を明らかにし、存在条件に関する定理を導出している。制御入力の不連続性の問題、制御系のロバスト性の問題等を取り扱い設計法を導出している。最後に、多入力系の設計指針を与えシミュレーションで確認している。

第 9 章：おわりに

本研究のまとめと、今後の課題を明らかにしている。

可変構造系 (Variable Structure System)

- ◆ ロバストな制御系を構成できる
 - ・ Sliding Mode (滑り状態)
- ◆ 従来とは異なった制御系の可能性
 - ・ 非線形プラントの処理
 - ・ タスクプランニング等

M o t i o n C o n t r o l

一自由度位置サーボ系

- ・ 可変構造系の直接的適用
- ・ 可変 Sliding Line
- ・ 全領域 Sliding Mode … Sliding Curve

ロボットアーム (二自由度位置サーボ系)

- ・ 分散型 Sliding Mode
- ・ 非線形補償
- ・ 連続関数の導入
- ・ 積分モードの導入

P W M - P a t t e r n の発生

- ・ 電機子電流を用いた切り替え面
- ・ 電流ループへの適用
- ・ 同期電動機への適用

◆ 学習型可変構造制御系

可変構造系の理論面

- ◆ 多入力系の問題
- ◆ 設計論の完備 * 現代的な設計
 - * センサー・アクチュエータ等の選定

第2章 可変構造系の理論

可変構造系の基本的な理論を1入力系 *Sliding Mode* を中心に以下に示す。
Motion Control への適用及び設計法は各章で述べる。

2-1. 可変構造系の歴史的概観

本論文の中心課題となる可変構造系の歴史を概観する(図2-1参照)。

現在、制御理論として体系付けられている学問分野の源流は良く知られているようにワットの調速器に求められる。もちろん、これは「フィードバック制御理論」に限った場合であり、制御理論を構成する源流としては「ウィナーの予測理論」に始まる予測および統計的・確率的な扱い、そして実現問題を扱う「回路網構成論」が考えられる。本来、制御理論はこの3つの部分から構成されるのだが可変構造系の理論は確定系のフィードバック制御に限定されている。統計的・確率的な取扱いそして実現の課題は現在行われているか或は今後の問題である。

「フィードバック制御理論」はフィードバックによる制御系の安定化に関する理論である。数学としては既に1880年頃からポアンカレによって始められた常微分方程式の大域論に源流を求めることができる。この大域論の研究がワットの調速器の安定問題を取り扱う中で、1930年代に入り線形フィードバック理論として体系付けられる。もちろん一入力系の話であり、現在古典論として知られているものである。一方、制御器の構成が簡単であるという点からリレーを制御器として用いることが進められた。研究の初期の段階ではバイブレーション制御 (*Vibrational Control*) として広く研究された。これは、最も厳しい非線形要素であるリレーを持つ非線形制御の最初の研究である。このようにして、線形制御と非線形制御の二つの制御研究での流れが生じ、両者は互いに独自の歩み始める。

線形制御は、1960年代に入りそれまでの伝達関数表現から状態変数に注目した状態空間内での表現へと移り変わってきた。状態空間法の登場である。入出力のみに注目していた設計からシステムの内部状態まで考慮したのは全く革命的な進歩である。この流れは現代制御理論として1970年代には完成する。

一方、非線形制御は実現が容易ということでリレー系が研究されていた。しかし、1960年代に入ると、「最大原理」に基づく最適制御理論が確立し、その実現手法がバンバン制御になることからリレー系が研究の中心に位置した。このときのリレー系は実現が容易という理由ではなく、「最大原理」が凸閉多面体の頂

点を順次選んでいくので必然的にリレー系にならざるを得なかったという理由からである。

可変構造系は制御の実現手段が「離散化された入力」によるものであり、リレーを用いた制御系は可変構造系に包含される。制御入力切り換えのロジックが「最大原理」であれば、やはり可変構造系としての定式化が可能である。特に、最適軌道での切り換え時によく生じる *Chattering* を独立した新しい現象 *Sliding Mode* として捉え、線形化の一つの手法として定式化する研究がソビエトで生まれた。この *Sliding Mode* が可変構造系研究の中心的な流れになり主にソビエトで理論研究が続けられてきている。

この間、制御理論は現代制御理論として益々発展していき、1960,1970年代は現代制御理論中心の時代で、非線形系は次第に色あせてきた。確かに、数学的に著しく高められた現代制御理論は大学での研究対象としては魅力的であったが、生産の現場では使えない理論として位置付けられていた。

しかし、1980年代に入ると、産業界から使える制御理論の要望が強くなり、またマイクロ及びパワーエレクトロニクスの異隆に伴い複雑なアルゴリズムの実現が可能となった。このような背景のもとで、適応制御等が再び注目（最初は1960年代）されるようになった。可変構造系に立脚した *Sliding Mode* も実際に使える制御系として再び注目を浴び、実対象に適用した研究が始められた。この流れは現在に到っており、実証研究が盛んになりつつある。

2-2. 可変構造系の特徴

可変構造系を概念的に示すと図2-2となる。最下段に構造が異なるサブシステムが複数個存在している。ここでの「構造」とは、同一要素から構成されている各サブシステムに於ける結線の状態を指す。例えば、制御器の積分器が結線され有効に働く場合と結線がはずれ積分器が働かない場合を異なる構造とする（図2-3）。可変構造系とは、構造のみが異なるサブシステムの集合からサブシステムの時系列を作り目標を達成する系をいう。動特性的に考えると、各サブシステムが表す微分方程式の解軌道を順次接続して行くことと等価である（図2-4）。このサブシステムを選ぶのがスイッチングロジックの部分である。可変構造系は目標・スイッチングロジック・サブシステムから成る階層構造の形式を持つ。この可変構造は広い概念であり、また多くの応用が考えられる。制御系設計のみでなく、システムのフォルトトランス或はロボットにおけるタスクプランニング等への応用が考えられる。

制御における可変構造系は、離散的なサブシステムの集合から連続的な制御目標を達成する点に特徴がある。これから、可変構造系が従来の制御系と異なった大きな可能性を持つことがわかる。例えば、各構造（各サブシステム）が持つ良い性質だけを取り出して制御系を構成することができる。更に、各構造を組み合わせることによって各構造のみでは実現できない全く新しい性質を持たせることもできる。後で導入する *Sliding Mode* は、後者の典型例である。

・制御における可変構造系の利用

可変構造系は線形制御系と比較することによって、その特徴が明らかになる。最初に最も簡単な例としてPI-制御系を考える。制御入力 u は

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt \quad (2-1)$$

と表される。よく知られているように積分器を使用するとステップ状目標値に対して定常誤差を打ち消すことが出来る。しかし、積分定数 K_i が大きい場合望ましくないオーバーシュートが生じる。そこで比例制御器を導入すると動特性は改善される。しかし、 K_p, K_i は設計者が妥協的に設定せねばならない。

これに対して、可変構造系では

$$u(t) = \begin{cases} K_p e(t) & \text{for } |e(t)| \geq \varepsilon \\ K_i \int_{t_e}^t e(t) dt & \text{for } |e(t)| < \varepsilon \end{cases} \quad (2-2)$$

(ただし、 $|e(t_e)| = \varepsilon$ である)

と制御則を切り換えることで、動特性・定常特性とも改善できる（図2-5）（注意1）。

このことを一般化する。制御対象は非線形時変系でも取り扱えるが、線形フィードバック系との比較を行うため、次の線形時不変な系を考える。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x \in R^n, u \in R^m \quad (2-3)$$

線形状態フィードバックは、

$$u = Kx \quad (2-4)$$

で与えられる。可制御、可観測であれば、この係数行列 K を選ぶことによって閉ループの極を任意に配置できる。通常は、評価関数を設定して LQ 問題としてフィードバック係数行列 K を一意に定める。これに対して、可変構造系ではフィードバック係数行列 K の各成分 k_{ij} が、制御対象の状態 x から構成される行列関数 $s(x)$ ($s(x)^t \in F$) に従い次のように切り換わる。

$$k_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & s_{ij}(x) > 0 \\ \beta_{ij} & s_{ij}(x) < 0 \end{cases} \quad (\alpha \neq \beta)$$

$s = [s_{ij}] : s_{ij}(x)$ は状態 x の関数
($i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$)

(2-5)

これから mn 個の関数 $s_{ij}(x)$ に対して、フィードバック係数行列 $K = [k_{ij}]$ は各々 2 つの値を取るの、合計 2^{mn} 通りの係数行列が存在する。ひとつの K に対応する制御系を可変構造系理論では「構造 (Structure)」という。ここでの「構造」の意味は、制御系を構成している要素 (Component) は同じだが、その結合が異なるものを指す。

(注意 1) 可変構造系は制御対象の状態によって制御則を切り換える点で、プログラマブルな制御と異なる。

2-3. 2次系の可変構造系

可変構造系の特徴を 2 次の制御系の場合に関して示す。以下の 2 つの例に示すシステムは、通常の線形フィードバックによっては漸近安定化できない。しかし、可変構造系を用いると構造を切り換えて漸近安定なシステムを実現できる。

(例 1) 安定な 2 つの構造を持つ可変構造系：

次の微分方程式で記述される系を考える。

$$\ddot{x} = -\psi x \tag{2-6}$$

これは、積分器 2 つから成る制御対象に (位置) フィードバックループが施されたものである (図 2-6)。 ψ が如何なる値を取ろうとも、この系にはダンピングがないので原点に収束することはない。即ちリアプノフの意味での安定ではない。

このとき、 ψ を

$$\psi = \begin{cases} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \end{cases} \quad (\alpha_1^2 > \alpha_2^2) \quad (2-7)$$

と定めることにより、位相面軌跡は図2-7(a)(b)に示す安定な2つの構造を持つ。ここで次の切り換え則

$$\psi = \begin{cases} \alpha_1^2 & \text{if } x\dot{x} \geq 0 \\ \alpha_2^2 & \text{if } x\dot{x} < 0 \end{cases} \quad (2-8)$$

を導入すれば、2つの安定な構造から漸近安定(図2-7(c))な系を得られる。即ち、フィードバック係数 ψ が断続量を取ることによって新しい性質(漸近安定性)が付与される。これは、可変構造系の大きな特徴である。■

(例2) 不安定な2つの構造を持つ可変構造系:

次に、不安定な2つの構造から漸近安定な系を構成することを考える。制御系は、

$$\ddot{x} - \xi \dot{x} + \psi x = 0 \quad (\xi > 0) \quad (2-9)$$

で表される。ブロック線図は図2-8となる。フィードバック係数 ψ を、

$$\psi = \begin{cases} \alpha \\ -\alpha \end{cases} \quad (\alpha > 0) \quad (2-10)$$

と定めると、図2-9(a)(b)の不安定な2つの構造を持つ。但し、図2-9(b)で閉ループ系の固有ベクトルに沿うときは、状態 (x, \dot{x}) が原点へ収束する。この固有ベクトルの傾き入に注目して切り換え則を、

$$\psi = \begin{cases} \alpha & \text{if } xs > 0 \\ -\alpha & \text{if } xs \leq 0 \end{cases}$$

$$s = cx + \dot{x}$$

$$c = -\lambda = -\frac{\xi}{2} + \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \alpha} \quad (2-11)$$

と選べば、図 2-9(c)に示す漸近安定なシステムが得られる。■

2-4. Sliding Mode の導入

先の例 2 では、制御対象の状態が固有ベクトルに沿う。しかし、このままでは系のパラメータ ξ 或はフィードバック係数 α が変化すると動特性が変わる。例えば、 ξ が何等かの原因で ξ' ($\xi' \neq \xi$) になり、変動後の固有ベクトルの傾き $c' = -\xi'/2 + \sqrt{\xi'^2/4 + \alpha}$ が $c > c'$ になったとする。この結果、切り換えは以前の傾きである c を用いるので、制御対象の挙動は図 2-10(a)から(b)へと変化する。パラメータ変動に対して敏感な系になっている。

ここで、パラメータ変動に対して不感な系を構成するために、切り換え線 $s=0$ の傾き c を固有ベクトルの傾き $-\lambda$ の内側にとる。位相面軌跡は図 2-11 となり、制御対象は位相面軌跡に沿い I の領域から $s=0$ へ到達する。II の領域へ入ると I の領域へ押し戻され、 $s=0$ の直線上で小さな振動を繰り返して原点へと向かう。この現象を *Sliding Mode* という。 $s=0$ は $\psi=\alpha, \psi=-\alpha$ のどちらの場合の軌跡にも属さず、全く新しい軌跡と考えられる。

Sliding Mode は、可変構造系を構成する各構造に対する運動軌跡が一つの超平面 (n 次元空間の $(n-1)$ 次元部分空間) に集中する現象である (図 2-12)。2次系では位相面内の直線あるいは曲線に集中する。

Sliding Mode の特徴は、状態ベクトルが超平面に拘束されるため、制御対象の運動方程式が超平面の方程式に取って代わられることにある。先の2次系の場合であれば、制御対象の挙動は、切り換え線 $s = \dot{x} + cx = 0$ によって決められるので、 $x = x_0 e^{-ct}$ (x_0 は切り替え線 $s=0$ に到達したときの値) となる。即ち、パラメータ ξ, α と無関係になり、切り換え線の傾き c にだけ依存する。このことから、*Sliding Mode* を用いると、制御対象のパラメータ変動・非線形性・雑音などに対して不感で、ロバストな制御系を構成できることが分かる。

2-5. 1入力系の Sliding Mode

1入力系の *Sliding Mode* 制御系の設計は、第一に希望する動特性を制御系に与える超平面を設定すること。第二に、その超平面の近傍で *Sliding Mode*

が生じる条件（存在条件）を求めること。最後に、制御対象が任意の初期値から超平面に到達する条件（到達条件）を求めることである。そして以上の条件を満足するように、コントローラの各ゲインを定めればよい。

例えば、3次のシステムにおいては、超平面は2次元になるので、図2-13に示すように、原点を含み安定な平面を設定する。通常、原点を平衡点とし、超平面が *Hurwitz* 多項式になるように定める。第二の存在条件は、超平面 $s=0$ の近傍で *Sliding Mode* が生じる条件で、これが満たされると制御対象は $s=0$ の超平面に拘束される。超平面は *Hurwitz* 多項式になっているので、この上では制御対象は原点へと収束する。第三の到達条件は、初期値が状態空間内の任意の点（例えば、A点あるいはB点）でも超平面に近付くための条件である。上記の設計を2次のシステムの場合と、一般の n 次のシステムの場合に分けて記す。

2-6. 2次系の *Sliding Mode*

2次系の *Sliding Mode* 制御系の設計は、幾何学的視察から容易に導くことができる。超平面はこの場合、直線あるいは曲線で、これから切り換え線と呼ぶ。曲線を扱うと超曲面の問題になり安定性の議論が複雑になるので、ここでは直線のみを扱う。

Hurwitz 多項式となる切り換え線は、

$$s=cx+\dot{x} \quad (c>0) \quad (2-12)$$

である。

2-6-1. 外乱が存在しない場合

2次系のシステムを

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 - a_1 x_1 + bu \quad (b>0) \end{aligned} \quad (2-13)$$

制御入力を

$$u = -\psi_1 x_1 \quad (2-14)$$

と設定し（注意1）、フィードバック係数 ψ_1 が

$$\psi_1 = \begin{cases} \alpha_1 & \text{if } sx_1 > 0 \\ \beta_1 & \text{if } sx_1 < 0 \end{cases} \quad (2-15)$$

と切り換わるとする。(2-15)が等号を含まないのは、 $s=0$ では *Sliding Mode* を定義できないからである。即ち、制御入力 u は $s=0$ で第一種の不連続点を取ることになる。しかし、区分連続であるからそれほど気にする必要はない。詳しくは、第8章を参考されたい。

[*Sliding Mode* 存在条件]

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \dot{s} < 0 \quad (2-16)$$

であれば、切り換え線 $s=0$ の近傍で *Sliding Mode* が存在する。■

[証明] 文献[7]にある。

この条件（十分条件）を用いて制御系設計を行う。(2-12)~(2-15)から

$$\begin{aligned} s \dot{s} &= s(\dot{x}_2 + c \dot{x}_1) \\ &= (c - a_2) s^2 - (b \psi_1 + a_1 + c(c - a_2)) s x_1 \end{aligned} \quad (2-17)$$

を得る。(2-16)の存在条件を満足するには、(2-17)の s^2 , $s x_1$ の項に注目し、

$$(c - a_2) \leq 0 \quad (\text{注意 2}) \quad (2-18)$$

$$\begin{cases} b \alpha_1 + a_1 + c(c - a_2) > 0 & \text{if } sx_1 > 0 \\ b \beta_1 + a_1 + c(c - a_2) < 0 & \text{if } sx_1 \leq 0 \end{cases} \quad (2-19)$$

として α_1 , β_1 を定める。

また、(2-13)のシステムで、パラメータ a_1 , a_2 , b が時変あるいは測定誤差を伴う場合、真の値からのずれを

$$\begin{aligned}
a_{1min} &\leq a_1 \leq a_{1max} \\
a_{2min} &\leq a_2 \leq a_{2max} \\
0 < b_{min} &\leq b \leq b_{max}
\end{aligned}
\tag{2-20}$$

と限定できれば、(2-18)(2-19)は

$$\begin{aligned}
c &\leq a_{2min} \\
\alpha_1 &\geq \max_{a_1, a_2, b} \frac{1}{b}(ca_2 - c^2 - a_1) \\
\beta_1 &\geq \min_{a_1, a_2, b} \frac{1}{b}(ca_2 - c^2 - a_1)
\end{aligned}
\tag{2-21}$$

とすることにより、やはり(2-16)の存在条件を満足する。パラメータ変動・非線形性・雑音等に対してロバストに出来る。

[Sliding Mode 到達条件]

(2-13)(2-14)のシステムで、任意の初期値を持つ制御対象が切り換え線に到達する必要十分条件は、 $\psi_1 = \alpha_1$ の時の特性方程式

$$p^2 + a_2 p + (a_1 + b \alpha_1) = 0 \tag{2-22}$$

が、0 および正の実数解を持たないことである。■

[証明] 文献[6]にある。

この到達条件は図2-14から理解できる。斜線部分($\psi_1 = \alpha_1$ になる領域)の任意の点にある状態Pが、二重に斜線を施した部分に動くか留まり続ける可能性があるのは、0 または正の実数解を持つときに限られる。従って、それ以外のときは、切り換え線 $s=0$ に必ず到達する(注意3)。 $\psi_1 = \beta_1$ の領域でも同様のことが言える。

さらに、(2-20)の条件を考慮すると、(2-22)に代わり

$$p^2 + a_{2min} p + a_{1min} + \min_t [b(t) \alpha_1] = 0 \tag{2-23}$$

が、0 および正の実数解を持たないことになる。これは、最小のコントローラ

ゲインとダンピング定数の場合を考えて得られる。

コントローラゲイン b を大きくすると、 $\alpha_1 > 0$ のとき、

$$D = \alpha_2^2 - 4(\alpha_1 + b\alpha_1) < 0 \quad (2-24)$$

となり、複素解になるので到達条件を必ず満足する。また、 b が十分大きければ、(2-19)より存在条件は $\alpha_1 > 0$ 、 $\beta_1 < 0$ で満足される。切り換え線が Hurwitz 多項式なので、 b が大きくとも *Sliding Mode* が生じている限り漸近安定なシステムとなる。 b によるハイゲインの効果と共に、制御対象が *Sliding Mode* 領域に到達する時間を短く出来るので、ロバストな部分が増大して制御効果がある。しかし、現実系では切り換え速度に上限があり、また切り換え自体に遅れ、ヒステリシス等があるため、 b を大きくすることは $s=0$ からのずれを増大させる。このことは、2-8. で述べる。

最後に、通常の設計では *Sliding Mode* 存在条件を満たしたうえで、到達条件を考えるので次のことが言える。

(2-13)(2-14)のシステムで、(2-19)が満たされ、*Sliding Mode* が存在するならば、(2-18)が切り換え線に到達する十分条件となる。

従って、2次系の *Sliding Mode* 設計は (2-18) (2-19) を同時に満足するように行えばよい。これに関して、*Sliding Mode* 存在条件と到達条件を同時に満たす有効な定理を示す。

[*Sliding Mode* の条件]

次の条件

$$s\dot{s} \leq -\eta |s| \quad (\eta > 0) \quad (2-25)$$

を満たす正数 η が存在すれば *Sliding Mode* 存在条件と到達条件を満足する。

■

[証明] 文献[4]にある。

この条件は、切り換え線に有限時間で到達して *Sliding Mode* が生じる条件である。連続系での指数安定とは本質的に異なり可変構造系特有のものである。

(注意1) この制御入力 x_1 しかフィードバックしていないが、もちろん、 x_2 をフィードバックしてもよい。制御入力の形式は、

$$u = -\psi_1 x_1 - \psi_2 x_2$$

$$\psi_1 = \begin{cases} \alpha_1 & \text{if } sx_1 > 0 \\ \beta_1 & \text{if } sx_1 < 0 \end{cases} \quad \psi_2 = \begin{cases} \alpha_2 & \text{if } sx_2 > 0 \\ \beta_2 & \text{if } sx_2 < 0 \end{cases}$$

となり、

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= s(\dot{x}_2 + c\dot{x}_1) \\ &= -(a_1 + b\psi_1)sx_1 - (a_2 + b\psi_2 - c)sx_2 \end{aligned}$$

から、

$$\begin{cases} a_1 + b\alpha_1 > 0 & \text{if } sx_1 > 0 \\ a_1 + b\beta_1 < 0 & \text{if } sx_1 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + b\alpha_2 - c > 0 & \text{if } sx_2 > 0 \\ a_2 + b\beta_2 - c < 0 & \text{if } sx_2 < 0 \end{cases}$$

であれば、 $s\dot{s} < -\eta$ となる $\eta > 0$ が存在して、*Sliding Mode* 存在条件と到達条件を同時に満足する (*Sliding Mode* の条件 (2-25))。 x_2 もフィードバックする方が条件が緩やかになる。

(注意2) この条件は、 $s \rightarrow 0$ では無視できる。 $|s|$ が大きいとき、到達条件として意味を持つ。

(注意3) 負の実数解のみを持てば、 $s=0$ に到達することは明らかである。また、虚数部があれば、原点を中心に回転して $s=0$ に到達する。

2-6-2. 外乱が存在する場合

外乱 f が加法的に加わるシステム

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 - a_1 x_1 + bu + f \end{aligned} \tag{2-26}$$

に対しては、まず $f=0$ として制御入力 (2-14) が (2-18)(2-19) を満足するように定める。このとき、外乱 f の影響によって、

$$|x_1| < \frac{|f|}{|ca_2 - c^2 - a_1 - b\psi_1|} \tag{2-27}$$

の領域で *Sliding Mode* 存在条件 (2-16) を満足しない。即ち、リミットサイクルが生じるか、ステップ状外乱に対しては定常誤差として

$$x_1 = \frac{f}{a+b\psi_1} \quad (2-28)$$

が生じる。この様なリミットサイクル・定常誤差を取り除くために、次の二つの方法を示す。

(I) ディザ状入力による外乱抑制：

制御入力に状態変数として、外乱 f を加える方法である。新しい制御入力として、

$$u = -\psi_1 x_1 - \psi_f f$$

$$\psi_f = \begin{cases} \alpha_f & \text{if } sf > 0 \\ \beta_f & \text{if } sf < 0 \end{cases} \quad (2-29)$$

を考える。これから、

$$s \dot{s} = (c-a_2)s^2 - (b\psi_1 + a_1 + c(c-a_2))sx_1 + (1-b\psi_f)sf \quad (2-30)$$

を得る。ここで、

$$\begin{cases} \alpha_f \cong \frac{1}{b} \\ \beta_f \cong \frac{1}{b} \end{cases} \quad (2-31)$$

とすれば、外乱 f が存在しても *Sliding Mode* 存在条件 (2-16) は満足される。しかし、この制御則では外乱 f の大きさと符号が正確に、しかもリアルタイムでわからねばならない。現実の制御系では、この制約を次のように緩和する。

$$u = -\psi_1 x_1 - M \text{sign}(s)$$

$$M > \frac{1}{b} \max_t |f(t)| \quad (2-32)$$

このとき、

$$s \dot{s} = (c - a_2)s^2 - (b\psi_1 + a_1 + c(c - a_2))sx_1 + sf - bM|s| \quad (2-33)$$

となり、右辺第3項($sf - bM|s|$)は(2-32)の条件から常に負の値を取る。(2-33)は *Sliding Mode* 存在条件(2-16)を満足する。外乱 f に関する情報は、その絶対値の最大値だけになる。

(II) 局所フィードバック切り換えによる外乱抑制:

図2-15(a)に示すように、プラント(この例では積分器)の前に積分器を置き、フィードバックゲインを切り換えて外乱 f に一致する信号を作る方法である。

この制御系はプラントの入力が $y - f$ であるから、これを $x_2 (= y - f)$ と置くと、

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\psi^y y - \psi x_1 \\ &= -\psi^y (x_2 + f) - \psi x_1 \end{aligned} \quad (2-34)$$

が得られる。この関係を用いて、

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \dot{y} - \dot{f} \\ &= -\psi^y x_2 - \psi x_1 - \psi^y f - \dot{f} \end{aligned} \quad (2-35)$$

を導出する。これから、

$$s \dot{s} = (c - \psi^y)s^2 - (c^2 - c\psi^y + \psi)sx_1 - (\psi^y + \frac{\dot{f}}{f})sf \quad (2-36)$$

を得る。外乱 f に関する情報としては、

$$\left| \frac{\dot{f}}{f} \right| \leq B \quad B = \text{const} \quad (2-37)$$

だけが得られているものとする。このとき、(2-36)の sx_1 , sf に注目して、

$$\psi = \begin{cases} \alpha & \text{if } sx_1 > 0 \\ -\alpha & \text{if } sx_1 < 0 \end{cases} \quad \psi^y = \begin{cases} B & \text{if } sf > 0 \\ -B & \text{if } sf < 0 \end{cases} \quad (2-38)$$

とすると、外乱 f の影響を打ち消すことができる。

(2-38) の α は、 $f(t) \equiv 0$ として *Sliding Mode* 存在条件 (2-16) を満足するものを選ぶ。また、 $|x_2| < f$ の範囲では y と f の符号が一致するので ($y = x_2 + f$ からわかる)、

$$\psi^y = \begin{cases} B & \text{if } sy > 0 \\ -B & \text{if } sy < 0 \end{cases} \quad (2-39)$$

とできる。この様子を図 2-15 (b)(c) に示す。外乱 f により平衡点はずれるが、局所フィードバック切り換えにより制御対象は原点へ収束する。また、外乱に関しては、(2-37) で変化率の上限が押さえられればよい。

2-7. n 次系の *Sliding Mode*

2 次系で考えてきた *Sliding Mode* を n 次系へ一般化する。ここで考える系は、1 入力 n 次系で可制御な

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

とする。切り換え面および制御入力は、

$$\begin{aligned} s &= c^t x & c^t &= (c_1, \dots, c_{n-1}, 1) \\ u &= -\psi^t x & \psi^t &= (\psi_1, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n) \end{aligned} \quad (2-41)$$

である。1 入力 n 次系の *Sliding Mode* を図 2-16 に示す。 c^t を線形作用素と考えると、線形作用素 c^t の *null space* ($c^t x = 0$) にシステムの $(n-1)$ 個の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ (順番は適当に付ける) に対応する固有ベクトルを配し、残りの固有値 λ_n に対応する固有ベクトルが c^t の像 (*image*) に関係する。

Sliding Mode にあるシステムは、 $s=0$ の超平面 (c^t の *null space*) に拘束される。したがって、 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ が安定であるとき、すなわち *null space* が *Hurwitz* 多項式になっていれば、システムは漸近安定になる。一方、残りの固有値 λ_n は c^t の像での挙動を支配するものであるから、これは到達条件に関係する。線形作用素として考える厳密な議論は多入力系を扱う第8章で行う。

以下に、1入力 n 次系の *Sliding Mode* 存在条件と到達条件を示し設計法を述べる。

2-7-1. 外乱が存在しない場合

システムは可制御標準系(2-40)から、

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} & (i=1, \dots, n-1) \\ \dot{x}_n &= -\sum_{i=1}^n a_i x_i + u \end{aligned} \quad (2-42)$$

である。制御入力 u は状態を k 個フィードバック可能だととして (注意1)、

$$u = -\sum_{i=1}^k \psi_i x_i - \delta_0 \text{sign}(s) \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

$$\psi_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{if } sx_i > 0 \\ \beta_i & \text{if } sx_i < 0 \end{cases}$$

$$s = \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (\text{但し、} c_n = 1)$$

$$\delta_0 : \text{制御対象を原点に維持するための小さな正定数} \quad (2-43)$$

とする。

Sliding Mode 存在条件は、超平面が一つであるから、(2-16)と同じになる。多入力系の場合は、超平面が複数存在するので新たに考察が必要になる。第8章で述べる。

[*Sliding Mode* 存在条件]

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \dot{s} < 0 \quad (2-44)$$

であれば、切り換え線 $s=0$ の近傍で *Sliding Mode* が存在する。■
 [証明] 文献[7]にある。

この条件（十分条件）を用いて制御系設計を行う。
Sliding Mode の状態にあるとき、制御対象は $s=0$ に拘束されており、

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} & (i=1, \dots, n-2) \\ \dot{x}_{n-1} &= -\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i \end{aligned} \quad (2-45)$$

と記述される。この表現にはシステム固有のパラメータ a_i が存在せず、制御対象の挙動は c_i だけに依存する。

Sliding Mode 存在条件(2-44)を満足するように、(2-43)の α_i, β_i を設定する。(2-43)の s から

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \sum_{i=1}^k (c_{i-1} - a_i - \psi_i) x_i + \sum_{i=k+1}^n (c_{i-1} - a_i) x_i - \delta_0 \text{sign}(s) \\ & \quad (\text{ただし、} c_0=0, c_n=1) \end{aligned} \quad (2-46)$$

が得られる。ところが、 $x_i (k+1 \leq i \leq n)$ はフィードバックしないので、(2-46)の第2項の係数を正負に切り換えることができない。したがって、 $s \dot{s} < 0$ の保証が得られなくなる。そこで、

$$c_{i-1} - a_i = (c_{n-1} - a_n) c_i \quad (i=k+1, \dots, n) \quad (2-47)$$

の制約条件を導入する。さらに、

$$\sum_{i=k+1}^n c_i x_i = s - \sum_{i=1}^k c_i x_i \quad (2-48)$$

の関係を用いると、(2-46)は、

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^k (c_{i-1} - a_i - c_i(c_{n-1} - a_n) - \psi_i) x_i + (c_{n-1} - a_n) s - \delta_0 \operatorname{sign}(s) \quad (2-49)$$

となる。これから、

$$s \dot{s} = \sum_{i=1}^k (c_{i-1} - a_i - c_i(c_{n-1} - a_n) - \psi_i) s x_i + (c_{n-1} - a_n) s^2 - \delta_0 |s| \quad (2-50)$$

が得られる。*Sliding Mode* 存在条件を満たすには、 s^2 , $s x_i$ の項に注目し、

$$c_{n-1} - a_n \leq 0 \quad (\text{注意 2}) \quad (2-51)$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &\geq c_{i-1} - a_i - c_i c_{n-1} + c_i a_n \\ \beta_i &\leq c_{i-1} - a_i - c_i c_{n-1} + c_i a_n \quad (i=1, \dots, k) \end{aligned} \quad (2-52)$$

とゲインを設定すればよい。

このとき、制約条件(2-47)から超平面を任意に選ぶことはできない。ただし、状態を $(n-1)$ 個フィードバックできるならば、(2-47)の制約は消え、超平面は *Hurwitz* 多項式 ($c_i > 0$) を満たす範囲で任意に設定できる。

[*Sliding Mode* 到達条件]

n 次系のシステムの到達条件は、2次系に比べると格段に複雑である。ここでは設計上有用な十分条件を示す。(2-51)(2-52)が成立すれば、全空間で $s \dot{s} < 0$ であるから、

(2-42)(2-43)のシステムで、(2-52)が満たされ *Sliding Mode* が存在するなら、(2-51)が超平面 $s=0$ に到達する十分条件となる。■

さらに、状態を $(n-1)$ 個フィードバックするときは、

$$\begin{aligned} k &= n-1 \\ \alpha_i &\geq -a_i, \quad \beta_i \leq -a_i \quad (i=1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (2-53)$$

で、 $\psi_i = a_i$ ($i=1, \dots, n-1$) のときの (2-42) の特性方程式が、0 および正の実数解を持たないことが十分条件となる。■

これは (2-50) で $k=n-1$ とし、 $c_i > 0$ であることから導出できる。

到達条件に関しては、文献[8]に *range space* の固有ベクトルに着目した整理がおこなわれている。

簡単な設計例を示す。

(例3) システムを

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= x_3, & \dot{x}_3 &= u \\ u &= -\psi x_1 - \delta_0 \text{sign}(s) \end{aligned}$$

$$\psi = \begin{cases} \alpha & \text{if } sx_1 > 0 \\ \beta & \text{if } sx_1 < 0 \end{cases} \quad s = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 \quad (2-54)$$

とおく。問題は *Sliding Mode* を発生させ、希望する動特性を付与することである。

動特性として、安定度を最大にすることを考える。(2-47)(2-52)より *Sliding Mode* を発生させるには、

$$\begin{aligned} \alpha &> -c_1 c_2 \\ \beta &< -c_1 c_2 \end{aligned} \quad (2-55)$$

$$c_1 = c_2^2 \quad (2-56)$$

と設定すればよい。*Hurwitz* 多項式の条件から $c_1, c_2 > 0$ である。また、到達条件は3次の場合、2-6. に示した2次系の場合がそのまま適用できる。 $\psi = \alpha$ のときの特性方程式が $p^3 + \alpha p = 0$ であるから、 $\alpha > 0$ であれば 0 および正の実数解を持たないので到達条件を満足している。

Sliding Mode にあるとき、システムは

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -c_1 x_1 - c_2 x_2 \end{aligned} \quad (2-57)$$

と記述され、 c_1, c_2 を選ぶことにより動特性を指定できる。(2-57)の固有値は、

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c_2}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} c_2 \quad (2-58)$$

これから c_2 が大きいほど安定度が大きくなるが、(2-55) (2-56) の条件から c_2 は $\sqrt[3]{-\beta}$ となる。■

システム (2-42) が時変系あるいはパラメータの真値がわからないときは、

$$a_{imin} \leq a_i(t) \leq a_{imax} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2-59)$$

と限定できれば、2次系で示したと同様に、 $k=n-1$ のときには、*Sliding Mode* 存在条件は

$$\begin{aligned} \alpha_i &\geq \max_t [c_{i-1} a_i(t) - c_i c_{n-1} + c_i a_{n-1}(t)] \\ \beta_i &\leq \max_t [c_{i-1} a_i(t) - c_i c_{n-1} + c_i a_{n-1}(t)] \end{aligned} \quad (2-60)$$

として満たされる。

(注意1) ただし、超平面 $s=0$ を構成するために、全ての状態量は観測できなければならない。

(注意2) この条件は、 $s \rightarrow 0$ では無視できる。 $|s|$ が大きいとき、到達条件として意味を持つ。

2-7-2. 外乱が存在する場合

2-6-2. (II) の局所フィードバック切り換えの手法を、 n 次系へ拡張する。システムを、

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} \quad (i=1, \dots, n-1) \\ \dot{x}_n &= -\sum_{i=1}^n a_i x_i + f(t) + u \end{aligned} \quad (2-61)$$

制御入力を、

$$u = - \sum_{i=1}^k \psi_i x_i - \sum_{i=0}^{m-1} \psi_i^y y^{(i)}$$

$$\psi_i^y = \begin{cases} \alpha_i^y & \text{if } y^{(i)}_s > 0 \\ \beta_i^y & \text{if } y^{(i)}_s < 0 \end{cases} \quad (2-62)$$

とおくと、ブロック図は図2-17になる。

外乱 $f(t)$ が、

$$\left| \frac{d^m f}{dt^m} \right| \leq B \sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{d^i f}{dt^i} \right| \quad B = \text{const.} \quad (2-63)$$

であれば、 $\alpha_i^y = B$, $\beta_i^y = -B$ と設定することにより、 y は $-f(t)$ に一致して、外乱抑制をおこなえる。

2-8. 理想 *Sliding Mode* と現実の *Sliding Mode*

これまでの議論では、制御入力切り換えを理想的なものとして考えてきた。しかし、現実の切り換えには遅れ、ヒステリシス等が存在する。一方、制御対象のモデルは高次の項（センサ・データプロセスによるもの）を省略したものであるため、入力的高速切り換えにより励起される可能性がある。これらの曖昧さによって現実の *Sliding Mode* は、超平面 $s=0$ に完全に拘束されることはない。超平面の近傍で振動（チャタリング）を生じる。

Sliding Mode は、本質的に不連続システム（入力が切り換わるという点で）であるから、これを連続化して理想 *Sliding Mode* と現実の *Sliding Mode* を比較する。連続化手法には、*Filippov* の方法と等価制御入力法の二つが知られている。1入力系では前者の方法が、また後者の方法は多入力系で広く用いられる。

Filippov の方法によれば、システムを

$$\dot{x} = f(x, t, u)$$

$$u = \begin{cases} u^+(x, t) & s(x) > 0 \\ u^-(x, t) & s(x) < 0 \end{cases} \quad (2-64)$$

としたとき、図 2-18 に示す点 C での制御対象は、

$$\dot{x} = f^0(x, t) \quad (2-65)$$

で、 f^0 は $f^+ = f(x, t, u^+)$ および $f^- = f(x, t, u^-)$ によって、

$$f^0 = \mu f^+ + (1 - \mu) f^- \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (2-66)$$

と表される。Sliding Mode 状態のときには、 f^0 が超平面 $s(x) = 0$ と接するので、 $\text{grad}(s) \cdot f^0 = 0$ となる。これから μ を求めて、さらに (2-65) (2-66) を用いて、

$$\dot{x} = \frac{\text{grad}(s) \cdot f^-}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad}(s) \cdot f^+}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)} f^- \quad (2-67)$$

が得られる。これが理想 Sliding Mode を与える方程式である。

さて、前述の種々の曖昧さが存在する現実の Sliding Mode の挙動を考える。 $s=0$ からのずれ（チャタリングの幅）は、そのときのと切り換え遅れ τ との積 $\dot{s}\tau$ 、あるいはヒステリシスの幅 Δ になる。しかし、現実には曖昧さを特定できないので、 $s=0$ からのずれの評価は難しい。ここでは曖昧さを特定するのではなく、たとえどのような曖昧さが存在していても、現実の Sliding Mode の時間平均をとれば、理想 Sliding Mode と一致することを示す。

遅れ τ が存在する場合、図 2-19 において、点 1 ($s=0$) での切り換えが τ 遅れて点 2 で起きる。つづいて、点 2 から点 3 に到達するまで Δt_1 時間かかり、点 3 ($s=0$) での切り換えが τ 遅れ点 4 で生じる。点 4 から次の切り換えをおこなう点 5 ($s=0$) までは Δt_2 時間かかる。これが 1 周期に相当し、この繰り返しが続く。一方、 $s=0$ に沿った変位 Δx は、

$$\Delta x = f^- \tau + f^+ \Delta t_1 + f^+ \tau + f^- \Delta t_2 \quad (2-68)$$

である。ここで、理想的な切り換えが可能ならば、

$$\begin{aligned} s > 0 &\rightarrow \dot{s}^{(+)} = \text{grad}(s) \cdot \dot{x} = \text{grad}(s) \cdot f^+ \\ s < 0 &\rightarrow \dot{s}^{(-)} = \text{grad}(s) \cdot \dot{x} = \text{grad}(s) \cdot f^- \end{aligned} \quad (2-69)$$

であるが、点1から点2の間は切り換えが遅れているので $\dot{s}^{(-)}$ 、点2から点3の間は切り換えが生じた後なので $\dot{s}^{(+)}$ になる。点2に注目すると、

$$-\dot{s}^{(+)}\Delta t_1 = \dot{s}^{(-)}\tau \quad (2-70)$$

から、(2-69) を用いて

$$\Delta t_1 = -\frac{\text{grad}(s) \cdot f^-}{\text{grad}(s) \cdot f^+} \tau \quad (2-71)$$

を得る。同様に点4に注目し、

$$\Delta t_2 = -\frac{\text{grad}(s) \cdot f^+}{\text{grad}(s) \cdot f^-} \tau \quad (2-72)$$

を得る。1同期 $T = 2\tau + \Delta t_1 + \Delta t_2$ の平均速度ベクトル f_{av} を求める。(2-71) (2-72) から、

$$\begin{aligned} T &= 2\tau + \Delta t_1 + \Delta t_2 \\ &= \frac{\tau [\text{grad}(f^- - f^+)]^2}{(\text{grad}(s) \cdot f^+)(\text{grad}(s) \cdot f^-)} \end{aligned} \quad (2-73)$$

を得る。同様に、

$$\Delta x = \frac{\tau (f^+ (\text{grad}(s) \cdot f^-) - f^- (\text{grad}(s) \cdot f^+))}{(\text{grad}(s) \cdot f^+)(\text{grad}(s) \cdot f^-)} [\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)] \quad (2-74)$$

が得られる。平均速度ベクトル f_{av} は、

$$\begin{aligned} f_{av} &= \frac{\Delta x}{T} \\ &= \frac{\text{grad}(s) \cdot f^-}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad}(s) \cdot f^+}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)} f^- \end{aligned} \quad (2-75)$$

となる。これは理想 *Sliding Mode* の方程式 (2-67) と一致する。このことはヒステリシスが存在する場合、高次項が存在する場合も同様に示せる。

以上のことから、切り換えに存在する曖昧さに対して、*Sliding Mode* は必ず超平面の近傍に存在し、時間平均を取ることによって、理想 *Sliding Mode* に一致することがわかった。この切り換えに対するロバストな性質と、制御対象のパラメータ変動・非線形性・雑音に対してロバストな性質とを併せ持つ *Sliding Mode* は、現実系に対して有効な制御系である。

参考文献

- [1] A.Sabanovic, D.B.Izosimov, "Application of Sliding Modes to Induction Motor Control," *IEEE Trans. on IA*, Vol.IA-17, pp.41-49, 1978.
- [2] O.Kaynak, F.Harashima, H.Hashimoto, "Variable Structure Systems Theory Applied to Sub-Time Optimal Position Control with an Invariant Trajectory," *電学論 E*, Vol.104, No.3/4, pp.47-51, 1984.
- [3] K.D.Young, "Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems," *IEEE Trans. on SMC*, Vol.SMC-8, No.2, pp.101-110, 1978.
- [4] J.J.Slotine, S.S.Sastry, "Tracking Control of Non-Linear Systems Using Sliding Surfaces, with Application to Robot Manipulators," *Int. J. Control*, Vol. 38, No. 2, pp. 455-492, 1983.
- [5] V.I.Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Mode," *IEEE Trans. on AC*, Vol. AC-22, pp.212-222, 1977.
- [6] U.Itkis: *Control Systems of Variable Structure*; John Wiley, 1976.
- [7] V.I.Utkin: *Sliding Modes and Their Application to Variable Structure System*; Mir, Moscow, 1978.
- [8] B.A.White, et al., "Reachability in Variable Structure Control Systems," *IEE Proc. D on Control Theory & Appl.*, Vol. 131, No.3, pp.85-91, 1984.
- [9] 原島・橋本, "Sliding Modeとその応用 - I," システムと制御、Vol.29, No.2 pp. 94-103, 1985. [10] 原島・橋本, "Sliding Modeとその応用 - II," システムと制御、Vol.29, No.4 pp. 242-250, 1985.

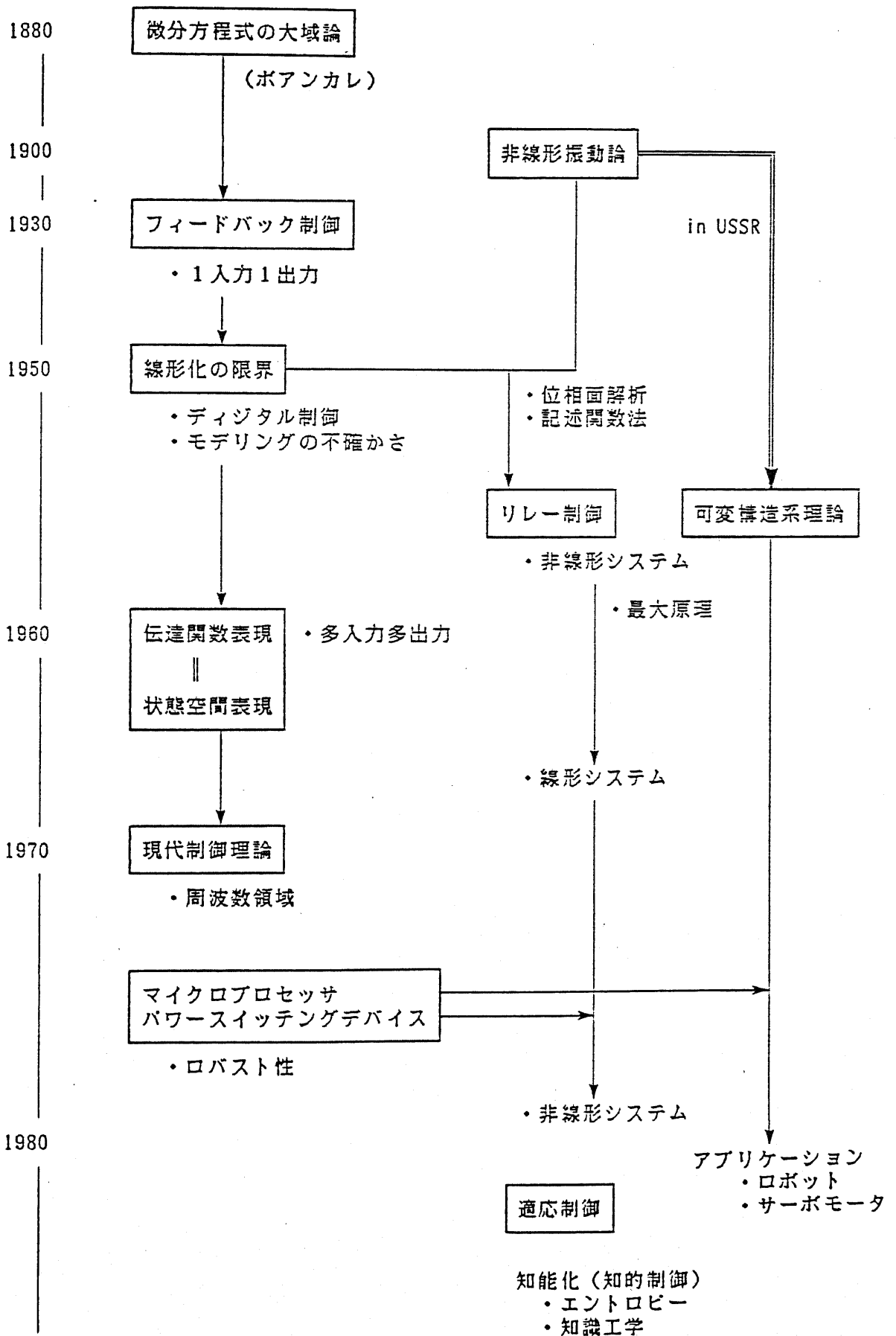


図2-1. 可変構造系理論の歴史

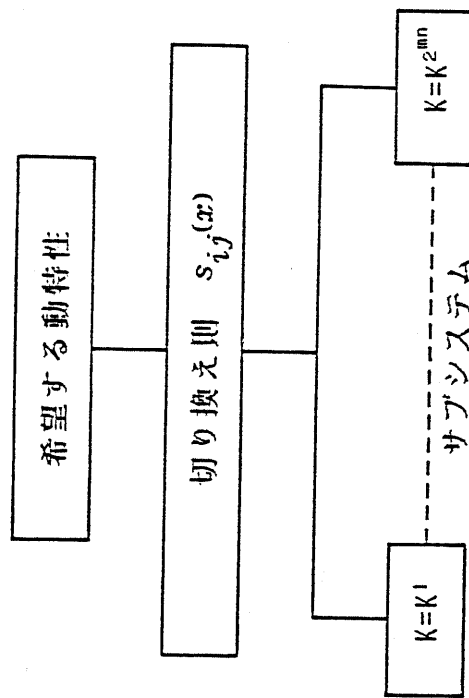


図 2-2. 可変構造系理論の概念

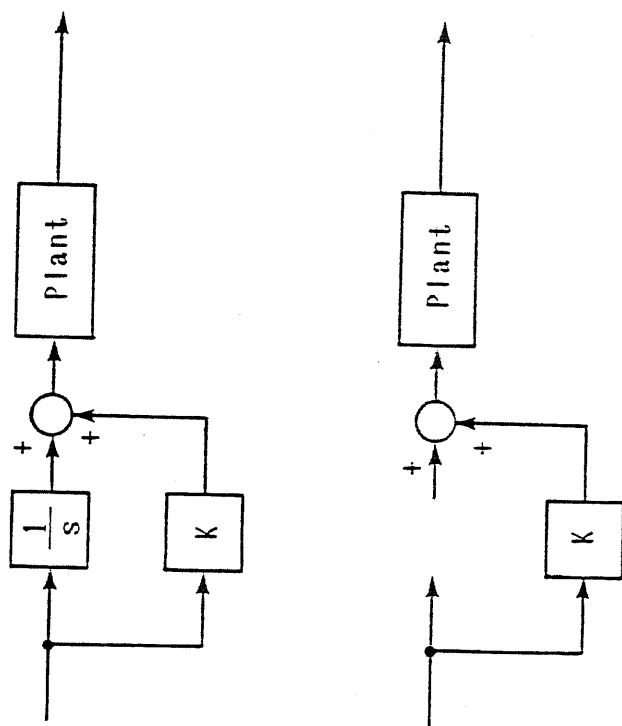


图 2-3. 构造

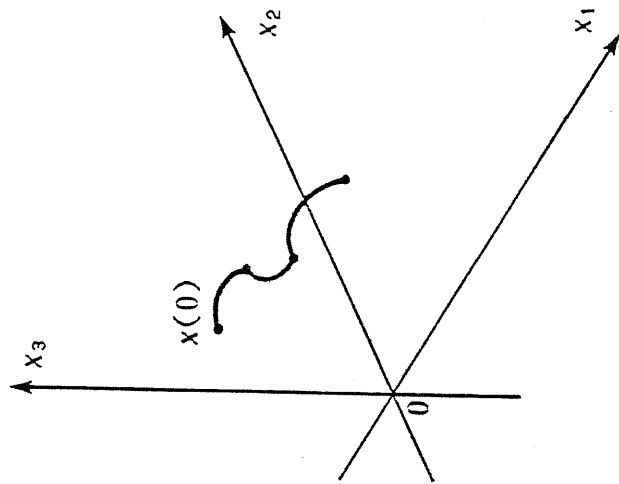


图 2-4. 状態空間 (3 次) の可変構造系

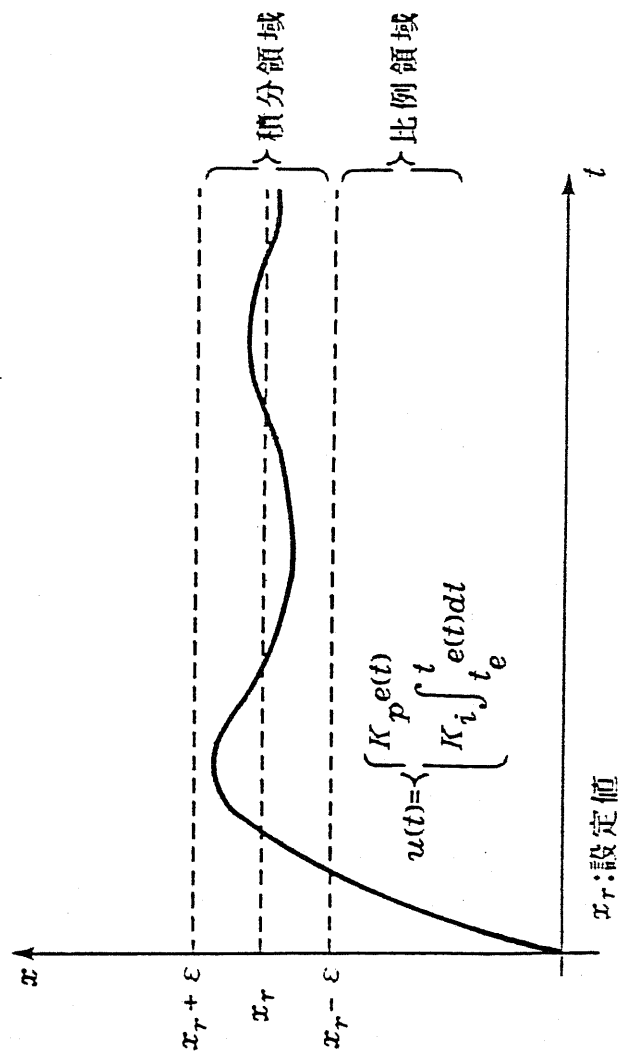


图 2-5. 可変構造系の例

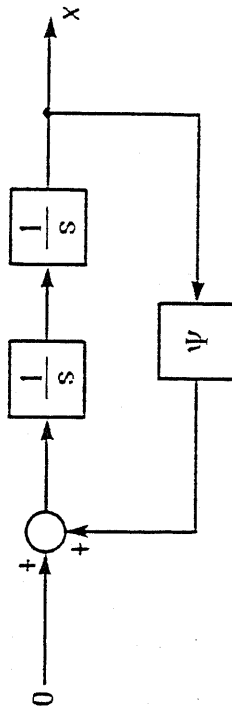


図 2-6. $\ddot{x} = -\psi x$ のブロック図

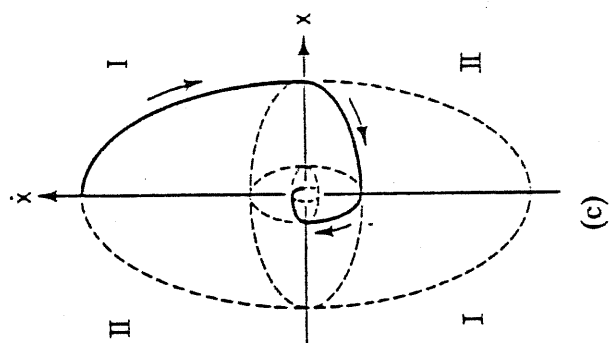
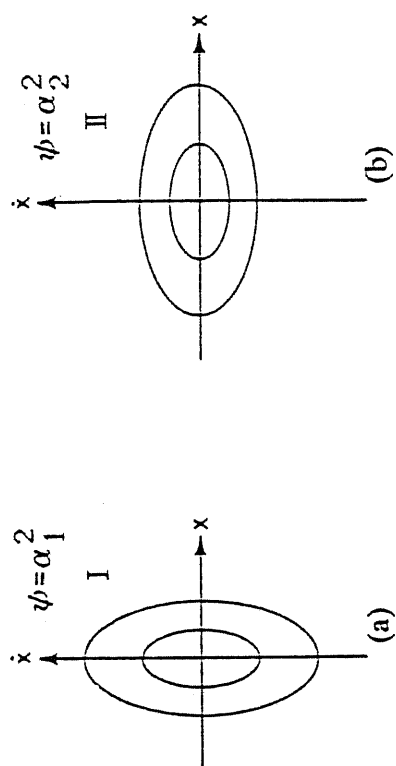


图 2-7. 安定な二つの構造をもつ可変構造系

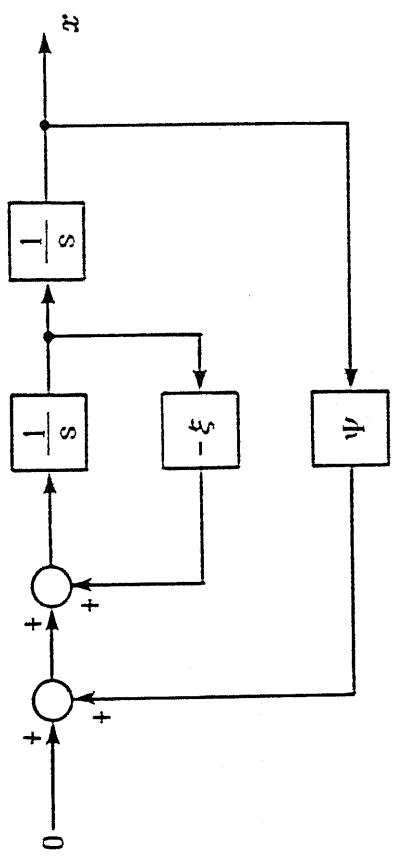


図 2-8. $\ddot{x} - \xi \dot{x} + \psi x = 0$ のブロック図

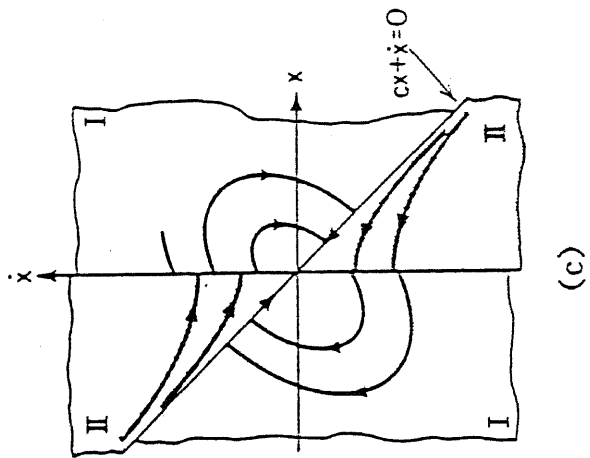
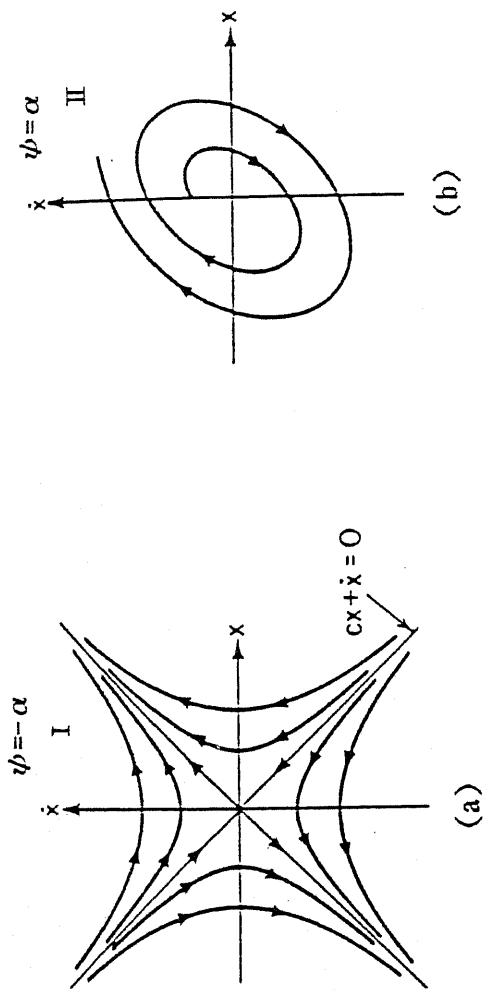


图2-9. 不安定な二つの構造をもつ可変構造系

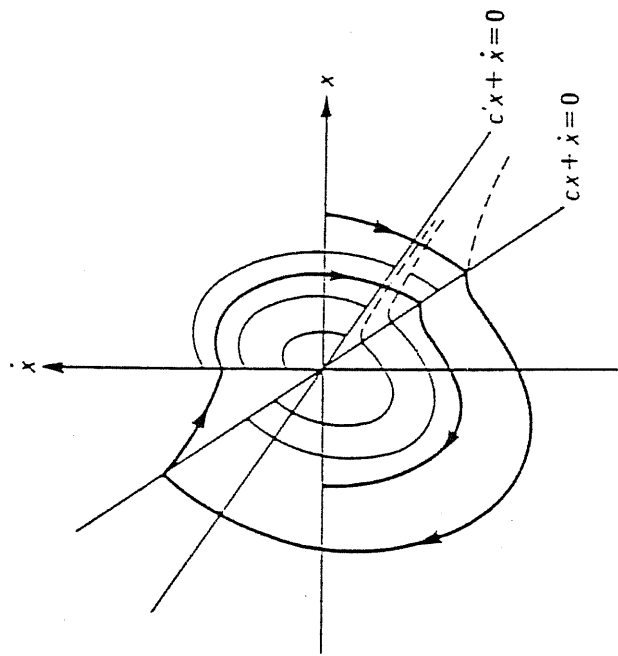
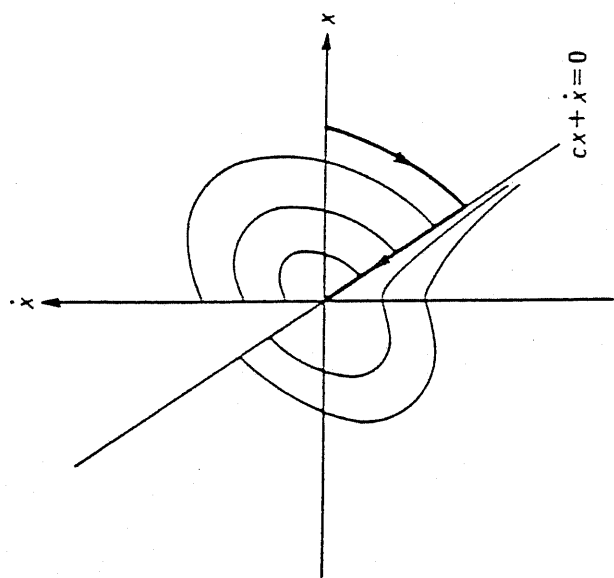


図 2-10. ξ の変動による動特性の変化

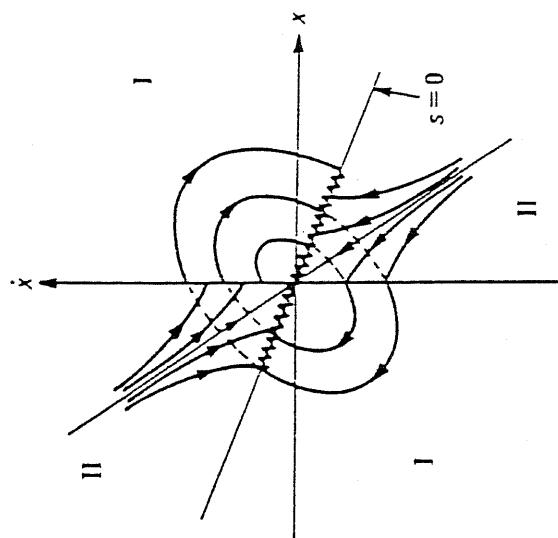


図2-11. Sliding Mode の導入

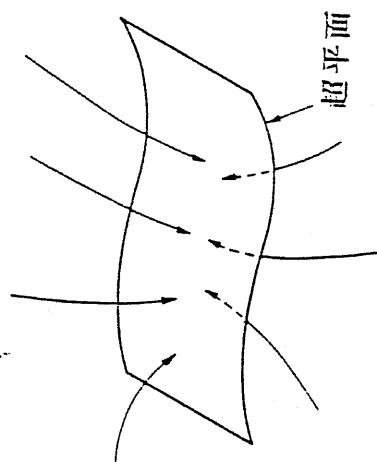


图 2-1 2. Sliding Node

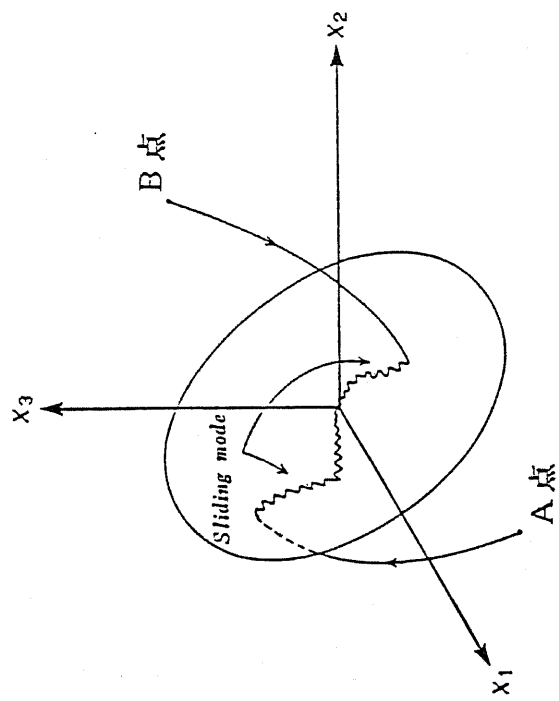


图 2-13. 3 次系の Sliding Mode

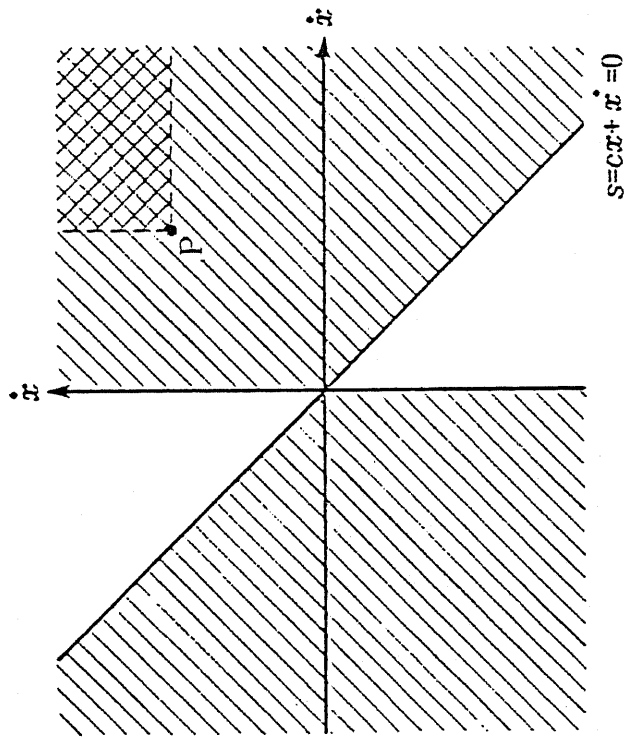
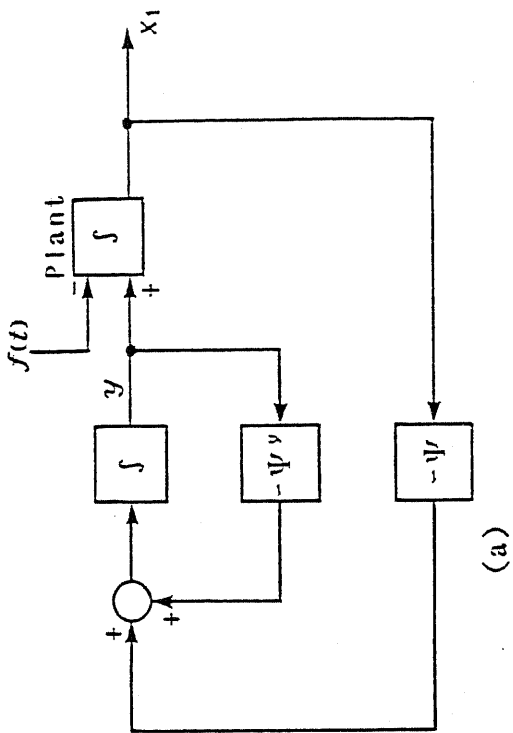
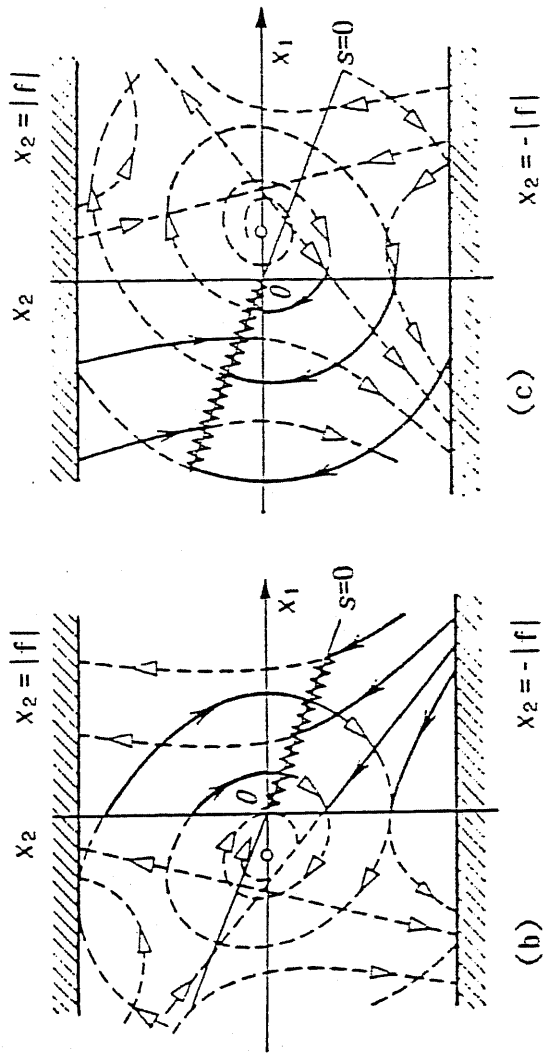


图2-14. 切り換え線への到達パターン



(a)



(c)

(b)

図2-15. 局所フィードバック切り換えによる外乱抑制

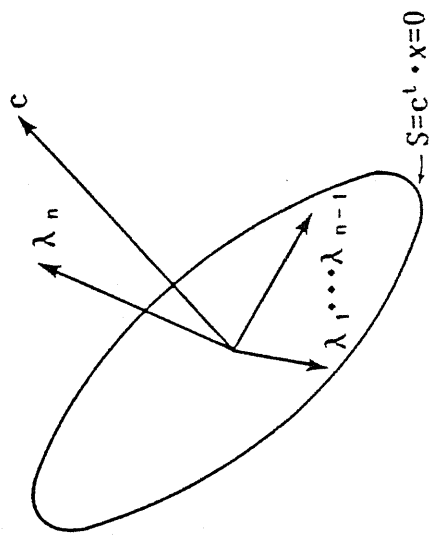


图 2-16. n 次系の Sliding Mode

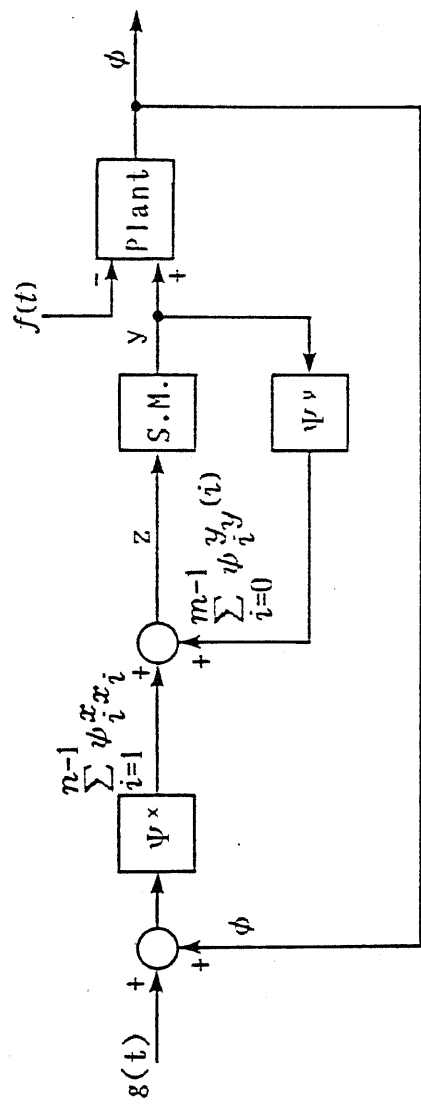


図2-17. 局所フィードバック切り換えによる外乱抑制(n次系)

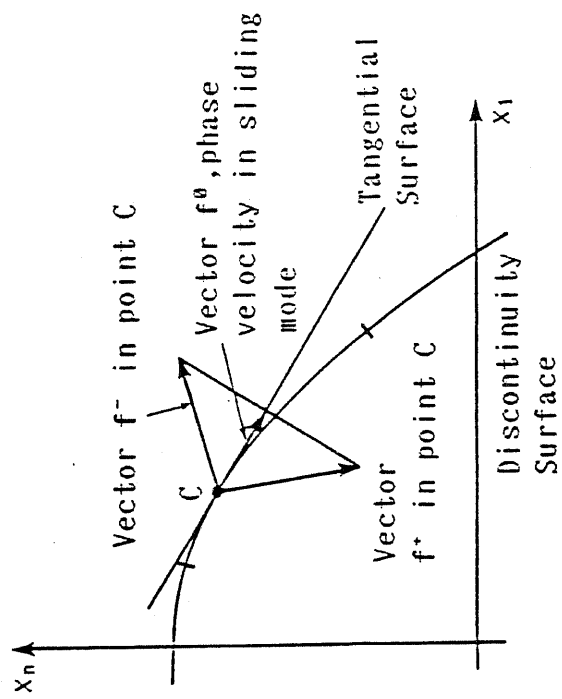


图 2-18. Filippov の連続化手法

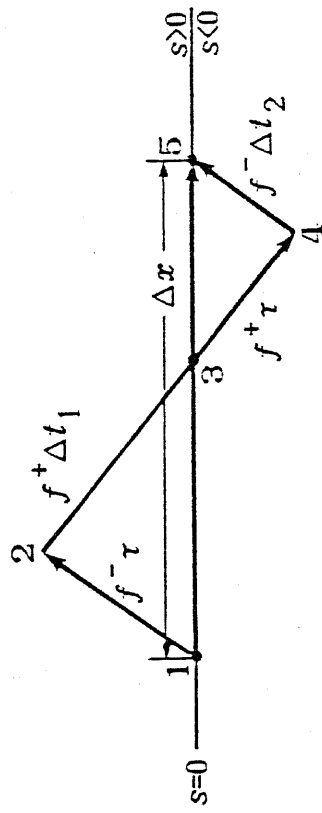


图 2-19. 切换延迟 τ

第3章 位置サーボ系への適用

3-1. はじめに

VSS理論に基づく Sliding Mode を用いた制御は、ロバストな制御系を構成できる。このロバスト性は制御を行う上での指標であり、最近特に重要視されている。ロバストとは頑強なという意味であるが、制御におけるロバスト性は外部環境の変化が制御対象の出力に影響を与えない度合を表現するものである。特にロボットアームの位置制御のように、位置・形状によって慣性モーメントが大きく変化し、また摩擦力・コリオリの力等の非線形な力が生じる系では、ロバスト性は重要な条件となる。

ロバスト性を備えたVSS理論による制御は、さらに高度な段階へと向かうロボットアーム及び知能ロボットの制御系へ向いていると思われる。この展望のもとに、多自由度系のアームへ適用する基礎的研究として一自由度の位置サーボ系への適用をおこなった。

3-2. 位置サーボの制御系設計

VSS理論を位置制御系へ適用する場合、制御対象である電動機は一次遅れで近似する。制御系全体は2次系となり、第2章可変構造系の理論の2次系で述べた設計が適用できる。制御系のブロック図を図3-1に示す。フィードバックするのは位置と速度である。位置サーボ系でレギュレータ問題を扱っている理由は

- ① ロボットアームの制御を展望しているためP T P (Point to Point) 制御での基礎データ集め
- ② C P (Continuous Path) 制御を考えた場合、一自由度系でのサーボ機能は要求しない
- ③ サーボ系へ拡張すると、Sliding Mode の特徴が失われ、本研究の趣旨に合わない

である。①、②は第4章の2軸アームの制御から明らかである。③に関しては、現在幾何学的アプローチによるサーボ系への拡張の研究があるが、それによるとVSSではあるが、Sliding Mode は存在しない。本研究が Sliding Mode のロバスト性に注目していることを考えると、むしろ新しく Sliding Mode を用いた位置サーボ系の研究を行うべきである。従って、ここではレギュレータ問題を取り扱う。

システムの記述は

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a x_2 + b u + F \end{cases} \quad (3-1)$$

制御入力を

$$u = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + k_f \operatorname{sgn} s \quad (3-2)$$

$$s = x_2 + c x_1 \quad (3-3)$$

$$\psi_1 = \begin{cases} \alpha_1 & s x_1 > 0 \\ \beta_1 & s x_1 < 0 \end{cases} \quad (3-4)$$

$$\psi_2 = \begin{cases} \alpha_2 & s x_2 > 0 \\ \beta_2 & s x_2 < 0 \end{cases}$$

とする。係数 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, k_f$ は Sliding Mode 存在条件

$s \dot{s} < 0$ を満たすように選ぶ。 $F = 0$ として

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{d x_2}{d t} + c \frac{d x_1}{d t} \\ &= (c - a) s + \{ b \psi_1 - c (c - a) \} x_1 \\ &\quad + b \psi_2 x_2 + b k_f \operatorname{sgn} s \end{aligned}$$

これから

$$s \dot{s} = (c - a) s^2 + \{ b \psi_1 - c (c - a) \} \underline{s x_1} + b \psi_2 \underline{s x_2} + b k_f |s| \quad (3-5)$$

$(c - a) < 0$ とすると、二重下線の正負により係数が次のように変わる。

$$\begin{cases} b \alpha_1 - c (c - a) < 0 & s x_1 > 0 \\ b \beta_1 - c (c - a) > 0 & s x_1 < 0 \end{cases} \quad (3-6)$$

$$\begin{cases} b \alpha_2 < 0 & s x_2 > 0 \\ b \beta_2 > 0 & s x_2 < 0 \end{cases} \quad (3-7)$$

これを満たすように、 α_1 , β_1 , α_2 , β_2 を選べば、このシステムの漸近安定性は得られる。

3-3. 実験装置^{[18][13]}

3-3-1. 構成

実験装置のハードウェア構成を図3-2に示す。

DCサーボモータ (24V, 50W) を PWM MOSFET チョッパ (中心周波数 10kHz) で駆動させ、1/450の減速器を介して図3-3の外乱発生機構につながっている。位置は 10bit アブソリュート型のシャフトエンコーダで検出し、速度はタコジェネレータからの出力をAD変換器を通し、マイクロプロセッサ (Z-80 2 Mhz) に取り込んでいる。

3-3-2. インタフェース

図3-4にコントローラと制御対象のインタフェース回路を示す。I/Oポート (入出力回路) には、シャープ I/O UNIT MZ-80 I/O と UNIVERSAL INTERFACE CARD MZ-80 I/O-1 を2枚使用している。これにより位置 (x_1)、速度 (x_2) をマイクロプロセッサに取り込み、制御入力 U、停止目標値 REF をマイクロプロセッサから出力する。各値は 10bit の離散値である。

3-3-3. 位置検出

位置検出部を図3-5に示す。目標値とシャフトエンコーダからの出力を引算器 (74181) に取り込み、その出力をインタフェース回路を通してマイクロプロセッサに送る。シャフトエンコーダからの出力は offset binary なのでインバータで最上位ビット (MSB) を反転して 2' complement に変換する。また、エンコーダと引算器の間は約 1.5m の距離があるため、シャフトエンコーダの出力はバッファを介している。

3-3-4. 速度検出

速度検出部を図3-6に示す。タコジェネレータで検出された速度はA/D変換器(DATEL ADC-856)を通り、10bitのoffset binaryに変換される。さらに、最上位ビットを反転し、2' complement にしている。タコジェネレータの出力はリップル分を含んでいるのでA/D変換器の入力側に0.01 μ Fのコンデンサをいれて、取り除く。

3-3-5. 制御入力出力部

制御入力出力部を図3-7に示す。制御入力uは2' complement であるから、最上位ビットを反転しoffset binaryに変換し、D/A変換器(DATEL DAC-681)でアナログデータにし、PWMアンプへ出力される。

3-3-6. 測定装置

過渡応答を測定するため、YEWウェーブメモライザ(MODL 3654/10)を使用した。位置・速度の過渡状態をメモリ内に保持し、YEWユニバーサルX-Yレコーダ(TYPE 3085)に出力し、測定する。

3-4. システム定数^[18]

システムのブロック線図を図3-8に示す。図中の外乱Fは図3-3で示した外乱発生機構によるものである。

このブロック線図から状態方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -a\phi \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f \quad (3-8)$$

$$a = k_T K_G / J R_A = 1.04$$

$$b = (K_T K_E + D R_A) / J R_A = 59.7 \quad (3-9)$$

$$f = K_G F / J$$

システム定数を表3-1に示す。

9kgのおもりを付けた場合の最大負荷トルクは

$$F_{\max} = M g L = 0.0274 \text{ [N}\cdot\text{m]} \quad (3-10)$$

になる。また、この場合の慣性モーメントは $0.212[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ となり、モータ側に換算すると $1.05 \times 10^{-6}[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ である。

3-5. Sliding Mode による制御^[10]

3-5-1. Sliding Line の設定

Sliding Modeにあるときの系の挙動は

$$x_1(t) = x_1(t_0) e^{-c(t-t_0)} \quad (3-11)$$

c は Sliding Line $s = c x_1 + x_2$ の傾きである。これから、 c が大きいほど整定が早いことがわかる。したがって、 c はマイクロプロセッサで取り扱える最大の値 16 とする。

3-5-2. 制御入力ゲインの設定

Sliding Mode が発生するには、 $s \dot{s} < 0$ であることが必要十分である。制御入力を

$$u = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + k + \text{sgn}s \quad (3-12)$$

とすると、(3-8)式から、 \dot{s} は

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x}_2 + c \dot{x}_1 \\ &= -a \phi \psi_1 x_1 + (c - b - a \phi \psi_2) x_2 + f - a \phi k_f \text{sgn}s \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} s \dot{s} &= -a \phi \psi_1 s x_1 + (c - b - a \phi \psi_2) s x_2 \\ &\quad + (f - a \phi k_f \text{sgn}s) s \end{aligned} \quad (3-13)$$

$s \dot{s} < 0$ にするためには

$$\psi_1 = \begin{cases} \alpha_1 & s x_1 > 0 \\ \beta_1 & s x_1 < 0 \end{cases}$$

$$\psi_2 = \begin{cases} \alpha_2 & s x_2 > 0 \\ \beta_2 & s x_2 < 0 \end{cases}$$

を考えると

$$\begin{cases} \alpha_1 > 0 \\ \beta_1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a \phi \alpha_2 > c - b \\ a \phi \beta_2 < c - b \end{cases} \quad (3-14)$$

システム定数を(3-14)式に代入すると

$$\alpha_2 > -0.74 \quad \beta_2 < -0.74 \quad (3-15)$$

以上を満たせばよいのであるが、マイクロプロセッサによる演算に時間をかけたくないという制約（サンプリングタイムを小さく）から、 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, k_f$ の値は表3-2のように選定した。

3-5-3. 実験結果

ロバスト性を検証するため、図3-9に示すように外乱発生機構であるおもりを

(i) 上から水平へ (0.5rad → 0.0rad) 動かす実験

と

(ii) 下から水平へ (-0.5rad → 0.0rad) 動かす実験

を行った。位相面での軌跡を図3-10に、時間応答を図3-11に示す。また、このときの制御入力 u の様子を図3-12に示す。

位相面軌跡から Sliding Mode にある部分は非常にロバストであることがわかる。それに対して Sliding Mode に到るまでの部分は、外乱の影響を受けている。上から水平へ動く場合の方が、下から水平へ動く場合に比べて最高速度の絶対値が0.11[rad/sec]も大きい。この結果、時間応答には差異がみとめられる。Sliding Mode でない部分は単なるP制御であることが図3-12からもわかる。

以上の結果から、Sliding Mode は確かにロバストであることがわかる。さらに、Sliding Line に達するまでは外乱に弱いという問題点がわかった。

ロボットアームのように、その動特性を一定に保つことが作業能率をあげるような系では完全なロバスト性が望ましい。それを実現するために可変 Sliding Line と全領域 Sliding Mode の2つの方法を提案する。

3-6. 可変 Sliding Line

3-6-1. 可変 Sliding Line による制御

図3-13に示すように、切り換え線の傾き c を漸次増大させることによって Sliding Mode の存在領域を広げる。 c の初期値を0.25として、制御系のサンプリング毎に Sliding Mode の存在の有無を判断する。Sliding Mode が生じていれば、 $c \leftarrow c + 0.25$ として、生じていなければ c はもとのままにしておく。これを c が最大値16になるまで続ける。フローチャートを図3-14に示す。

3-6-2. 実験結果

実験結果を図3-15に示す。前節の方法に比べると Sliding Mode の存在領域は広がり、ロバスト性は改善されている。しかし、切り換え線の傾きを切り換えている間は傾き c は一定値であり、前節の問題点（Sliding Line に到達するまではロバストでない）が存在する。この点を完全に克服する方法として次節の全領域 Sliding Mode を提案する。

3-7. 全領域 Sliding Mode ^{[118][119]}

Sliding Mode による制御で明らかになった問題点 — Sliding Mode の存在していない部分ではロバストでない — に対しては、すべての領域で Sliding Mode を発生させてやることにより解決できる。直線であった Sliding Line を図3-16に示すように曲線にし、初期状態から Sliding Mode を発生させてやればよい。また、任意に Sliding Curve をとることにより動特性を指定できるという自由度を得ることができる。（任意といっても Sliding Mode 発生条件を満たす範囲内においてである）

3-7-1. Sliding Curve の設定

Sliding Curve 設定するには、何らかの指標が必要になるわけであるが、ここでは最短時間制御を考える。

最短時間制御は図3-17のリレーサーボ機構において図3-18の最適応答を示す。この制御は比例部分をまったくもたない最も厳しい非線形制御で、線形制御よりも優れた動特性を示す。これを実現するには、制御対象のパラメータを

正確に知った上で、切り換えに遅れ等があってはならない。パラメータに対して感度が高くなっているわけである。しかし、現実の制御対象の完全なモデリングは不可能であり、小さな寄生的容量等は無視せざるをえない。また、パラメータ自体も時変であることが多い。その結果、原点近傍で Chattering や行きすぎを生じる。

これに対して、Sliding Mode では制御対象に存在する上記のあいまいな部分が制御過程に影響を及ぼさないので、このような位相面で軌跡をつなぎあわせるタイプの制御に向いていると考えられる。この最短時間制御を実現するように Sliding Curve を設定する。ただし、次に述べるように Sliding Mode 発生条件を考慮すると準最短時間制御になる。

3-7-2. 準最短時間制御

Sliding Mode が発生するためには、Sliding Curve をシステムの最大加減速度 $\pm \alpha_{max}$ [rad/sec²]、最大速度 v_{max} [rad/sec] の内側にとらなくてはならない。ここで提案する Sliding Curve は図 3-19 となる。

(1) 加速度一定

$$s_1 = \alpha x_2^2 + x_1 - x_0 \quad (x_0: \text{初期位置})$$

(2) 速度一定

$$s_2 = x_2 - v \quad (v: \text{目標速度})$$

(3) 減速度一定

$$s_3 = -\alpha x_2^2 + x_1$$

(4) 原点近傍での直線

$$s_4 = c x_1 + x_2$$

(s_3 の傾きが原点近傍で無限大となるため、Sliding Mode が存在しなくなるため)

以上の Sliding Curve 上でのシステムの挙動は

$$s_1: \quad x_1(t) = x_1(t_0) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\sqrt{\alpha x_1(t_0)} - t}{2} \right)^2 \quad (3-16)$$

$$s_2: \quad x_1(t) = v t + x_1(t_0) - v t_0 \quad (3-17)$$

$$s_3: x_1(t) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\sqrt{\alpha x_1(t_0)} + t - t_0}{2} \right)^2 \quad (3-18)$$

$$s_4: x_1(t) = x_1(t_0) e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (3-19)$$

3-7-3. Sliding Curve の切り換え

図3-19の Sliding Curve の切り換え点 a , b , c は curve の形を決めた時点決定出来る。各切り換え点は次である。

$$a \triangleq \text{速度が } v \text{ に達する点} \quad (3-20)$$

$$b \triangleq \text{速度が } \alpha v^2 \text{ に達する点} \quad (3-21)$$

$$c \triangleq \text{位置が } 1/\alpha c^2 \text{ に達する点} \quad (3-22)$$

(3-20)式～(3-22)式は図3-19のような初期状態での切り換え点であるが、図3-20の初期位置 x_0 が $d < x_0 < 2b$ の場合の切り換え点 a は

$$a = \frac{x_0}{2} \quad (3-23)$$

となる。また、図3-21の初期位置 x_0 が $x_0 < d$ の場合の切り換え点 a は

$$a = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha c^2 x_0}}{2\alpha c^2} \quad (3-24)$$

となる。実際の制御では(3-24)式を実時間で計算するのは困難である。しかし、初期位置 x_0 から Sliding Line s_4 に達するまでの時間は非常に短いため、 $x_0 < d$ の場合は Sliding Line s_4 に達するまでP制御としても影響はない。

図3-22に示すように初速度を持つ場合は、点線の Sliding Curve

$$s = \alpha x_2^2 + x_1 - x_0 \quad \text{にのせなくてはならない。その点線の}$$

Curve は $s_1 = 0$ とおいて、

$$x_0 = \alpha x_2^2 + x_1 \quad (3-25)$$

から x_0 が求まり、Sliding Curve $s = \alpha x_2^2 + x_1 - x_0$ が得られる。

3-7-4. 制御入力ゲインの設定

制御入力 u は

$$u = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 + k_f \operatorname{sgn} s \quad (3-26)$$

$$\psi_1 = \begin{cases} \alpha_i & s_i x_1 > 0 \\ \beta_i & s_i x_1 < 0 \end{cases} \quad (3-27)$$

$$\psi_2 = \begin{cases} \gamma_i & s_i x_2 > 0 \\ \xi_i & s_i x_2 < 0 \end{cases}$$

ただし、 $i = 1, 2, 3, 4$

(3-27)式の $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \xi_i$ は各 Sliding Curve において Sliding Mode 存在条件 $\dot{s} s < 0$ を満足する。パラメータの満たすべき条件は次のようになる。

$$(1) \quad s_1 = \alpha x_2^2 + x_1 - x_0$$

$$x_2 > 0 \quad \begin{cases} \alpha_1 > 0 & 2a\phi\gamma_1 > \frac{1}{\alpha} - 2b \\ \beta_1 < 0 & 2a\phi\xi_1 < \frac{1}{\alpha} - 2b \end{cases} \quad (3-28)$$

$$x_2 < 0 \quad \begin{cases} \alpha_1 < 0 & 2a\phi\gamma_1 < \frac{1}{\alpha} - 2b \\ \beta_1 > 0 & 2a\phi\xi_1 > \frac{1}{\alpha} - 2b \end{cases} \quad (3-29)$$

$$(2) \quad s_2 = x_2 - v$$

$$\begin{cases} \alpha_2 > 0 & a\phi\gamma_2 > -b \\ \beta_2 < 0 & a\phi\xi_2 < -b \end{cases} \quad (3-30)$$

$$(3) \quad s_3 = -\alpha x_2^2 + x_1$$

$$x_2 > 0 \quad \begin{cases} \alpha_3 < 0 & 2a\phi\gamma_3 < \frac{1}{a} - 2b \\ \beta_3 > 0 & 2a\phi\xi_3 > \frac{1}{a} - 2b \end{cases} \quad (3-31)$$

$$x_2 < 0 \quad \begin{cases} \alpha_3 > 0 & 2a\phi\gamma_3 > \frac{1}{a} - 2b \\ \beta_3 < 0 & 2a\phi\xi_3 < \frac{1}{a} - 2b \end{cases} \quad (3-32)$$

$$(4) \quad s_4 = c x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} \alpha_4 > 0 & a\phi\gamma_4 > c - b \\ \beta_4 < 0 & a\phi\xi_4 < c - b \end{cases} \quad (3-33)$$

3-7-5. 制御アルゴリズム

Sliding Mode をおこなう上でサンプリングタイムは短いほどよいことは既に第2章可変構造系理論で述べた。制御アルゴリズムはサンプリングタイムが極力短くなるように留意した。図3-23に実験に用いたアルゴリズムを示す。このアルゴリズムでは1回のサンプリングが400 μ secであった。

3-7-6. 実験条件

Sliding Curve はシステムの最大加速度、最大速度を考慮して表3-3の数値に設定。制御入力 u の各パラメータは Sliding Mode 存在条件とマイクロプロセッサ内で実現の容易な値ということで表3-3の値に設定した。

次の条件で実験をおこなう。

- (1) 初速度0でおもりを上から水平方向(0.5rad \rightarrow 0.0rad)へと下から水平方向(-0.5rad \rightarrow 0.0rad)へ動かす場合の位相面軌跡と時間応答を測定する。
- (2) おもりをつけた状態で図3-22に示す初速度 x_2 を持った場合の位相面軌跡を測定する。

3-7-7. 実験結果

実験条件(1)の初速度0の場合の位相面軌跡を図3-24に、時間応答を図3-25に示す。また、そのときの制御入力の様子を図3-26に示す。

実験条件(2)の初速度を持つ場合の位相面軌跡を図3-27に示す。

図3-24、図3-25から完全なロバスト性が得られていることがわかる。また、この制御法の目的であった全領域での Sliding Mode 存在は図3-26から確認される。

図3-27からは、この制御アルゴリズムが初速度を持つ場合にも有効であることがわかる。

以上の結果から、全領域 Sliding Mode による準最短時間制御として提案されたアルゴリズムが完全なロバスト性をもつことが確認された。

ここで再び最短時間制御との関係を考えてみると、このアルゴリズムでは速応性を犠牲にしてロバスト性を得たことになる。速応性とロバスト性はこのアルゴリズムを通してトレード・オフの関係にある。この研究の中心課題にあるのはロボットアームの制御であり、そこでは速応性も重要であるが、それにもましてロバスト性が要求される。この点からいえば、トレード・オフの関係があってもロバスト性が得られる Sliding Mode 制御の方が優れているといえる。

3-8. おわりに

以上の3つの方法(従来の Sliding Mode、可変 Sliding Line、全領域 Sliding Mode)を比較検討する。実験結果から、全領域 Sliding Mode が負荷外乱の影響を完全に押え込み、同じ動特性を示し最もロバストであることがわかる。これは、制御入力の挙動をみると、他の方法に比べ動作過程中 Sliding Mode が生じていることによって理解できる。

しかし、速応性の点からは全領域 Sliding Mode が最も悪く、従来型の Sliding Mode (ロバスト性が原点近傍に限られている)が優れている。可変 Sliding Line の場合は、速応性、ロバスト性ともに中間に位置する。速応性とロバスト性がトレード・オフの関係にあることを示している。

ここで、最短時間制御との関係を考えてみると、Sliding Mode では速応性を犠牲にしてロバスト性を得たことになる。逆に、最短時間制御はロバスト性を全く持たず、(切り換え時点を正確に求めることが必要)、速応性のみを求めている。本研究の中心はロボットアームに代表される Motion Control であり、そこでは速応性も重要であるが、ロバスト性も要求される。この点から言えば、速応性とロバスト性がトレード・オフの関係であっても、ロバスト性が得られる Sliding Mode の方が最短時間制御よりも有効である。

参考文献

- [1] V.I.Utkin," Sliding Modes and Their Application to Variable Structure Systems", Moscow,Mir,1978
- [2] V.I.Utkin," Variable Structure Systems with Sliding Mode:A survey", IEEE Trans.Automat.Contr.,vol.AC-22,pp.212-222,1978
- [3] U.Itkis,"Control Systems of Variable Structure",New York,Wiley,1976
- [4] K.D.Young,"Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems",IEEE Trans.vol.smc-8,pp.101-109,1978
- [5] J.J.Slotine and S.S.Sastry,"Tracking Control of Non-linear Systems Using Sliding Surfaces with Application to Robot Manipulators",Int. J.Control,vol.38,no.2,465-492,1983
- [6] A.Sabanovic and D.B.Izosimov,"Application of Sliding Modes to Induction Motor Control",IEEE Trans.vol.IA-17,pp.41-49,1978
- [7] R.P.Paul,"Robot Manipulators",MIT Press,1981
- [8] K.D.Young and H.G.Kwatny,"Variable Structure Servomechanism Design and Applications to Overspeed Protection Control",Automatica. vol.18,no.4,pp.385-400,1982
- [9] K.D.Young,"Design of Variable Structure Model Following Control Systems",IEEE Trans.vol.AC-23,pp.1079-1085,1978
- [10] F.Harashima,H.Hashimoto and S.Kondo,"MOSFET CONVERTER-FED POSITION SERVO SYSTEM WITH SLIDING MODE CONTROL",Proceeding of PESC,pp.73-79,1983 PESC=Power Electronics Specialist Conference
- [11] O.Kaynak,F.Harashima and H.Hashimoto,"A VARIABLE STRUCTURE SYSTEM WITH AN INVARIANT TRAJECTORY",Proceeding of IPEC,pp.1688-1697,1983 IPEC=International Power Electronics Conference
- [12] V.I.Utkin and K.D.Young,"Methods for Construction for Discontinuity Planes in Multidimensional Variable Structure Systems",auto.and remote.control.no.26,pp.1466-1470,1978
- [13] 原島・橋本・近藤、：位置サーボ系の全領域スライディングモードによるロバスト制御、電気学会全国大会講演論文集、7-523、604/605(1983)
- [14] 原島・橋本：VSSによる制御系設計、電気学会 システム・制御研究会資料 SC-83-46、1983
- [15] 原島・近藤・橋本・Kaynak：Variable Structure による位置サーボ系の制御、第21回SICE学術講演会予稿集 no.1111 (1982)

- [16] 原島・橋本・近藤： Variable Structure による一サーボ系の制御 — Sliding Mode 存在領域における比較 一、第21回SICE学術講演会予稿集 no.3101 (1983)
- [17] 原島・橋本： Sliding Mode のロバスト性、電気学会全国大会 (1984)
- [18] 原島・酒井・橋本： スライディングモードによる多関節ロボットアームの非干渉化、電気学会全国大会 (1984)

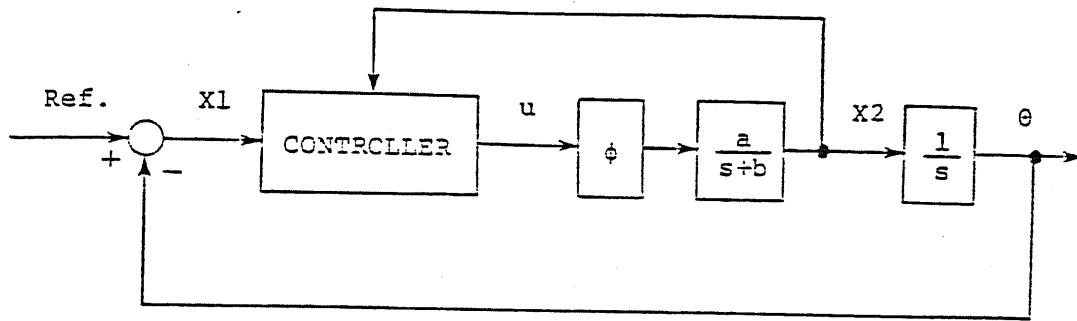


图 3-1. 位置サーボ系

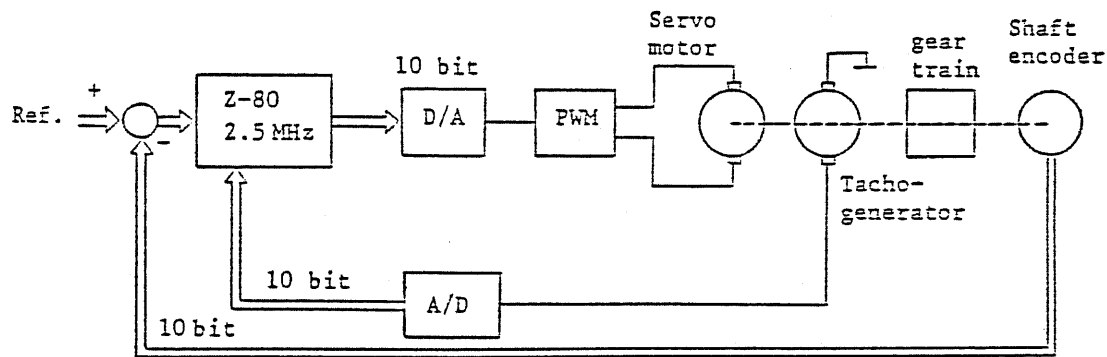


图 3-2. 実験装置

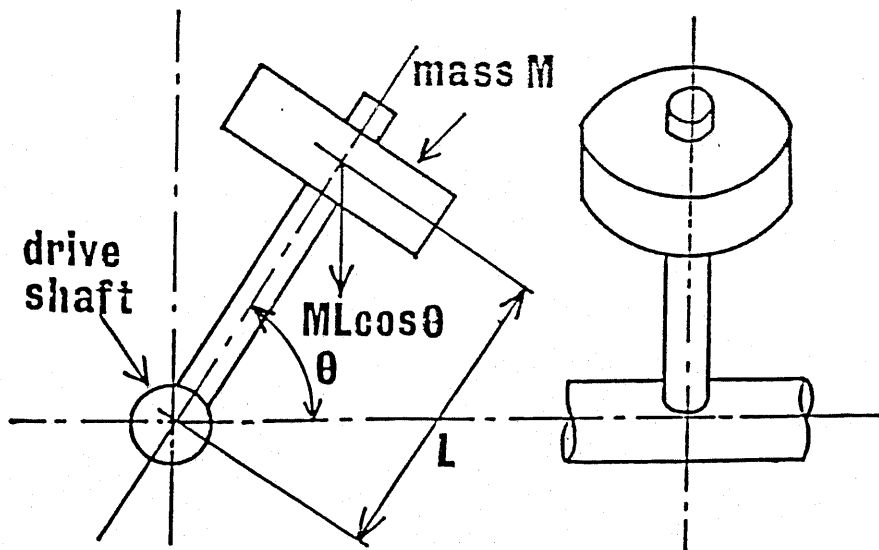


图 3-3. 外乱発生機構

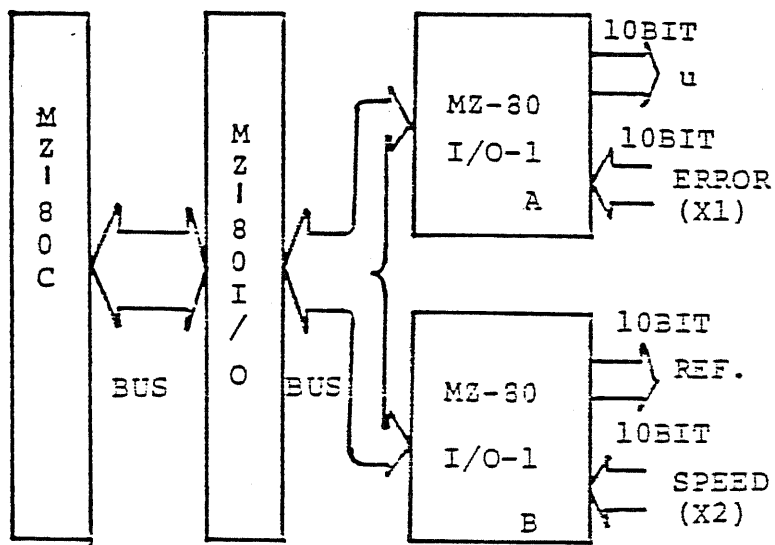


図3-4. インタフェース

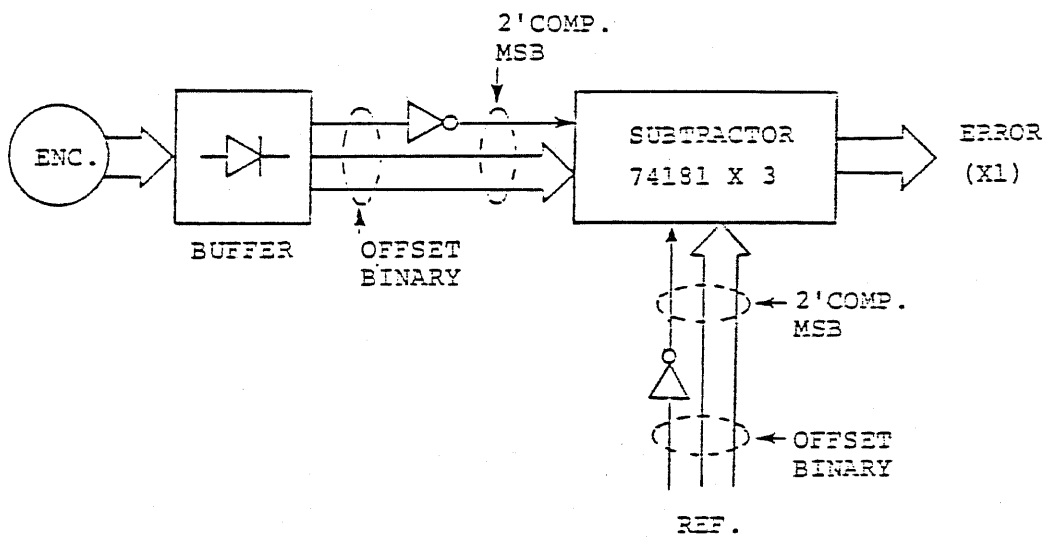


図3-5. 位置検出

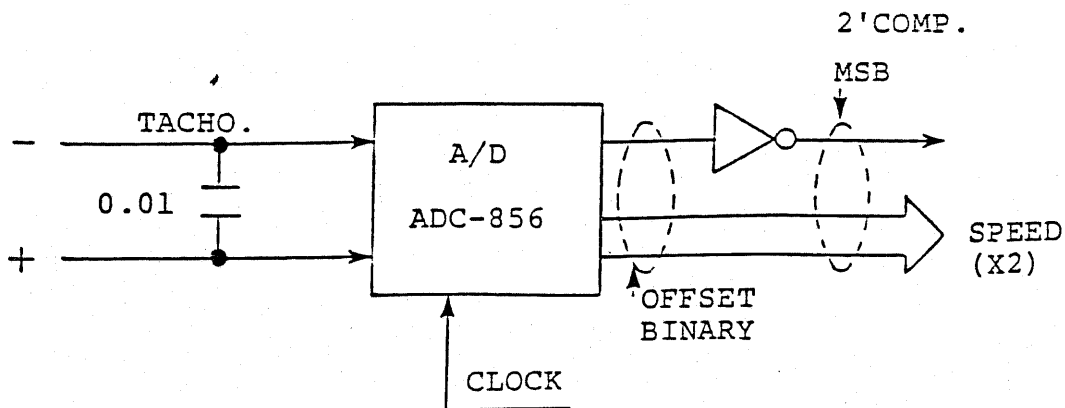


図3-6. 速度検出

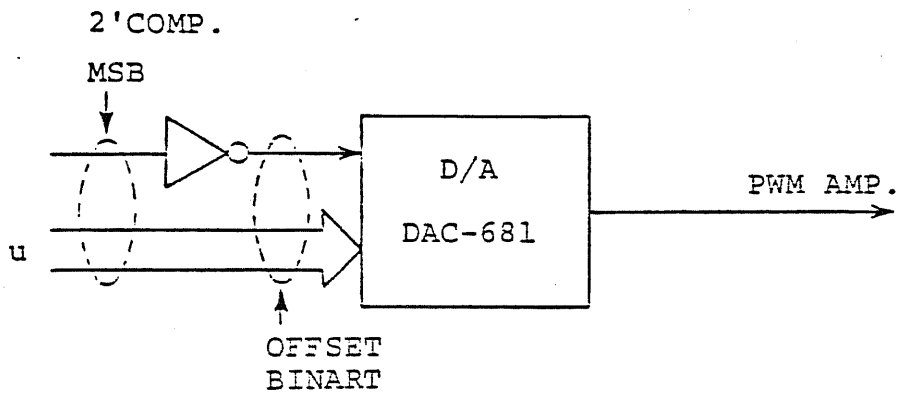


図 3-7. 制御入力出力

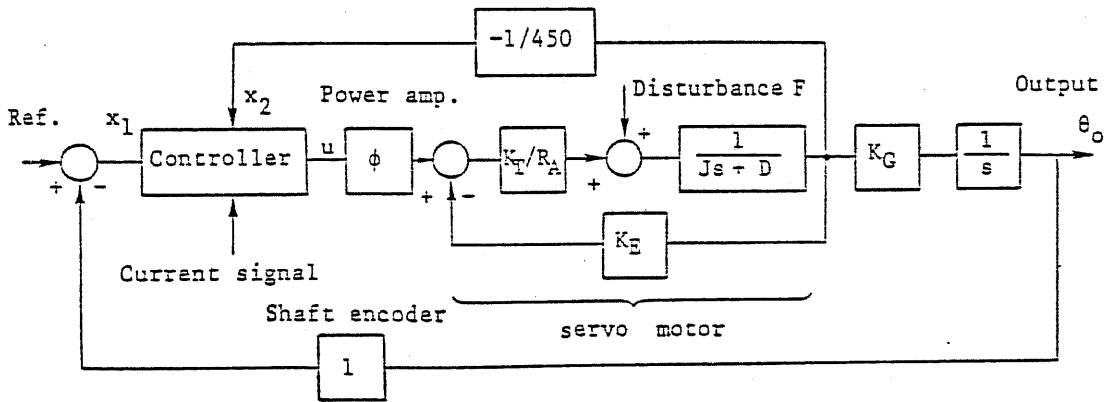


図 3-8. ブロック線図

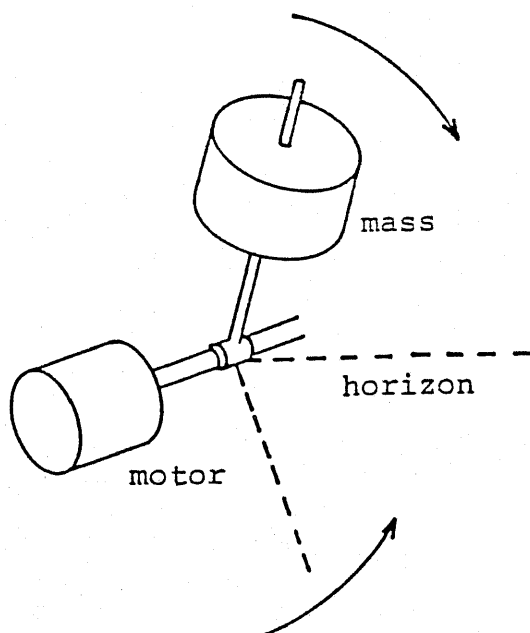


図 3-9. 外乱発生機構

パラメータ名	パラメータ値
K_E : 電機子反作用	6.0×10^{-2} [v·sec/rad]
K_T : トルク定数	6.0×10^{-2} [N·m/A]
R_a : 電機子抵抗	1.9 [Ω]
D : 粘性定数	2.1×10^{-3} [N·m·sec/rad]
J : 慣性モーメント	6.8×10^{-5} [kg·m]
K_G : ギヤ比	1/450
L : アーム長	14 [cm]
M_G : 負荷の重量	9 [kg]
ϕ : アンブゲイン	57

表3-1. システム定数

C	16
α_1	1
β_1	-1
α_2	0.125
β_2	-1
K_f	0.074

表3-2. 制御入力の各ゲイン

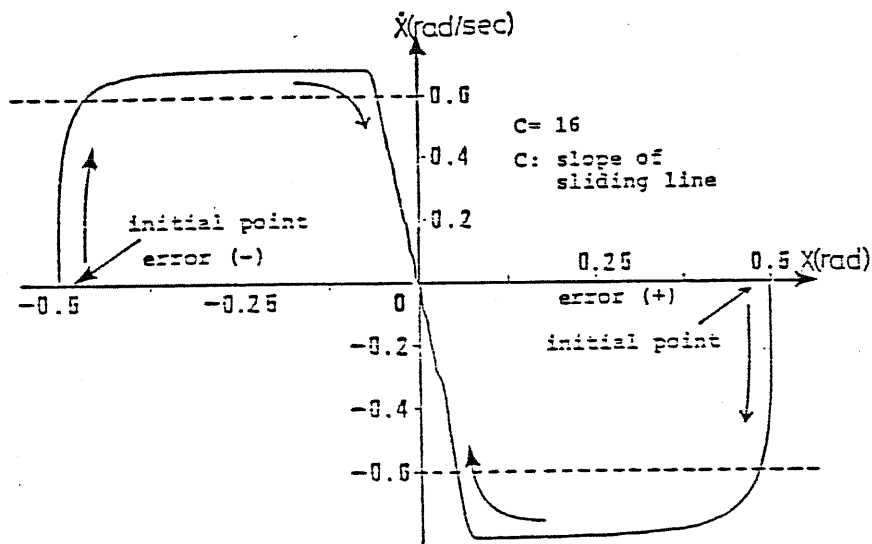


图 3-10. 位相面軌跡

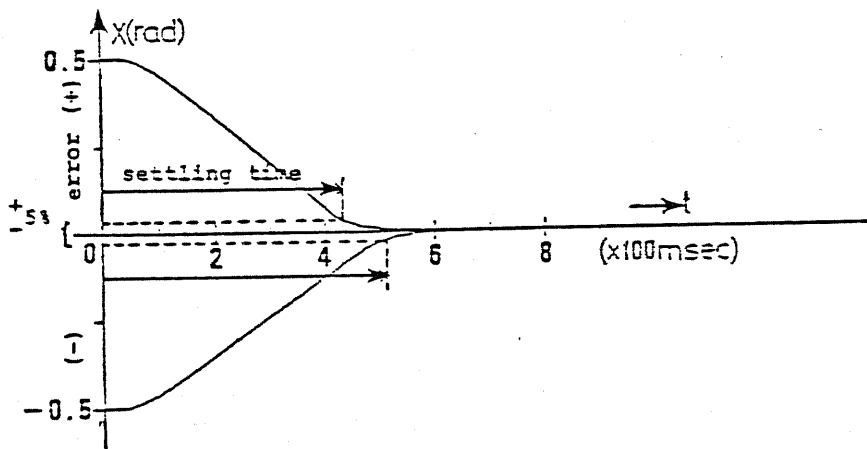


图 3-11. 時間応答

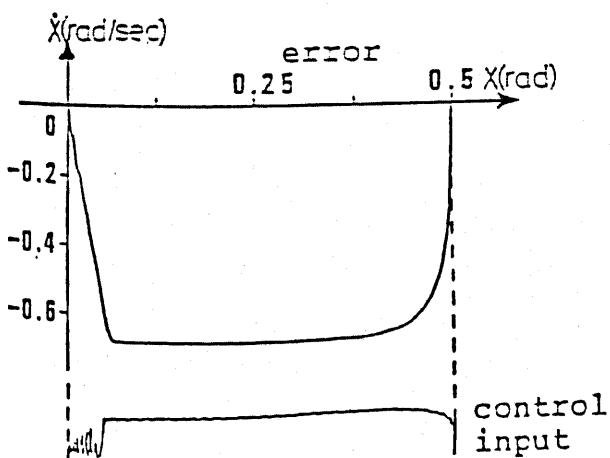


图 3-12. 制御入力の手動

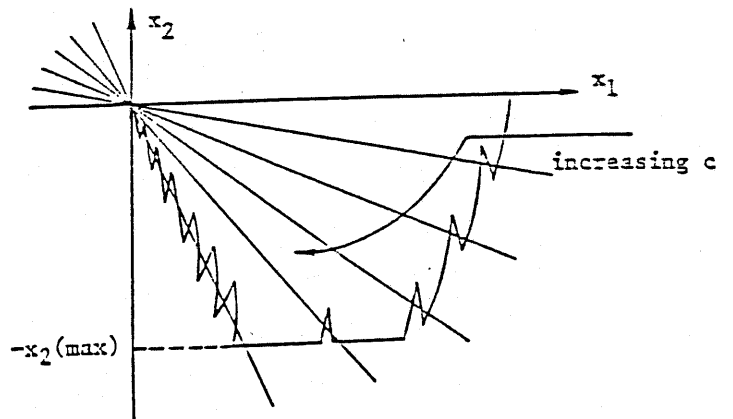


图 3-13. 可変 Sliding Line

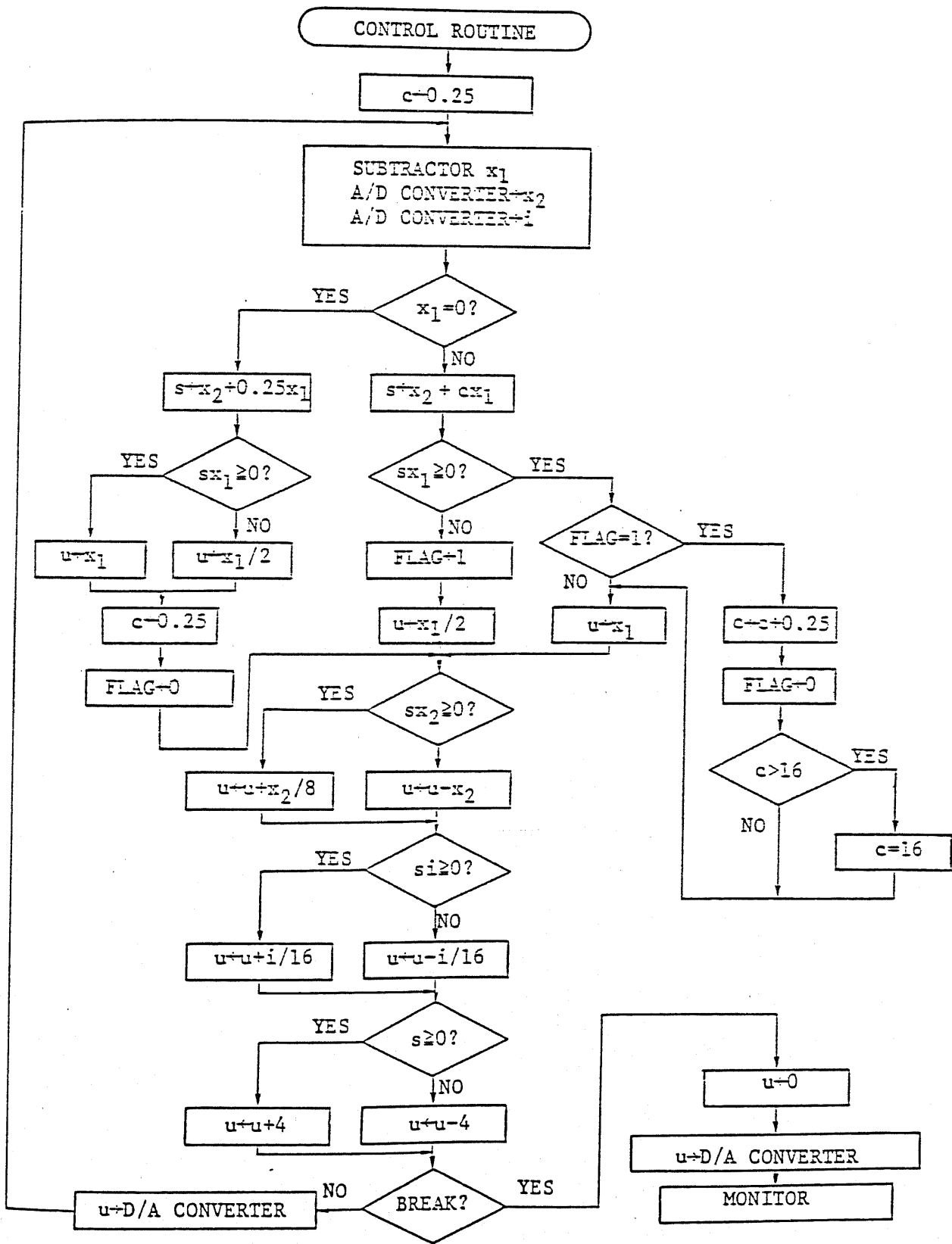


図 3-14. 可変 Sliding Line フローチャート

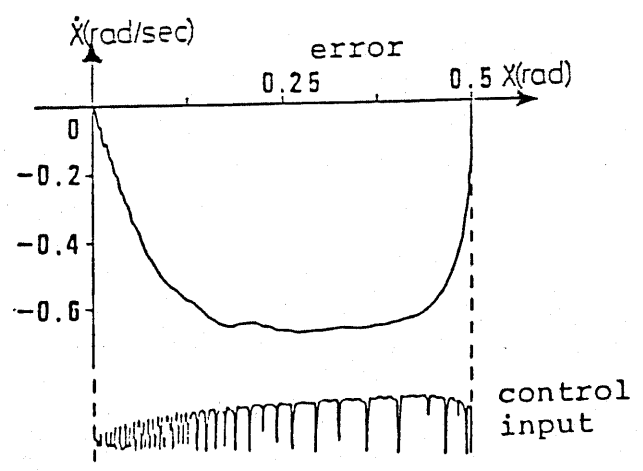
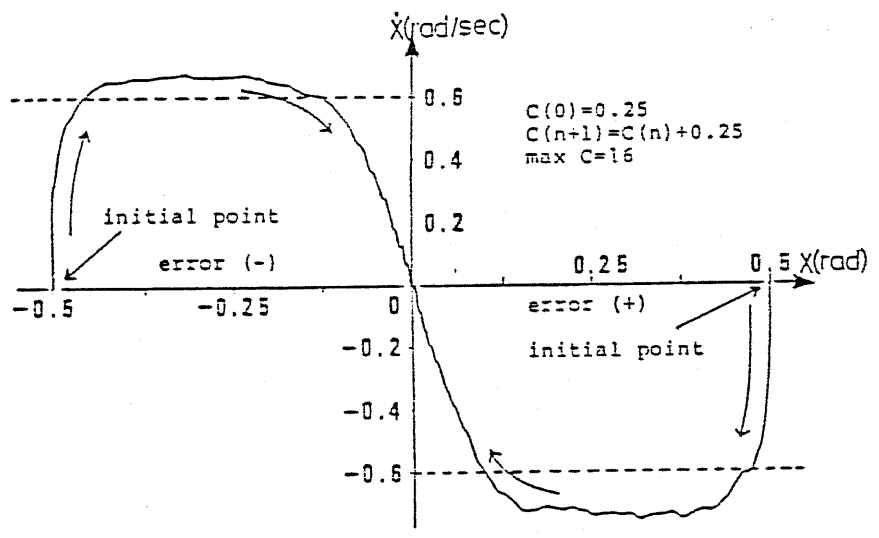
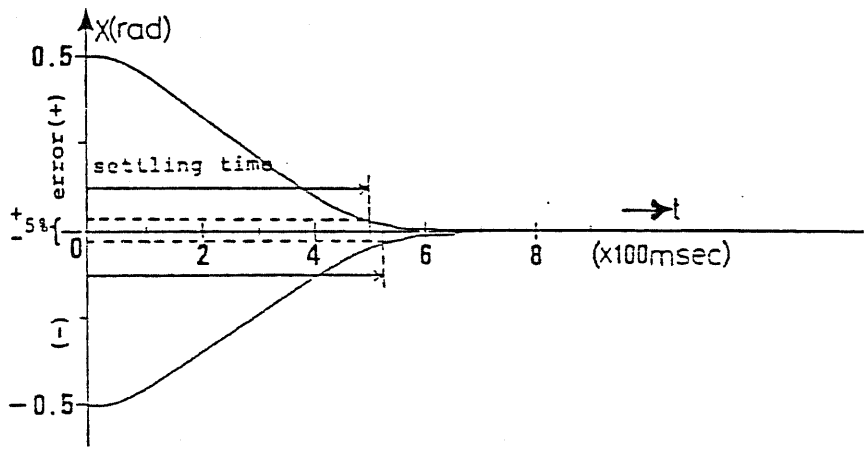


图 3-15. 可变 Sliding Line 实验结果

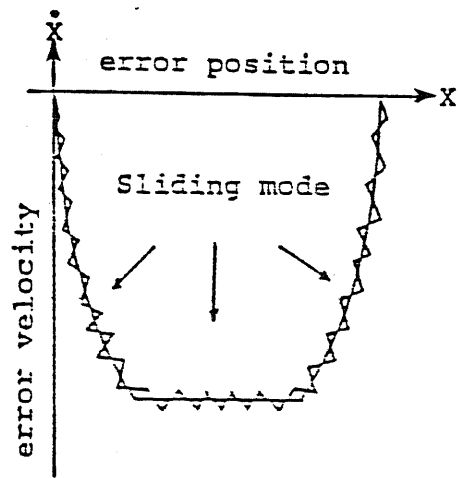


图 3-16. 全領域 Sliding Mode

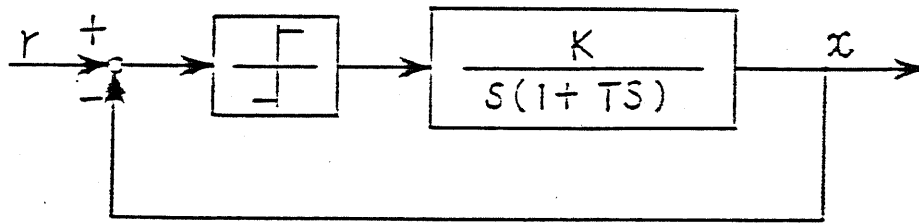


图 3-17. リレーサーボ機構

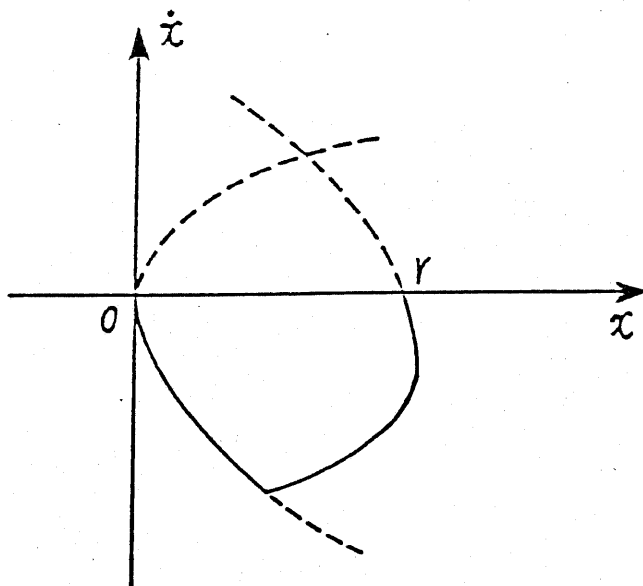


图 3-18. 最適応答

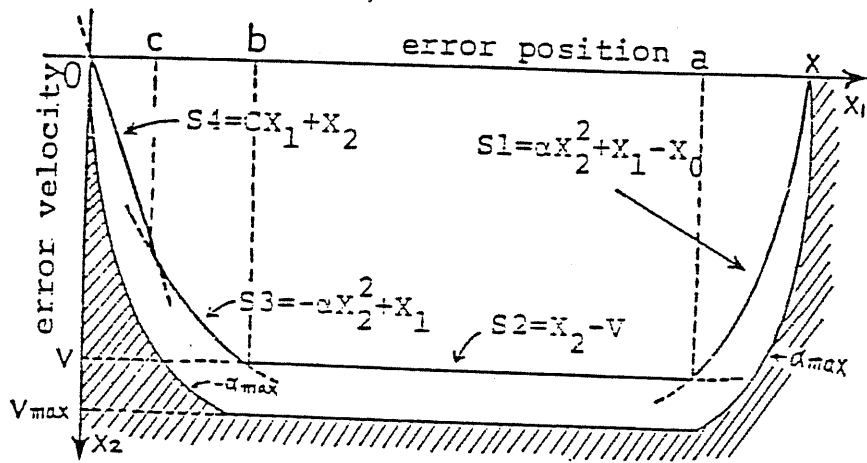


图 3-19. Sliding Curve

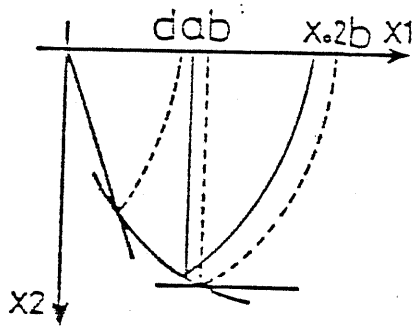


图 3-20.

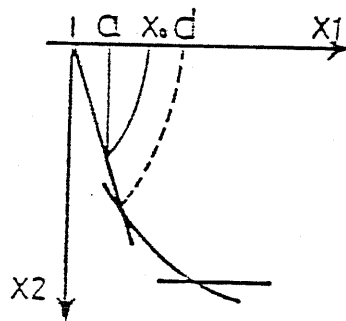


图 3-21.

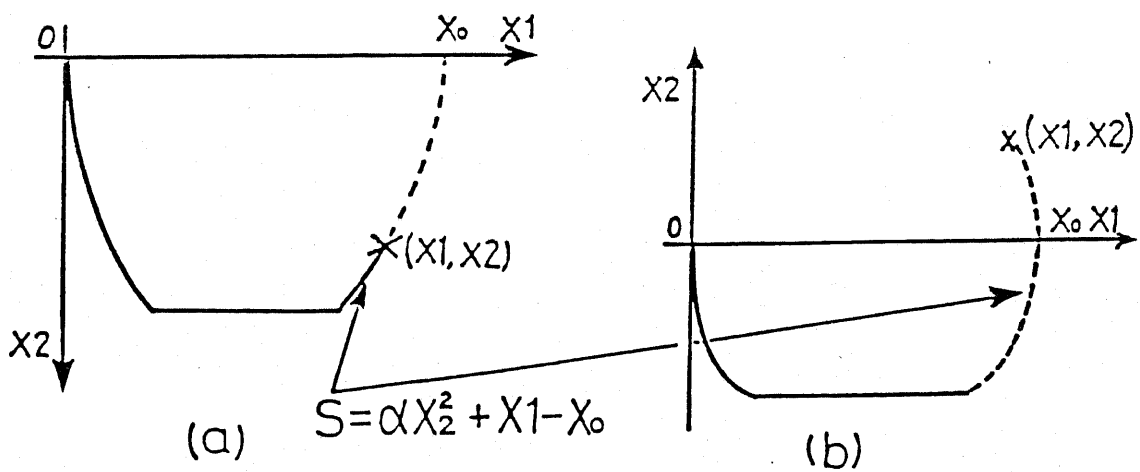


图 3-22. 初速度を持つ場合

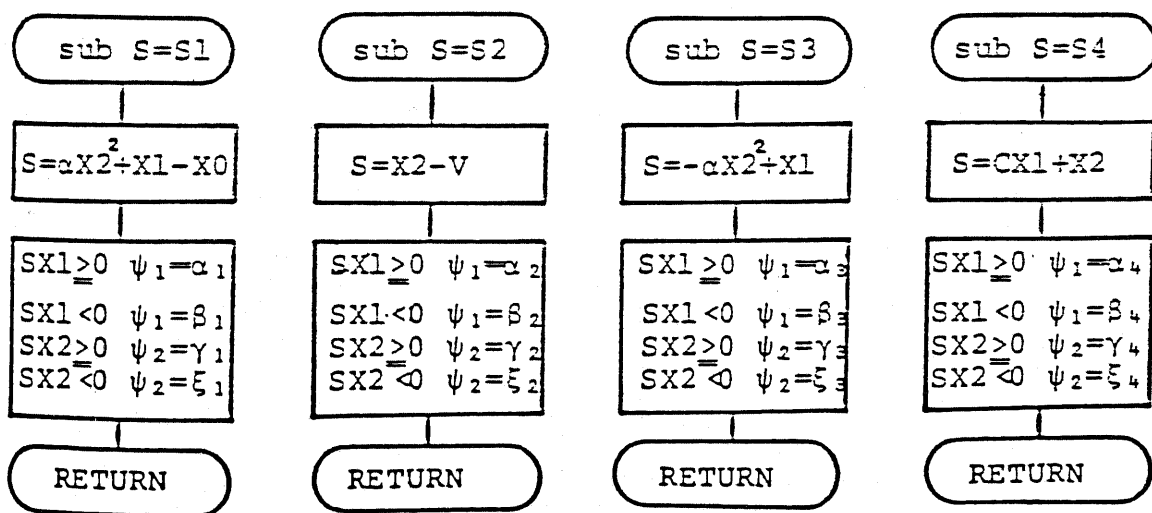
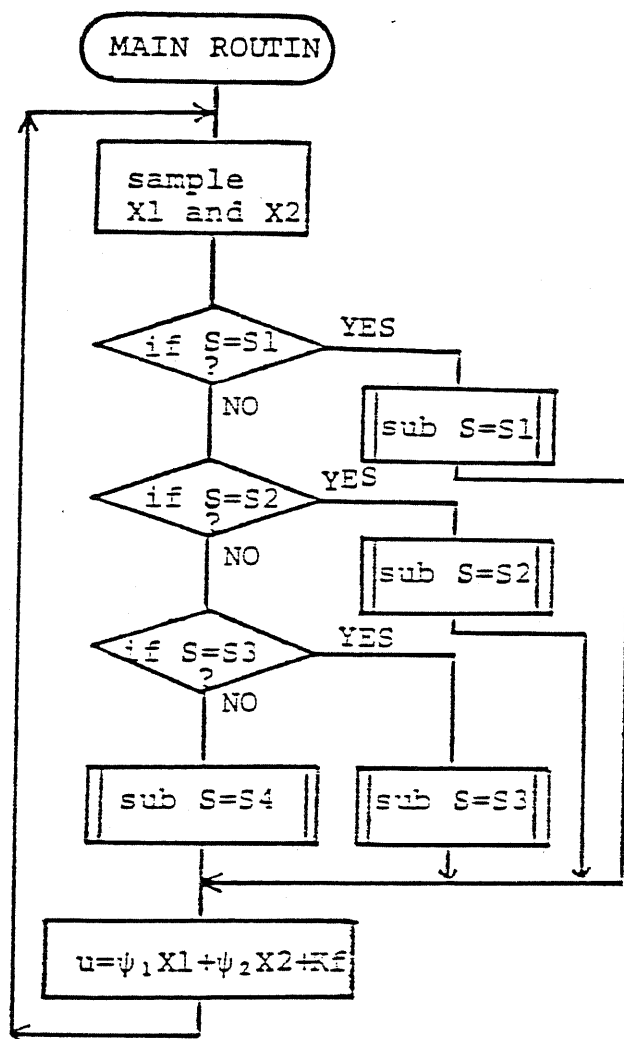


図 3-23. 制御アルゴリズム

Sliding curve	α_i	β_i	γ_i	ξ_i	K_f
$S1 = \alpha X_2^2 + X_1 - X_0$ $\begin{cases} X_2 > 0 \\ X_2 < 0 \end{cases}$	$\begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}$	0
$S2 = X_2 - V$	1	-0.5	0.125	-1	
$S3 = -\alpha X_2^2 + X_1$ $\begin{cases} X_2 > 0 \\ X_2 < 0 \end{cases}$	$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ -0.5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0.125 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}$	
$S4 = \alpha X_1 + X_2$	1	-0.5	0.125	-1	0.074

表 3-3. 制御入力の各ゲイン

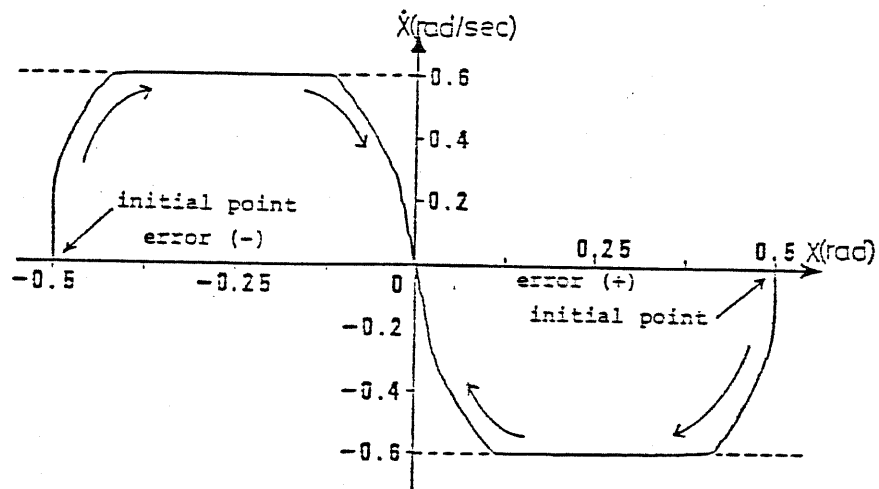


図 3-24. 位相面軌跡

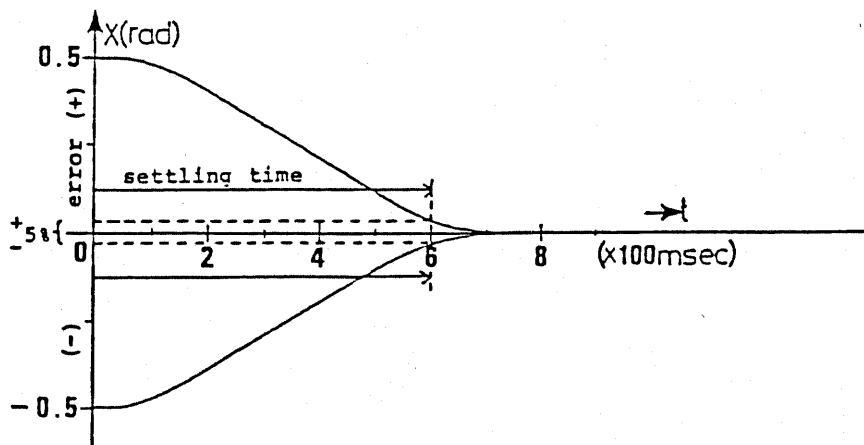


図 3-25. 時間応答

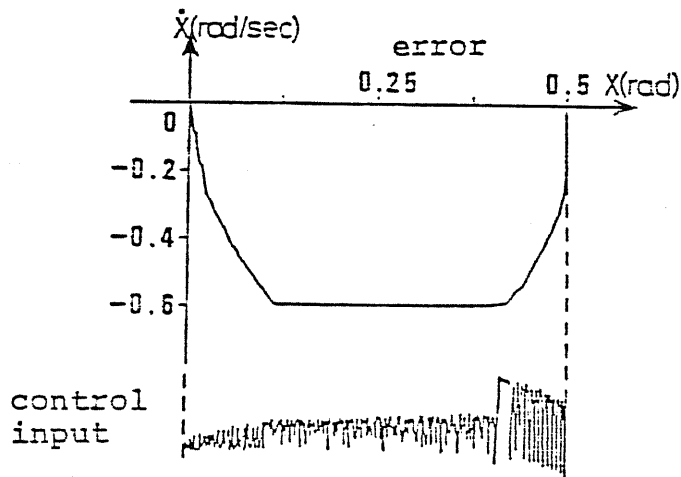


図 3-26. 制御入力の挙動

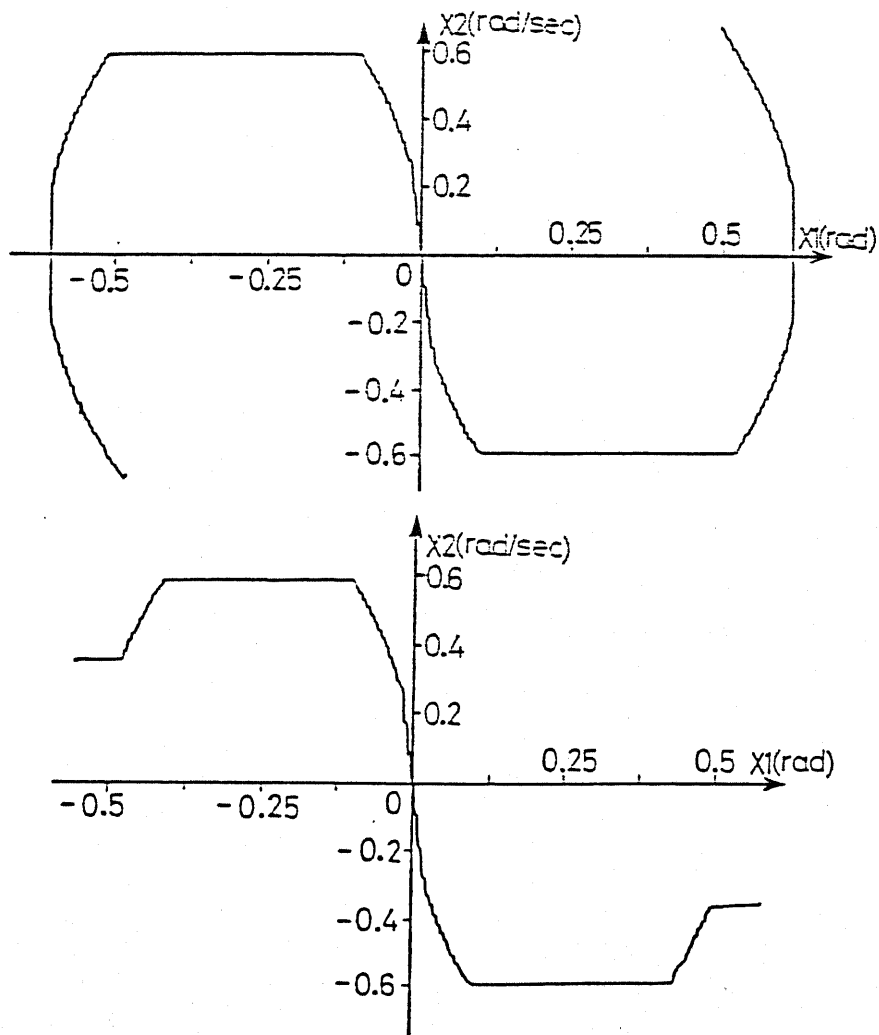


図 3-27. 初速度を持つ場合

第4章 ロボットアームへの適用

1自由度位置サーボ系での研究成果を基に、*Motion Control* の中心に位置するロボットアームへの応用を行っている。この応用の際、最大の問題となるのは多入力系 *Sliding Mode* の取扱である。本章では、従来提案されていた階層型 *Sliding Mode* ではなく実用性が高い分散型 *Sliding Mode* を提案し、実際に製作した2自由度直多関節型ロボットアームを用いてその有効性を確認している。さらに、前向き非線形補償、連続関数の導入、積分モードの設定等を提案し現実的な制御系の構築を行っている。なお、*Sliding Mode* をロボットへ応用する研究は次第に多くなっているが、実システムに対して実験を行った報告はない。

4-1. はじめに

作業空間を広く取れる多関節型ロボットアームは優れた構成法である。現在、産業用ロボットとして多種多様な多関節型アームが製作され、使用実績を積み重ねてきている。しかし、多関節型アームでは、姿勢によって慣性モーメントが大きく変化し、各関節には遠心力・コリオリの力といった非線形トルクが生じる。今後、アームの高速化、ダイレクトドライブ化等のハードウェアでの進歩を考えると、これらの影響が動特性に大きく表れることになる。

このような特徴を持つアームに対して通常は、各関節の相互干渉ループを断ち切って1自由度位置サーボ系として古典的な制御系設計を行ってきた。事実、減速比が十分大きく動作速度が小さければ、これらの変動（慣性モーメントの変化、遠心力、コリオリの力等）はモータ軸換算で無視できる。しかし、現在のハードウェアの指向は、高速化そして減速器なしのダイレクトドライブ化であり、通常の制御系（1入力1出力）では動特性の劣化が生じる。即ち制御面での高度化が、ハードウェアの進歩とともに要求されてきている。

本章では、多関節型アームを非線形多変数システムとして捉えて、可変構造系を適用することによって、非干渉化およびロバスト制御を実現する。

4-2. ロボットアームの制御

ロボットアーム制御に関する研究は現在のところロボティクス研究の中心に位置している。1960年代に登場したパーサトライト・ユニメーションがしばらくの間ロボット（産業用ロボット）の代名詞として通用していた。その頃の研究の中心は運動学に関するものであり、座標間どうし（関節角座標と作業座標）の変換

が研究の中心であった。現在では、ロボットアーム自身が視覚センサを持ち外界を認識し障害物回避等の知的行動が可能となる程進歩したので、ロボットアーム制御研究の中心もその方向（知能化）へ移行しつつある。

しかし、アームの動的な部分即ち動作の制御は未だに解決すべき問題として考えられている。それは、

①動作(motion)の機能がなくては外界に働きかけることが出来ない

②要求される動作が高度になってきている

という当然な理由からである。特に②に関して言及するなら動作の目標は人間の腕そして指であり、物を把握して作業するという強調制御が最重要な課題に成りつつある。

それでは、ロボットアームの制御にはどのような問題が存在するのか。三直多関節型アームを考えると次の5つの問題点が挙げられる。

①機構が複雑である

②腕を積み上げた構造のため各腕の誤差が蓄積される

③本質的に不安定な系である

④動的なパラメータ変動が大きい

(作業対象に依存する～即ちPayloadの変動)

⑤機構部分での摩擦等のモデリング困難な部分がある

①は機構学の問題であり、Denavit-Hartenbergの方法あるいは同時変換を用いて関節角空間と作業空間との間は結ばれている。現在の問題はロボットの動力学をいかに早くかつ正確に求めるかであり、順動力学（アクチュエータからアームへの方向）逆動力学（アームからアクチュエータへの方向）として定式化され研究されている。Newton-Euler法による動力学の導出はリアルタイムでのロボットアーム制御の可能性を大きく前進させ複数のマイクロプロセッサによる並列処理を用いるといった話題にまで展開している。②は、先端部分の検出を行うか、ダイレクトドライブ化にして誤差を小さくするという方法が考えられる。また、素材そのものの剛性を考慮した研究もあり、弾性アームといった研究とも関係する。

純粹に制御の問題として考えられるのは③④⑤である。制御の立場からいえば、ロボットアームとして特定する必要はなく、与えられたプラントの性質（伝達関数あるいは伝達関数行列）が利用できれば一般の問題として解くことが出来る。特に、パラメータ変動等があるのでロバスト安定等の問題へ帰着できる。

ごく最近までのロボットアームの制御は、動力学で得られた成果をもとにアー

ム先端に要求される動作（位置・速度・加速度即ち力）を各関節に分解して通常の（古典的）フィードバック制御を用いる程度であった。運動制御で多くのアプローチが取られだしたのはごく最近のことである。

4-2-1. 多関節型アームのダイナミックス

3次元空間でハンドの位置・姿勢を決めるには最低6自由度必要である。位置 (x, y, z) と姿勢を表すオイラー角 (ϕ, θ, ψ) の6つの変数である。ここでは、姿勢を考えずに位置のみを扱う場合を考えてダイナミックスを導出する。対象とする多関節型アームは図4-1に示す3自由度直多関節型アームである。アームダイナミックスの導出には解析力学で扱うラグランジアン方程式を用いる。

アームの運動方程式はラグランジアン L を用いて

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = T_i \quad (i=1,2,3) \quad (4-1)$$

と表される。ラグランジアン L は K を運動エネルギー、 P を位置エネルギーとすると $L=K-P$ で表される。運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2} \dot{\theta}^t R(\theta) \dot{\theta} \quad \theta^t = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (4-2)$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & r_{22}(\theta) & r_{23}(\theta) \\ 0 & r_{23}(\theta) & r_{33}(\theta) \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

である。ここで、 $R(\theta)$ の各成分は

$$r_{11}(\theta) = m_2(S_2 \sin \theta_2)^2 + m_3(l_2 \sin \theta_2 + S_3 \sin(\theta_2 + \theta_3))^2 + I_{1z} + I_{2x}(\sin \theta_2)^2 + I_{2z}(\cos \theta_2 + I_{3z}(\cos(\theta_2 + \theta_3)))^2$$

$$r_{22}(\theta) = m_2 S_2^2 + m_3(l_2^2 + S_3^2 + 2l_2 S_3 \cos \theta_3) + I_{2y} + I_{3y}$$

$$r_{33}(\theta) = m_3 S_3^2 + I_{3y}$$

$$r_{23}(\theta) = m_3(S_3^2 + l_2 S_3 \cos \theta_3) + I_{3y}$$

(4-4)

である。この(4-4)の導出はかなり煩雑なので付録に示す。また、位置エネルギー P は

$$P = m_2 g S_2 \cos \theta_2 + m_3 g (l_2 \cos \theta_2 + S_3 \cos(\theta_2 + \theta_3))$$

(4-5)

となる。(4-4)(4-5)で、 g は重力定数、 S_i は各回転軸から重心までの距離、 m_i はリンクの重量、 l_i はリンクの長さである。 I_{iA} はリンク i の A 軸回りの慣性モーメントである。

以上の関係から(4-1)式は、

$$R(\theta) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 \dot{\theta} \frac{\partial R(\theta)}{\partial \theta_i} \right\} \dot{\theta} + g(\theta) = T$$

$$g_i(\theta) = \partial P / \partial \theta_i$$

(4-6)

と書ける。

一方、第 i 関節のアクチュエータ（他励直流サーボモータ）の生成トルクは

$$T_{ai} = K_i i_{ai} = r_i T_i + J_i \dot{\omega}_i + b_{0i} \omega_i$$

(4-7)

である。 $r_i (\leq 1)$ は減速比、 J_i はモータのシャフトと減速器からなる慣性モーメント、 b_{0i} は減速器の粘性摩擦係数である。 $\theta_i = r_i \omega_i$ と電機子電流に関する等式（図4-2参照）

$$L_{ai} \frac{d}{dt} i_{ai} + R_{ai} i_{ai} + E_i = v_{ai} \quad (4-8)$$

を用いて、電機子時定数 $\tau_{ai} = L_{ai}/R_{ai}$ が十分小さいと仮定すれば

$$i_{ai} = (v_{ai} - E_i) / R_{ai} \quad (4-9)$$

が得られる。ここで、この仮定を用いないとダイナミックスが3次系になるが、多くの系では電気系の応答は機械系の応答より10倍以上速いので(4-9)は妥当な仮定である。さらに、 $E_i = K_i \omega_i$ とおくと、駆動トルクは

$$T_i = -\frac{J_i}{\tau_i^2} \ddot{\theta}_i - \left[\frac{b_{0i} + k_i^2 / R_{ai}}{\tau_i^2} \right] \dot{\theta}_i + \frac{K_i}{\tau_i R_{ai}} v_{ai} \quad (4-10)$$

と求まる。ここで、

$$\begin{aligned} B_0 &= \text{diag}(b_{11}, b_{22}, b_{33}) & b_{ii} &= \frac{b_{0i} + k_i^2 / R_{ai}}{\tau_i^2} \\ K &= \text{diag}(k_{11}, k_{22}, k_{33}) & k_{ii} &= k_i / (\tau_i R_{ai}) \\ J &= \text{diag}(J_{11}, J_{22}, J_{33}) & J_{ii} &= J_i / \tau_i^2 \end{aligned} \quad (4-11)$$

と記述すると、

$$T = -J \ddot{\theta} - B_0 \dot{\theta} + KV \quad (4-12)$$

が得られる。この(4-12)を(4-6)に代入して、3自由度アームのダイナミックスを

$$(J + R(\theta)) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 \dot{\theta} \frac{\partial R(\theta)}{\partial \theta_i} \right\} \dot{\theta} + B_0 \dot{\theta} g(\theta) = KV \quad (4-13)$$

と得る。

(注意1) この節でのダイナミクスは3自由度のみのアームの定式化であり、通常のロボットアーム(6自由度)のものは求めていない。また、各リンクが完全な剛体であると仮定しているが、現在のアーム素材の開発方向は軽量化・低剛性化であり弾性アームとしての定式化が要求されつつある。

(注意2) 現在の産業用ロボットでは、ギヤ比が大きいため減速比 τ_i は小さくなりアーム側に換算したモータの慣性モーメント $J_{ii}=J_i/\tau_i^2$ はかなり大きくなる。その結果、 $J+R(\theta)$ の θ に依存する $R(\theta)$ の影響は相対的に小さくなり動特性に影響を与えなくなっている。

4-2-2. 多関節型アーム制御の基本方針

(4-13) 式から、アームとアクチュエータを含めたダイナミクスは非線形で各パラメータがアームの姿勢・位置に依存していることが分かる。この様な対象に1入力1出力系として設計された線形フィードバックを施すと、減速比 τ_i が1に近く動作速度が大きな場合(ダイレクトドライブ使用時など)にはパラメータ変動の影響が動特性に表れる。これに対して、最も良い制御法として図4-3に示す動的制御が考えられる。これは、アームに与えられる運動軌跡 $\theta_d(t)$ (時間多項式で与えられるものとする)をアームの運動方程式(4-13)に代入して必要な駆動トルクを求めそのトルクをアクチュエータからアームへ供給する方法である。完全なフィードフォワード型の制御である。この際、(4-13)が現実のアームに一致していれば、 $\theta_d \rightarrow \theta$ の伝達関数は1となり初期値が一致してさえいけば任意の時刻 t で $\theta_d(t)=\theta(t)$ の理想的な応答が得られる。現実には、(4-11)が現実アームと正確に一致するとは考えられない。測定誤差、計算誤差(丸め等)あるいはパラメータ(物性値)の変動、未知の外乱(負荷変動・摩擦等)によって θ_d と θ は一致しない。これに対処するために、従来制御系のように閉ループを作り θ_d と θ との誤差を0にする補償器を加える。 θ と $\dot{\theta}$ は直接測定できるものとして、図4-4の制御系が最も現実的である。慣性力・遠心力・コリオリの力・重力は現在値 θ 、 $\dot{\theta}$ を用いてリアルタイムで補償される。そして、負荷変動・摩擦・パラメータの見積誤差等はサーボ補償器が担う。

以上は、位置制御のみに関して述べたが、速度制御・力制御においても基本的な考え方は同じである。

4-3. 可変構造系の適用

多関節型アームの制御では、干渉項の大部分は (4-13) の計算によるフィードフォワード項によって取り除かれる。残った部分をサーボ補償器が引き受ける。即ち、 $e = \theta_d - \theta$ としたとき、 e, \dot{e} を 0 にするのがサーボ補償器の働きである。このときの e に関しては *step* 状のものを考えておけば良い (ランプ状以上の e は通常のロボットの作業では希である)。また、アームの制御であることを考えると、収束に時間を要するタイプまたオーバーシュートを有するタイプ (壁等に衝突し相手あるいは自分自身を損傷する可能性がある) の制御器は好ましくない。よって、積分器構成のものは避ける方がよい。確かに内部モデル原理を用いるとロバストであるがオーバーシュートを押さえるために応答が遅くなるという不満が残る。

これに対して積分器を持たない可変構造系の制御器はオーバーシュートがなくかつ速い応答が可能である。特に、2次系における *Sliding Mode* はこの様な要求を満足する。*Sliding Mode* 制御系の特徴は次の3点である。

①オーバーシュートがない

(切り換え面を位相面上の直線に選んだ場合)

②ロバストである

(制御対象が切り換え面の方程式に取って代わられるから)

③応答が速い

(指数安定でなく有限時間到達の性質を有するから)

(注意1) 可変構造系は、通常の連続制御系と異なり指数安定性 (極が左半平面に存在する場合) を得るのではなく、有限時間で $s=0$ の超平面に達するという特徴を持つ (第2章第8章参照)。これは、大抵の場合速い収束を意味する。本来可変構造系において切り換え面を最適切り換え面に選べば最短時間制御が実現できるので、通常の可変構造系は最適性を犠牲にしてロバスト性を確保しているといえるからである。もっと厳密にいうなら連続入力を施す限り平衡点に達することは出来ない。あくまでも $t \rightarrow \infty$ で平衡点に到達するといえない。

(注意2) ここでは、サーボ補償器として可変構造系あるいは *Sliding Mode* を適用しているが、非線形プラントに対する適応制御系の収束性の確保に用いている研究もある。

4-3-1. 可変構造系による設計

サーボ補償器として、可変構造系に基づいた *Sliding Mode* 制御を用いる。このとき、設計において次の問題点がある。

① *Sliding Mode* 制御系は *Sliding Mode* が生じている間はロバストであるが *Sliding Mode* が生じるまでの間はロバスト性が失われている。

② *Sliding Mode* 制御系は積分器を持たないので外乱に対しては偏差が残る（外乱がなければポジションフリーなシステムだから偏差はない）。

以上の問題点を踏まえた上で設計を行う。

問題の定式化

マイクロプロセッサによる制御系を構成するので離散系の扱いが必要になるが、サンプリングが十分速いという仮定のもとで連続系として設計を考える。

・ロボットアームのダイナミックス

ロボットアームのダイナミックスは一般に次の様に記述される。

$$M(\theta)\ddot{\theta} + f(\theta, \dot{\theta}) + V(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta) = u \quad (4-14)$$

ただし、 $\theta^t = [\theta_1, \dots, \theta_n]$ は各関節角、 $M(\theta)$ は慣性行列、 $V(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}$ は摩擦項、 $f(\theta, \dot{\theta})$ はコリオリの力と遠心力、 $g(\theta)$ は重力項を表わす。この(4-14)に従って設計を行なう。なお、通常は関節の数は6 ($n=6$)である。また制御入力 u を除いてどの項も連続である。

・制御入力

制御入力 u には物理的な制限である飽和が存在する。各制御入力は正負に関して対称であるとする

$$|u_i| \leq u_{imax} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4-15)$$

である。また、 u_i は第一種の不連続点を有限個までは有しても良いとして、区分的連続であるとする。第一種の不連続点とは、不連続点 a において

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+) \quad (4-16)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-) \quad (f(a+) \neq f(a-))$$

の極限が存在する点をいう。今後の議論を明らかにするために不連続点における u_i の値を左極限

$$u_i(a) = u_i(a-0) \quad (4-17)$$

に等しいものとする。これから制御入力 u は

$$u \in U \quad U: \text{有界閉集合} \quad (4-18)$$

となる。

・切り換え面の設定

状態空間内に設定される切り換え面（超平面） s を

$$s = [C \quad I_n] \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = 0 \quad (4-19)$$

$$s^t = [s_1, s_2, \dots, s_n]$$

ただし、

$$e := \theta - \theta_d$$

$$C = \text{diag}[c_1, c_2, \dots, c_n] \quad c_i > 0$$

θ_d : Desired path

とおく。 θ_d は 1 点あるいは時間多項式で表される軌道とする。この(4-19)を出力方程式と見ると、Sliding mode 制御系の設計はいわゆる出力零化問題に相当する。

この切り換え面の設定は、 $2n$ 次元の状態空間を n 個の位相面に分解することに相当する。各サブシステム ($s_i = 0$) 間の相互干渉は外乱として処理される。

4-3-2. PTP動作とCP動作

ロボットアームの動作には、初期値と目標値とが与えられその間の経路は特に指定しない *PTP* (*Point To Point*) 動作 (図4-5 (a)) と経路を指定する *CP* (*Continuous Path*) 動作 (図4-5 (b)) がある。前者の *PTP* 動作は *Step* 応答に相当し、後者の *CP* 動作は軌道制御に相当する。

PTP 及び *CP* 動作に要求される指標は

- ①定常偏差がない
- ②速い応答
- ③オーバーシュートがない

である。

設計においては、*PTP* 動作では初期値から切り換え面に到達するまでのロバスト性の劣化が生じる。この劣化に対して時変切り換え面の設定を行う必要がある。*CP* 動作では動作点が最初から平衡点に近いので時変切り換え面の必要はない。

4-4. 実験システム

可変構造制御系の有効性を試作した2自由度垂直多関節型ロボットアームによって確認する。空間で点を指定するには最低3自由度必要であるが、制御系の有効性の確認には2自由度で必要な情報が得られる。相互干渉力、コリオリの力が2自由度アームで生じるからである。

試作した2自由度アームの概観を図4-6に示す。各アームは30cmの長さを持ち、各アクチュエータ (*D.C.*サーボモータ) が80:1のハーモニックドライブを介してアームに直結されている。アクチュエータの仕様を表4-1に示す。また、このアームは相互干渉力、コリオリの力が生じ易い構造をしており、先端部分は *Payload* (0kg~4kg) の着脱が可能となっている。

4-4-1. 試作アームのダイナミクス

組立て前の各部分の形状及び重量から、試作アームのダイナミクスを計算する。アーム側に換算したダイナミクスは、*Payload*を2kgにしたとき、

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}(\theta) & a_{12}(\theta) \\ a_{12}(\theta) & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{12}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + P_1 + v_1 \dot{\theta}_1 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1^2 + P_2 + v_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-20}$$

$$\begin{aligned}
 a_{11}(\theta) &= 4.20 + 4.42 \times 10^{-1} \cos \theta_2 \\
 a_{12}(\theta) &= 1.91 \times 10^{-1} + 2.21 \times 10^{-1} \cos \theta_2 \\
 a_{22} &= 8.21 \times 10^{-1}
 \end{aligned} \tag{4-21}$$

$$P_1 = -2.85 \times 10 \sin \theta_1 - 7.21 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad v_1 = 7.80$$

$$P_2 = -7.21 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad v_2 = 3.20$$

と求まる。(4-21)は計算値であるが、摩擦項 v_1, v_2 は各関節を分離して実測したものである。この摩擦項は動作状況によって大きく変わるもので実測値は平均値を取っている。*Payload*を0kgから4kgへと変えたときの各パラメータを表4-2に示す。慣性モーメントの変化は80:1のハーモニックドライブによって著しく押さえられている(アクチュエータの慣性モーメントがアーム側に換算されると80の自乗倍になる)。しかし、重力項に関してはその変動は大きい。

4-4-2. システム構成

制御系のシステム構成を図4-7に示す。アームからの利用できる情報としては各関節の位置と速度である。位置はアクチュエータに直結したパルスエンコーダ(1回転1000パルス)からの信号をカウントする。速度はアクチュエータに直結されたタコジェネレータの出力をA/D変換して取り込む。制御演算はINTEL-8086(8MHz)を用いて、制御指令はD/A変換してアクチュエータ駆動部分に送られる。アクチュエータ駆動部分はMOSFETを用いたPWM Chopperで構成されていて、PWMの中心周波数は10kHzである。

4-5. PTP動作に対する設計

PTP動作、CP動作の設計の基本的な考え方はどちらも同じであるが、ここでは、両者を分けて記述する。最初に、PTP動作に対する設計を述べる。

4-5-1. 時変切り換え面

PTP動作では各関節ごとの位相面は図4-8(a)となる。Sliding Modeが生じるまでは単なる線形フィードバックでありその範囲でのロバスト性しか得られない(但し、この場合でも制御入力は最大値を取っているのでロバスト性はかなり高い[第3章参照])。

これに対して図4-8(b)に示す時変切り換え面を導入する(注意1)。時間と共に c の傾きを変化させる手法である。各関節の切り換え面を

$$s_i = c_i x_{i1} + x_{i2} \quad \dot{x}_{i1} = x_{i2} \quad (i=1, \dots, n) \quad (4-22)$$

とすると、

$$\frac{\partial}{\partial t} c_i \neq 0 \quad (4-23)$$

である。この時変切り換え面を用いれば制御対象は初期値からSliding Modeに入り完全なロバスト性を有する。

(注意1) ここで導入した時変切り換え面は第3章で提案した可変Sliding Lineとは異なる。時変切り換え面は c_i の変化が前もって定められているが、可変Sliding LineはSliding Modeの有無を調べて傾き c を変える方法である。

4-5-2. 等価制御入力による非線形補償

(4-22)から

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{c}e + c\dot{e} + \ddot{e} \\ &= \dot{c}(\theta - \theta_d) + c\dot{\theta} + \ddot{\theta} \quad (\theta_d: \text{Constant}) \end{aligned} \quad (4-24)$$

$M(\theta)$ が正定行列であることを用いて(4-14)から

$$\ddot{\theta} = M(\theta)^{-1} [-f(\theta, \dot{\theta}) - V(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} - g(\theta) + u] \quad (4-25)$$

が得られる。この $\ddot{\theta}$ を(4-24)に代入して

$$\dot{s} = \dot{c}(\theta - \theta_d) + [c - M(\theta)^{-1} V(\theta, \dot{\theta})] \dot{\theta} - M(\theta)^{-1} f(\theta, \dot{\theta}) + M(\theta)^{-1} u \quad (4-26)$$

を得る。等価制御入力 u_{eq} は $\dot{s} = 0$ とおいて

$$\begin{aligned} u_{eq} &= f(\theta, \dot{\theta}) + V(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + g(\theta) - M(\theta) [c \dot{\theta} + \dot{c}(\theta - \theta_d)] \\ &= f(\theta, \dot{\theta}) + V(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + g(\theta) - M(\theta) [c \dot{\theta} + \dot{c}e] \end{aligned} \quad (4-27)$$

と得られる。 $(\theta, \dot{\theta})$ が測定可能で(4-25)の各項がリアルタイムで演算でき初期値が一致していれば

$$s = 0 \quad \dot{s} = 0 \quad (\forall t \geq 0) \quad (4-28)$$

が成立する。

しかし、現実には外乱等が存在するので安定性を得るために現実の制御入力としては、

$$u = u_{eq} + \Delta u$$

$$\Delta u_i(\theta, \dot{\theta}, t) = \begin{cases} \Delta u_i^+(\theta, \dot{\theta}, t) & \text{if } s_i > 0 \\ \Delta u_i^-(\theta, \dot{\theta}, t) & \text{if } s_i < 0 \end{cases} \quad (4-29)$$

を考える。この Δu によって *Sliding Mode* の存在を保証する。

この非線形補償は、モデルを $s = 0$ とした一種のモデル追従制御系と見なすことができる。

4-5-3. 設計方針

Sliding Mode が存在すれば、エラーシステムは

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c + \dot{c}c^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

となり、各関節は非干渉化され応答は $s=0$ に一致している。次に設計手順を示す。

1. 切り換え面の設定：

ロバスト性と速応性は相補的な関係にあるから、設計者側で設定する。

(注意) 対象が線形であれば、 LQ の手法を用いることが出来る。

2. 等価制御入力 u_{eq} を求める：

モデリング段階でのパラメータミスマッチング等が存在するので

$$\tilde{u}_{eq} = u_{eq} + \Delta u_{eq} \quad (4-31)$$

を用いる。

3. 制御入力 u を決める：

制御入力を

$$u = \tilde{u}_{eq} + \Delta u \quad (4-32)$$

とにおいて、各関節で *Sliding Mode* 存在条件

$$s_i \dot{s}_i < -\eta |s| \quad (\eta > 0) \quad (4-33)$$

を満たすように u を定める。(具体的には実験の項で示す)

4-5-4. 実験

試作した2自由度アームを用いて実験を行う。最初に、切り換え面の設定を行い、コントローラゲインを求める。

コントローラの設定

1. 切り換え面の設定：

二つのアームとも、

$$\max[c_i]=15 \quad \dot{c}_i=10 \quad (4-34)$$

と置く。

2. 制御入力構成:

等価制御入力による前向き補償を施すのだが、(4-20)(4-21)から重力項がほかの項よりも大きく支配的なので、前向き補償としては、

$$\tilde{u}_{ieq}=P_i \quad (i=1,2) \quad (4-35)$$

と置く。次に、 Δu_{eqi} を、

$$\Delta u_{ieq}=\psi_i+\xi \dot{e}_i+k_i \text{sign}(s_i) \quad (i=1,2)$$

$$\psi_i=\begin{cases} \psi_i^+ & \text{if } s_i e_i > 0 \\ \psi_i^- & \text{if } s_i e_i < 0 \end{cases} \quad \xi_i=\begin{cases} \xi_i^+ & \text{if } s_i \dot{e}_i > 0 \\ \xi_i^- & \text{if } s_i \dot{e}_i < 0 \end{cases}$$

$$s_i=\dot{e}_i+c_i e_i \quad (4-36)$$

とすると、制御入力は

$$u_i=\tilde{u}_{ieq}+\Delta u_{ieq} \quad (4-37)$$

になる。

3. 制御入力の決定:

(4-37)の制御入力を用いて *Sliding Mode* 存在条件を満足するコントローラゲインを求める。 $s_1 \dot{s}_1$ を計算する。

$$s_1 \dot{s}_1=(a_{11} a_{22}-a_{12}^2)^{-1}[(a_{22} \psi_1+(a_{11} a_{22}-a_{12}^2) \dot{c}_1) s_1 e_1+(a_{22} \xi_1-a_{22} b_1+(a_{11} a_{22}-a_{12}^2) c_1) s_1 \dot{e}_1+F_1 s_1+a_{22} k_1 \text{sign}(s_1) s_1] < 0$$

$$\text{ここで、} F_1=-a_{22} \left[\frac{\partial a_{12}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 + \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right] - a_{12} \left[u_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1^2 - b_2 \dot{e}_2 \right] \quad (4-38)$$

から、 $(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)$ が正であることを考慮して、

$$\begin{cases} a_{22}\psi_1^+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\dot{c}_1 < 0 & \text{if } s_1 e_1 > 0 \\ a_{22}\psi_1^-(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\dot{c}_1 > 0 & \text{if } s_1 e_1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{22}\xi_1^+ - a_{22}b_1 + (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)c_1 < 0 & \text{if } s_1 \dot{e}_1 > 0 \\ a_{22}\xi_1^- - a_{22}b_1 + (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)c_1 > 0 & \text{if } s_1 \dot{e}_1 < 0 \end{cases}$$

$$k_1 < -a_{22}^{-1} |F_1|$$

(4-39)

と選べば、*Sliding Mode* 存在条件を満足する。

s_2 についても同様な関係、

$$\begin{cases} a_{11}\psi_2^+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\dot{c}_1 < 0 & \text{if } s_2 e_2 > 0 \\ a_{11}\psi_2^-(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)\dot{c}_1 > 0 & \text{if } s_2 e_2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}\xi_2^+ - a_{11}b_2 + (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)c_1 < 0 & \text{if } s_2 \dot{e}_2 > 0 \\ a_{11}\xi_2^- - a_{11}b_2 + (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)c_1 > 0 & \text{if } s_2 \dot{e}_2 < 0 \end{cases}$$

$$k_2 < -a_{11}^{-1} |F_2|$$

$$F_2 = -a_{11} \frac{1}{a_{12}} \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1^2 - a_{12} (u_1 + \frac{\partial a_{12}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 - \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - b_1 \dot{\theta}_1) \quad (4-40)$$

が求まる。

以上の条件を満足するようにコントローラのゲインを表4-3に示すように選ぶ。標準 *Payload* は 2kg とする。

実験及び結果

アームの実験における試行を図4-9に示す動作とする。重力方向に各アーム

が1rad動く試行と、重力方向と逆に1rad動く試行である。実験の目的は、アームが重力による影響に打ち勝ってどちらの試行でも同じ動作同じ動特性を示すことにある。これによって可変構造系のロバスト性が確認される。

〔1〕位相面軌跡

重力方向(0rad→1rad)の位相面軌跡を図4-10に示す。図4-10(a)は Payload (4kg) を先端に付けている。一方、図4-10(b)は Payload を持たない場合である。コントローラは Payload が 2kg だとして設定してある。Payload の変動(0から4kg)に対して可変構造系がロバストであることを示している。また、全ての領域で Sliding Mode が生じているのがわかる。

図4-11に重力方向と逆の場合の試行を示す。Payload の有無に加えて、重力の影響が大きいのでコントローラにかかる負担は一層大きくなっている。上のアームの Payload がある時の試行の最初の部分で Sliding Mode が生じず重力の影響が見られる。

〔2〕時間応答

位相面軌跡では、位置の応答の挙動が明瞭でないので位置の時間応答を取る。図4-12に重力と逆方向の場合の位置の時間応答を示す。Payload の有無に関わらず殆ど同じ動特性を示しているのがわかる。

〔3〕制御入力・電機子電流・速度・位置の応答

制御入力の切り換えの影響を検討するため図4-13に示す制御入力・電機子電流・速度・位置の時間応答を測定した。切り替えの影響は積分効果(アームの持つ低域通過特性)により位置の応答には殆ど表れていない。これは、PTP動作のように過渡状態(目標値に到達するまで)が比較的短い場合には問題がない。過渡状態で切り換えの影響が少々でていても目標値でおさまっていればよい。CP動作では過渡状態が動作の殆どであるから切り換えの影響は無視できなくなる。

以上の実験結果から、可変構造系によるアームのPTP動作はロバスト性を有することが確認できた。特に、可変構造系を用いるとオーバーシュートが生じないので高速応答が要求されかつ Payload 或はパラメータが大きく変わる場合に適している。

4-6. CP動作に対する設計

前節ではPTP動作に対する設計を述べた。本節では、前節の結果を基にPTP動

作からCP動作への拡張を行う。特に、PTP動作では問題にならなかった制御入力切り換えの影響がCP動作では大きな問題になり、その解決として連続関数の導入及び積分モードの利用を行う。

4-6-1. 等価制御入力による非線形補償

これは、4-5-2. で述べたことと基本的に同じである。但し、ここでは、CP動作なので最初から動作点が平衡点の近傍に存在するので、時変切り換え面は用いない。この点が異なるだけである。

Sliding mode時の制御入力は低周波成分と高周波成分から構成される。この低周波成分を予め補償することにより制御入力の切り換え(*switching*) 幅を小さくして *chattering* を低減させることができる。低周波成分は等価制御入力 u_{eq} として $\dot{s}=0$ を解くことによって次の様に求められる。

$$u_{eq} = f(\theta, \dot{\theta}) + V \dot{\theta} + g(\theta) + M(\theta)(\ddot{\theta}_d - C\epsilon) \quad (4-41)$$

この u_{eq} を求めるには、アームの正確なモデリングが必要となるので現実には得られる等価制御入力は推定値を \tilde{u}_{eq} とおいて

$$\tilde{u}_{eq} = u_{eq} + \Delta u_{eq} \quad (4-42)$$

と得られる。 Δu_{eq} は特定はできないが、変動範囲が押さえられている未知ダイナミクスとする。この \tilde{u}_{eq} は前向き非線形補償としてアームの制御入力の一部を構成する。

4-6-2. 分散化 Sliding Mode の定式化

制御入力は、前向き非線形補償項 \tilde{u}_{eq} と Sliding mode 入力 Δu から

$$u = u_{eq} + \Delta u \quad (4-43)$$

と構成される。さらに、 Δu に対して次の変換

$$\Delta u = \tilde{M}(\theta) \Delta \tau \quad (4-44)$$

を考える。 $\tilde{M}(\theta)$ は慣性行列 $M(\theta)$ の推定値であり

$$M(\theta)^{-1}\tilde{M}(\theta)=I_n+\delta I(\theta)$$

$$-(1+(\delta D_{ii})) + \sum_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^n \sum_{j=1}^n |(\delta D_{ij})| < 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (4-45)$$

を満足するものとする。 $M(\theta)^{-1}\tilde{M}(\theta)$ が行対角優勢であれば非対角項を外乱とみなして多入力系を一入力系へ分解して従来の *Sliding mode* の設計が適用できる。このとき、

$$\frac{ds}{dt} = M(\theta)^{-1} \Delta u_{eq} + (I_n + \delta I(\theta)) \Delta \tau \quad (4-46)$$

から、

$$\frac{ds_i}{dt} = d_i(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) + (\Delta \tau_i + \sum_{j=1}^n (\delta I(\theta))_{ij} \Delta \tau_j) \quad (4-47)$$

となり d_i の変動範囲が押さえられていれば *Sliding mode* 存在条件 $s_i \dot{s}_i < 0$ を満足するように $\Delta \tau$ を選べる。 $\Delta \tau$ の形式には任意性があるが、リアルタイムの制御系を考慮して次の様におく。

$$\Delta \tau_i = (\psi_i |e_i| + \xi_i |e_i| + \kappa_i) \text{sign}(s_i)$$

$$s_i = \dot{e}_i + c_i e_i \quad (4-48)$$

4-6-3. 連続関数の導入

切り換えに起因する *chattering* を更に抑制するためリレー型関数 sign の代わりに

$$\text{sign}(s_i) \rightarrow \frac{s_i}{|s_i| + \delta_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad \delta_i: \text{positive constant} \quad (4-49)$$

なる連続関数を導入する。これは切り換えの近傍に比例帯を設定することと等価である。当然、ロバスト性は損われるが、*chattering* を大きく抑制できるため現実の制御系では必要な措置である。

4-6-4. 積分モードの導入

前節で導入した連続関数に対して、定常状態での位置誤差を補償する積分モードを考える。積分項をいれると、*Sliding Mode* の持つ遠応性の良さが損なわれる。そこで、定常状態のみで有効となる積分モードを導入する。定数であった δ_i を次の関数に置き換える。

$$\delta_i = \delta_{i0} + |\eta_i| \quad (\eta_i \propto \int s_i dt) \quad (4-50)$$

更に積分補償 ω を付け加えて、

$$\begin{aligned} \Delta \tau &= \omega \text{conti}(s) + \eta \\ \text{conti}(s) &= \left[\frac{s_1}{|s_1| + \delta_1}, \dots, \frac{s_n}{|s_n| + \delta_n} \right]^t \\ \eta &= [\eta_1, \dots, \eta_n]^t \end{aligned} \quad (4-51)$$

とする。このモードは s_i のノルムによって働くものとする。図4-14に示すように $|s_i| < \varepsilon_i$ のときには、上記の積分モードが働き、そうでないときは、 $\eta=0$ となる。即ち、これ自体が可変構造系となっている。

4-6-5. 目標軌道

CP動作の目標軌道としては図4-15に示す作業空間内の直線軌道を1秒間で動く様に設定した。各関節での目標位置、速度及び加速度はオフラインで計算してテーブルにしてオンラインで利用可能とする。関節角空間での目標軌道を図4-16に示す。始点と終点で速度・加速度が0であるように設定した。アーム先端部での最高速度は1.46m/sec である。

4-6-6. 制御入力決定

前向き補償項 u_{eq} はコリオリ・遠心力を未知ダイナミックスとみなした上で、

$$\tilde{u}_{eq} = V \dot{\theta} + g(\theta) + M(\ddot{\theta}_d - C \dot{\theta}) \quad (4-52)$$

とする。Sliding mode 制御入力 $\Delta \tau_i$ は Sliding mode 存在条件 $s_i \dot{s}_i < 0$ を満たすように決める。下の軸に関して、

$$s_1 \dot{s}_1 = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)^{-1} s_1 [-a_{22} f_1(\theta, \dot{\theta}) + a_{12} f_2(\theta, \dot{\theta})] + s_1 \delta \tau_1 < 0$$

$$f_1(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\partial a_{12}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$f_2(\theta, \dot{\theta}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1^2 \quad (4-53)$$

各ゲインは、

$$\begin{cases} \psi_1 < 0 \\ \xi_1 < -(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)^{-1} [-a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 - \frac{a_{12} \partial a_{11}}{2 \partial \theta_2} (2 \dot{\theta}_1 \dot{a}_d + \dot{e}_1)] \\ k_1 < -(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)^{-1} [a_{22} \frac{\partial a_{12}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 + a_{22} \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{a_{12} \partial a_{11}}{2 \partial \theta_2} \dot{\theta}_1^2] \end{cases} \quad (4-54)$$

同様に上の軸に関して、

$$s_2 \dot{s}_2 = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)^{-1} s_2 [a_{12} f_1(\theta, \dot{\theta}) - a_{11} f_2(\theta, \dot{\theta})] + s_2 \delta \tau_2 < 0$$

$$\begin{cases} \varphi_2 < 0 \\ \xi_2 < -(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)^{-1} [a_{12} \frac{\partial a_{12}}{\partial \theta_2} (2 \dot{\theta}_2 \dot{a}_d + \dot{e}_2) + a_{12} \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1] \\ k_2 < -(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)^{-1} [a_{12} (\frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dot{a}_d) + \frac{a_{11} \partial a_{11}}{2 \partial \theta_2} \dot{\theta}_1^2] \end{cases} \quad (4-55)$$

速度の最大値及びトルクの飽和を考慮して各ゲインは表4-4に示す値を用いる。厳密に考えると、このゲインに対応したSliding mode存在領域を考える必要がある。また、先の chattering 抑制の連続関数には $\delta=0.10$ を用いる。

4-6-7. 実験及び結果

目標軌道に沿わせる実験を行った。実システムで得られたサンプリング周期は1.25msecであった。

[1] アームの応答

図4-17に上のアーム（先端に近い方）の制御入力、電機子電流、速度及び位置の応答を示す。連続関数の導入により、PTP動作時より *Chattering* は著しく減少している。

可変構造系の欠点であった *Chattering* は連続関数によって取り除かれるが、追従誤差は大きくなっていると考えられる。次にこの点を検討する。

[2] 連続関数の影響

図4-18に連続関数の δ が異なる場合の制御入力の応答を示す。図4-18(a)(b)(c)はそれぞれ $\delta=0.00$ $\delta=0.10$ $\delta=0.50$ である。連続関数の効果は δ が大きくなるにつれ顕著である。一方、このときの追従位置誤差を図4-19に示す。 $\delta=0$ の時は振動的であるが位置誤差は小さい。 δ が大きくなるにつれ位置誤差が大きくなることがわかる。即ちロバスト性を失っている。

[3] ロバスト性

本制御則のロバスト性を確認するために、*Payload* 変動に対する位置誤差の応答を測定した。コントローラは *Payload* を2kgとして設計されている。図4-20に *Payload* が0~4kg変化するときの様子を示す。*Payload* が4kgの時に振動的になっているが位置誤差は変化せず可変構造制御系はロバスト性を有する。

次に、最も一般的な制御系であるPD制御との比較を行う。比較を行う際の指標の取り方を2Kg *Payload* の時オーバーシュートなく追従するように調整されている系のロバスト性とする。PD制御系は試行を繰り返し一応最適と思われる設定にしておく。*Payload* を4kgに変化させた際の位置誤差を図4-21に示す。可変構造系がロバストであることがわかる。また表4-5に比較の結果を示す。

[4] 積分モードの有効性

図4-22に定常誤差の残る可変構造系に積分モードを施した際の効果を示す。過渡状態では変わりがないが、定常状態で積分器が効果的に働き定常誤差を無くしている。

また、図4-23に軌道追従の途中で突然目標値が0になったときの可変構造系の挙動を示す。0へ復帰するために入力が最大になり *Sliding Line* に到達

してオーバーシュートなく新しい目標値0へ収束する。

4-7. おわりに

可変構造系をロボットアームに適用して、その有効性を実験によって確認した。簡単な制御則でロバスト性を得られることから、メカニカルシステムのようにリアルタイムの処理が要求される制御系には適していると考えられる。特に、*Sliding Mode* は切り換えが速ければ速いほど良い制御性能が得られるので、現在のパワーエレクトロニクス及びマイクロエレクトロニクスの成果が直接使うことのできる制御手法である。

参考文献

- [1] V.I.Utkin; *Sliding modes and their application in variable structure systems*, Moscow, Mir, 1978.
- [2] V.I.Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Modes," *IEEE Trans.on AC*, vol.AC-22, pp.212-222, 1977.
- [3] V.I.Utkin, "Variable structure systems, present and future," *Auto. and Remote Control*, 3, 5, 1983.
- [4] U.Itkis; *Control Systems of Variable Structure*, Wiley, New York, 1976.
- [5] O.kaynak, F.Harashima, H.Hashimoto, "Variable structures systems theory applied to sub-time optimal position control with an invariant trajectory,"(in English) *Trans.IEE of Japan*, Vol.104, No.3/4, Mar/Apr., pp.47-51, 1984.
- [6] F.Harashima, H.Hashimoto, S.Kondo, "MOSFET Converter-Fed Position Servo System with Sliding Mode Control," *IEEE Trans.on IE*, vol.IE-32, no.3, pp.238-244, 1985.
- [7] S.Lin,S.Tsai, "A Microprocessor-Based Incremental Servo System with Variable Structure," *IEEE Trans.on IE*, vol. IE-31, no.4, pp.313-316, 1984.
- [8] R.Venkataramanan, A.Sabanovic, S.Cuk, "Sliding Mode Approach for Speed Estimation in DC motors", *MOTOR-CON'85, Proceedings*,

October, 1985.

- [9] D.Borojevic, L.Garces, F.C.Lee, "Performance Comparison of Variable Structure Controls with PI Control for D.C. Motor Speed Regulation," *IEEE IAS Ann. Meeting*, pp.395-403, 1984.
- [10] C.Namuduri, P.C.Sen, "Variable Structure Control of A Self-Controlled Synchronous Motor (SCSM) Drive," *IEEE IAS Ann. Meeting*, pp.503-509, 1985.
- [11] F.Harashima, H.Hashimoto, H.Yamamoto, "Brushless Servo Motor Control Using Variable Structure Approach," To appear in *IEEE IAS Ann. Meeting*, September, 1986.
- [12] A.Sabanovic, D.B.Izozimov, "Application of Sliding Modes to Induction Motor Control," *IEEE Trans.on IA*, vol.IA-17, no.1, pp.41-49, 1981.
- [13] B.K.Bose, "Sliding Mode Control of Induction Motor," *IEEE IAS Ann.Meeting*, pp.479-486, 1985.
- [14] K.D.Young, "Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems," *IEEE Trans.on SMC*, vol. SMC-8, pp.101-109, 1978.
- [15] J.J.Slotine, .S.Sastry, "Tracking Control of Nonlinear Systems Using Sliding Surfaces, with Application to Robot Manipulators," *Int.J.Control*, vol.38, no.2, pp.465-492, 1983
- [16] J.J.Slotine, "On Modeling and Adaptation in Robot Control," *Proceedings of Robotics and Automation Conference*, pp.1387-1392, April, 1986.
- [17] F.Harashima, H.Hashimoto, K.Maruyama, " Sliding Mode Control of Manipulator with Time-Varying Switching Surfaces," (in English) *Trans.of Society of Instrument and Control Engineers*, Vol.22, No.3, pp.87-94, 1986.
- [18] F.Harashima, H.Hashimoto, K.Maruyama, "A Microprocessor-Based Robot Manipulator Control with Sliding Mode," *Submission to IEEE Trans.on IE*.
- [19] F.Harashima, H.Hashimoto, K.Maruyama, "Practical Robust Control of Robot Arm Using Variable Structure System," *Proceedings of Robotics and Automation Conference*, pp.532-539, April, 1986.
- [20] F.Harashima, H.Hashimoto, K.Maruyama, "Practical Realization

of VSS Controller for Robotic Arm," To appear in IECON'86, September, 1986.

[21] J.J.Slotine, "Sliding Controller Design for Nonlinear Systems," *Int.J.Control*, vol.40, no.2, pp.421-434, 1984.

[22] J.J.Slotine, "The Robust Control of Robot Manipulators," *Int.J.Robotics Research*, pp.49-64, 1985.

[23] G.Ambrosino, G.Celentano, F.Garofalo, "Variable Structure Model Reference Adaptive Control Systems," *Int.J.Control*, vol.39, no.6, pp.1339-1349, 1984.

[24] A.Balestrino, G.De Maria, L.Sciavicco, "An Adaptive Model Following Control for Robotic Manipulators," *ASME J.of Dynamic Systems*, vol.105, pp.143-151, 1983.

[25] A.Balestrino, G.De Maria, A.S.I.Zinober, "Nonlinear Adaptive Model Following Control," *Automatica*, vol.20, no.5, pp.559-568, 1984.

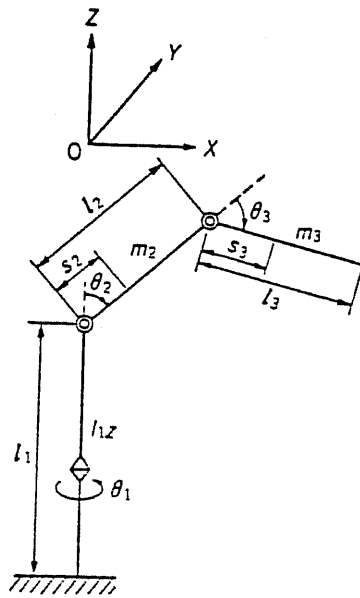


図4-1. 3自由度垂直多関節型アーム

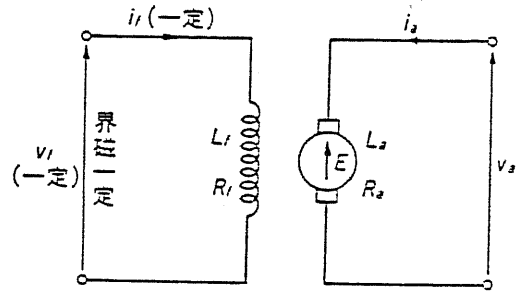


図4-2. 他励直流モータ

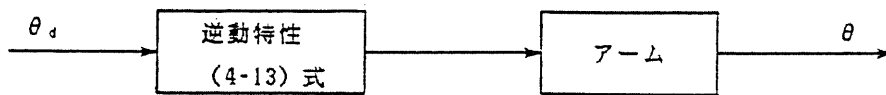


図4-3. 動的制御

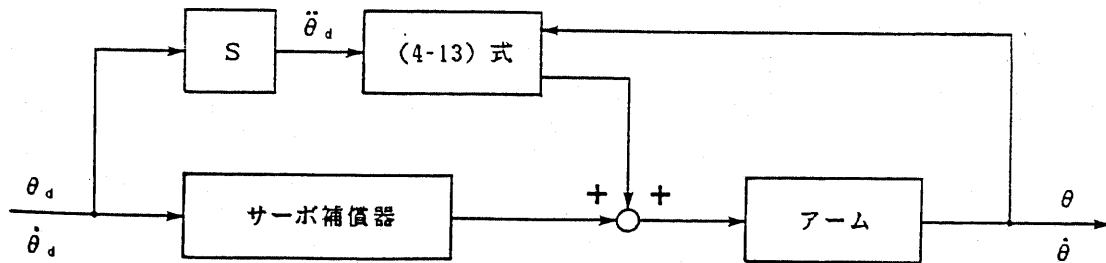


図4-4. サervo補償器を備えた動的制御

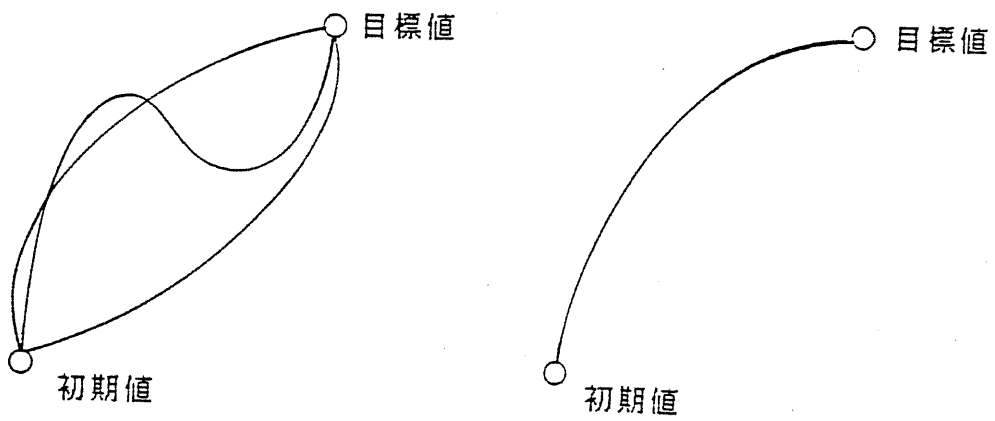


図4-5. (a) PTP動作 (b) CP動作

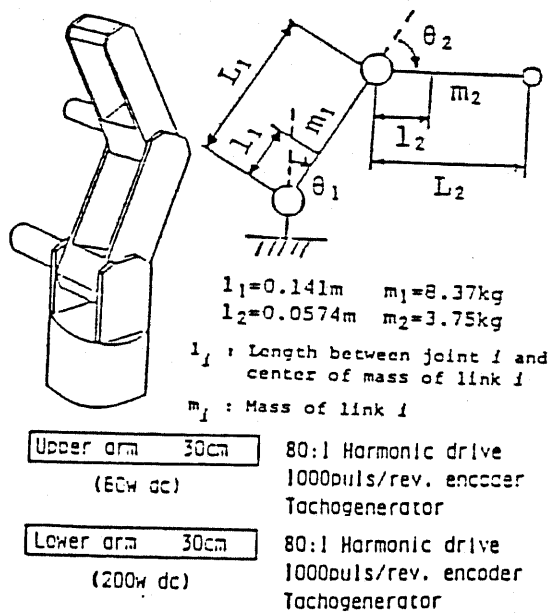


図4-6. 2自由度垂直多関節型アーム

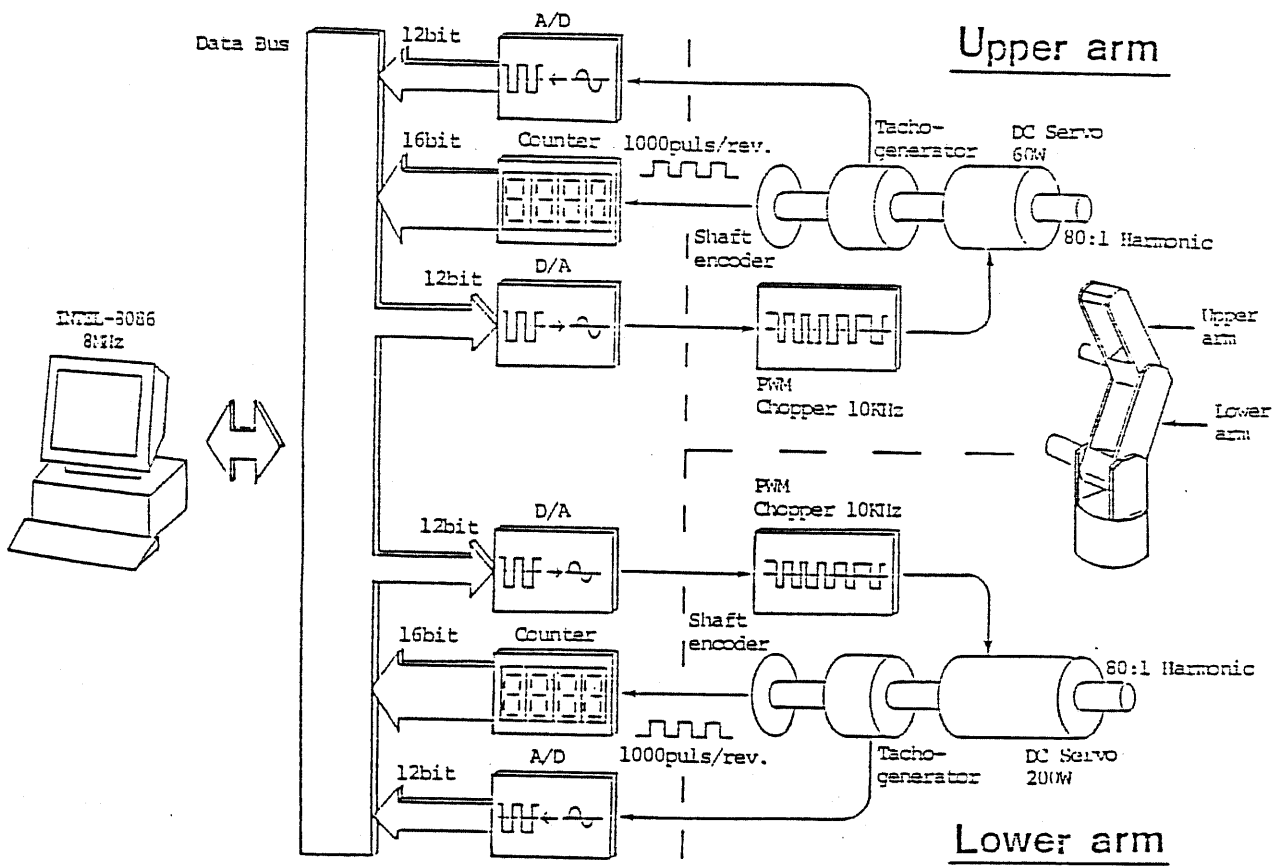


図4-7. システム構成

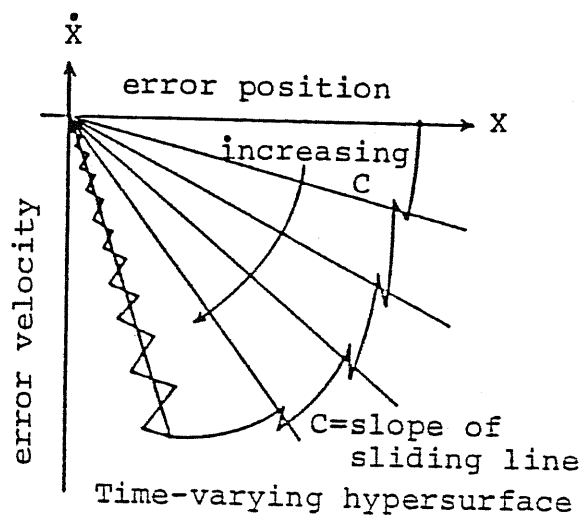
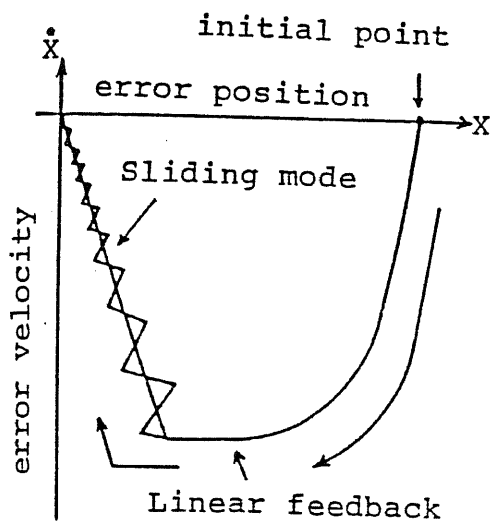


図4-8. (a) 切り換え面

(b) 時変切り換え面

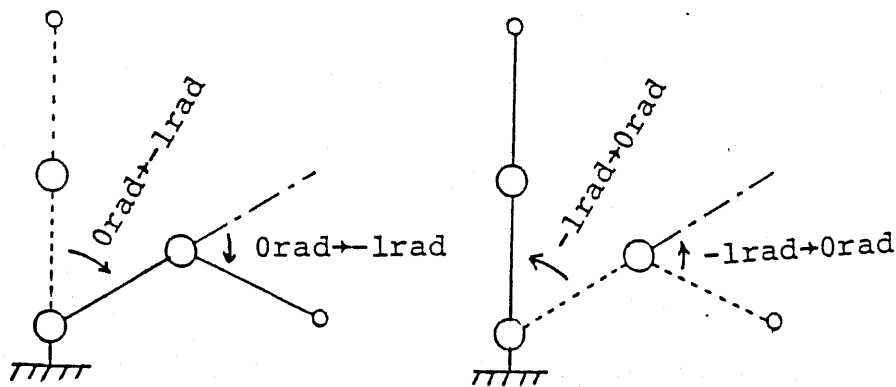
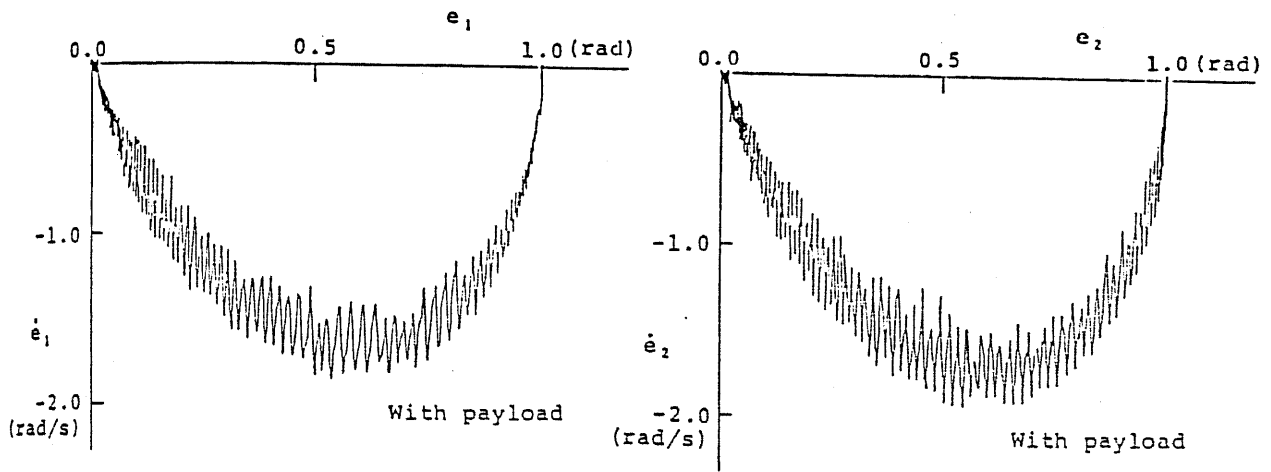
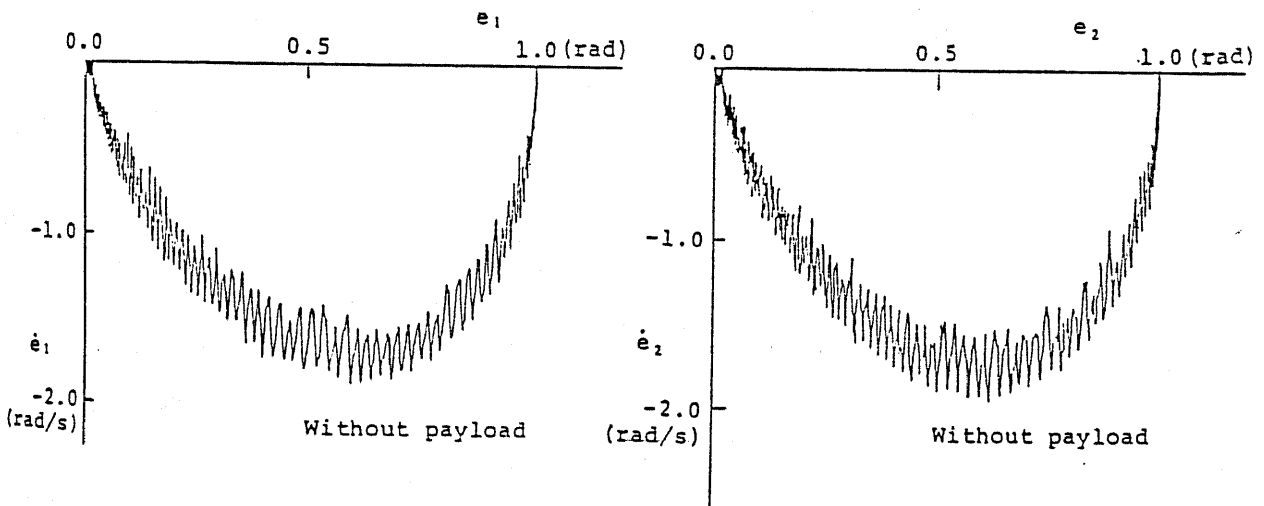


図4-9. PTP動作



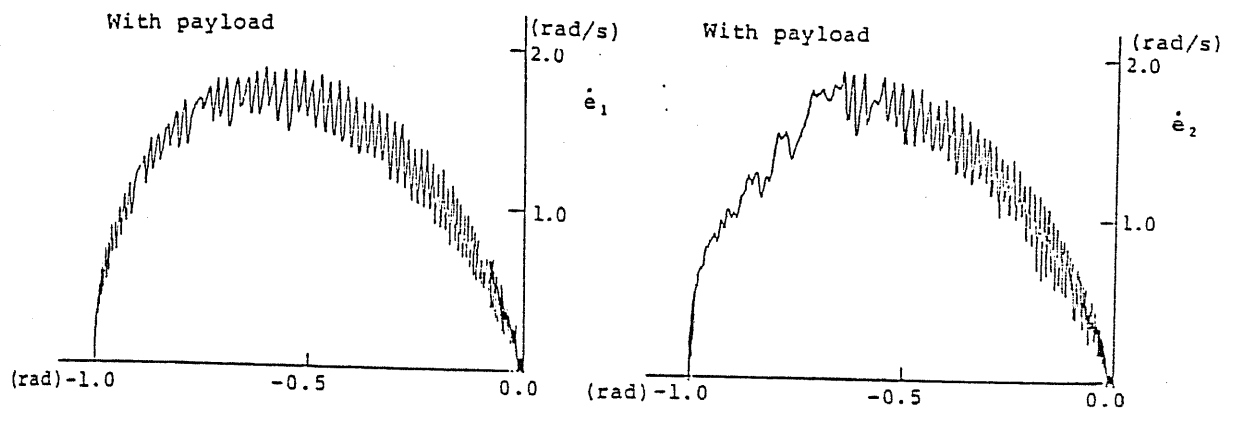
(a)



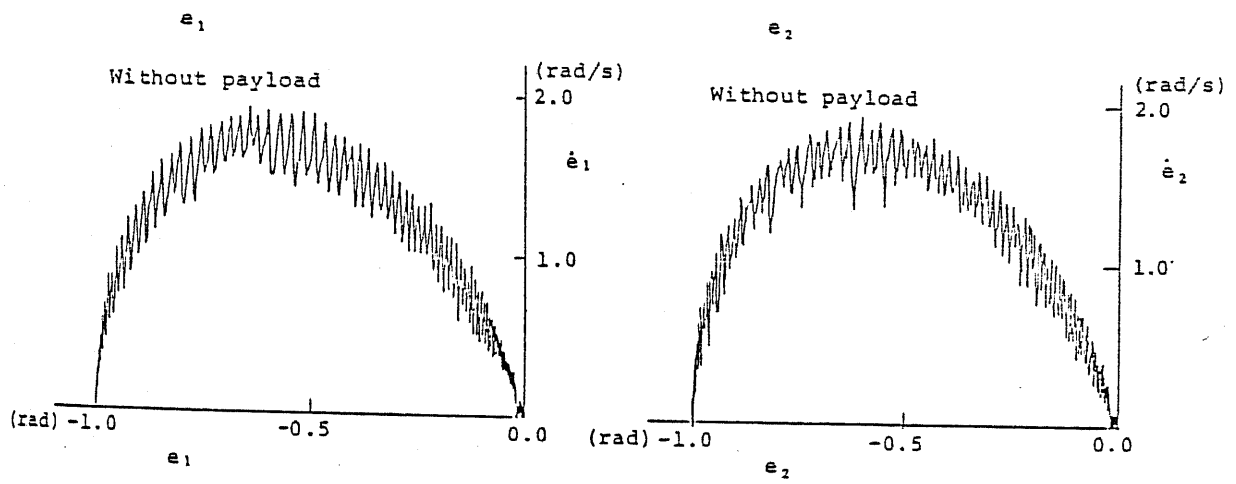
(b)

Phase-plane trajectories (0rad \pm 1rad)

图4-10. 位相面軌跡



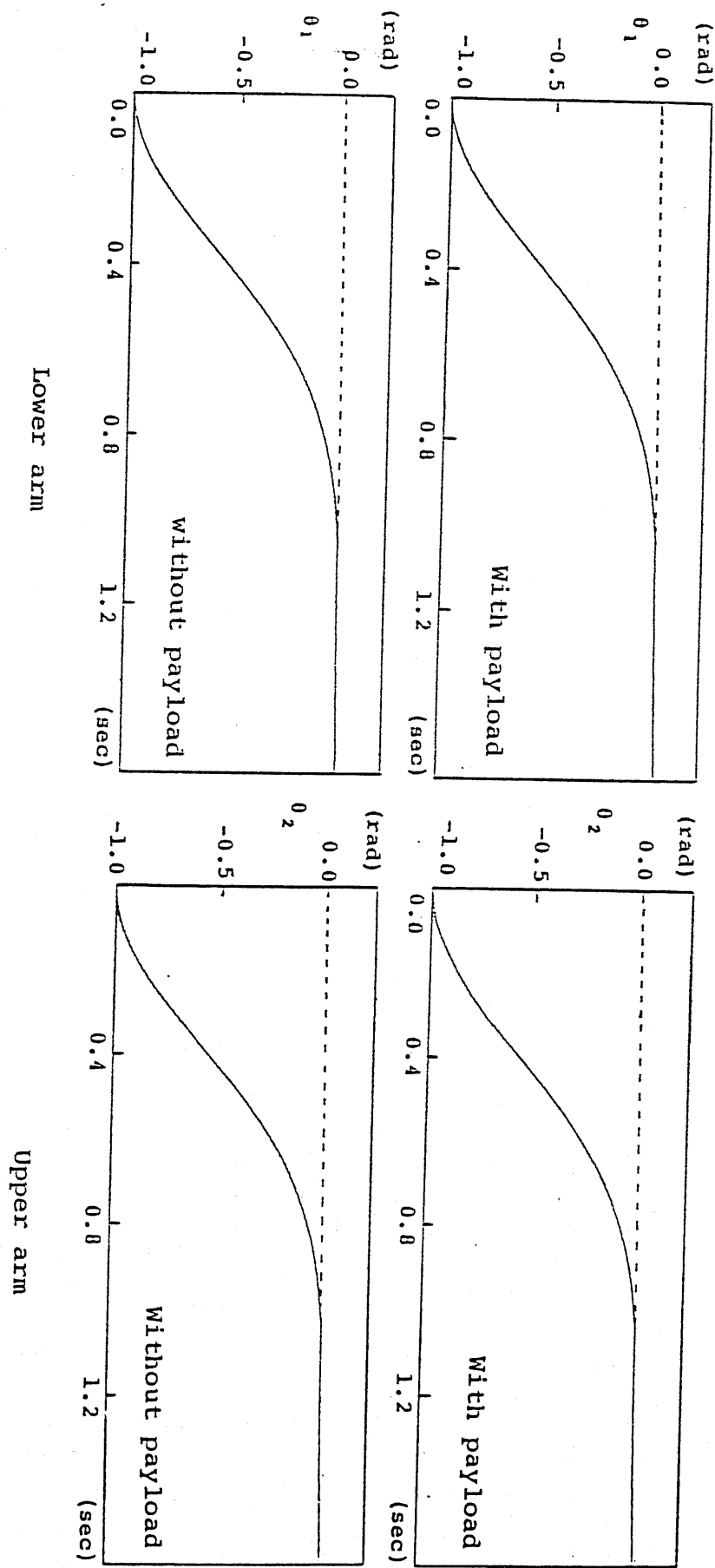
(a)



(b)

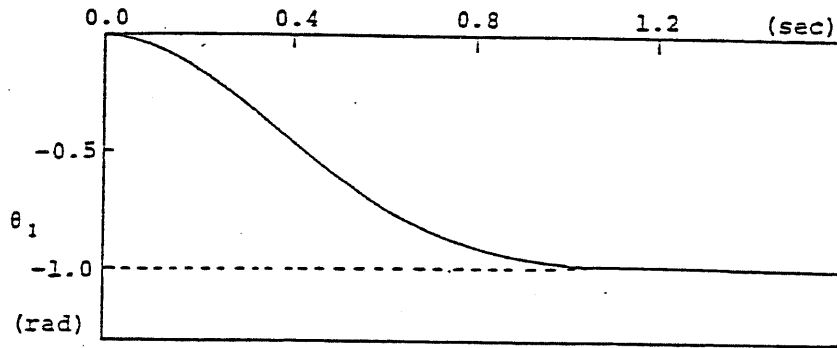
Phase-plane trajectories (-1rad → 0rad)

图 4-11. 位相面軌跡

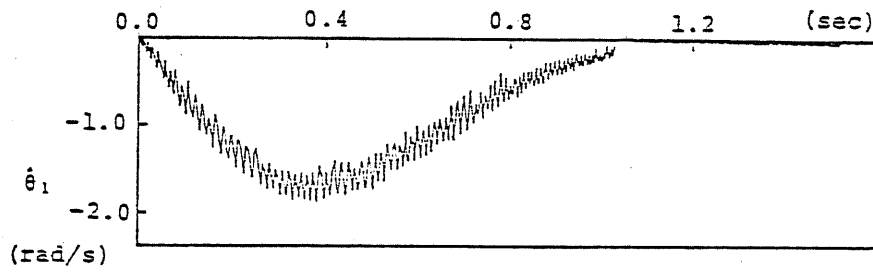


Position response (-1rad + 0rad)

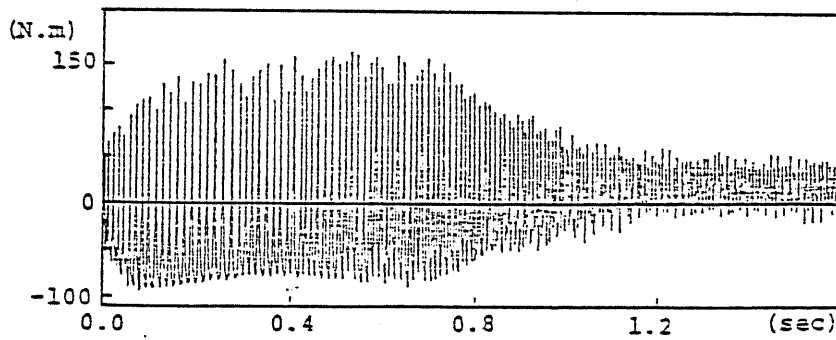
图 4-12. 位置応答



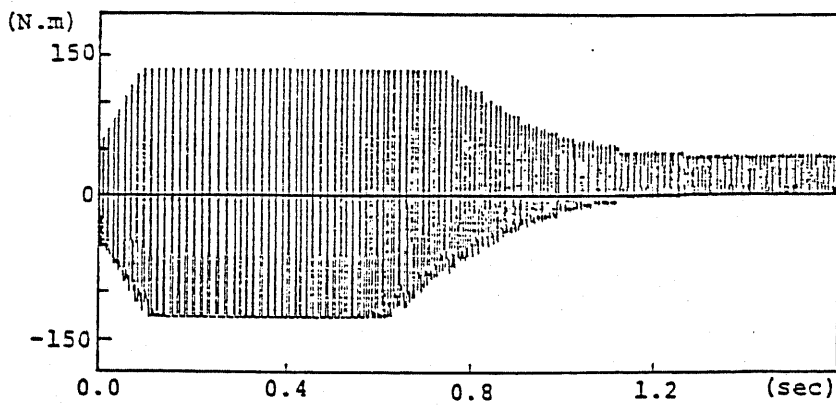
(a) Position response



(b) Velocity response



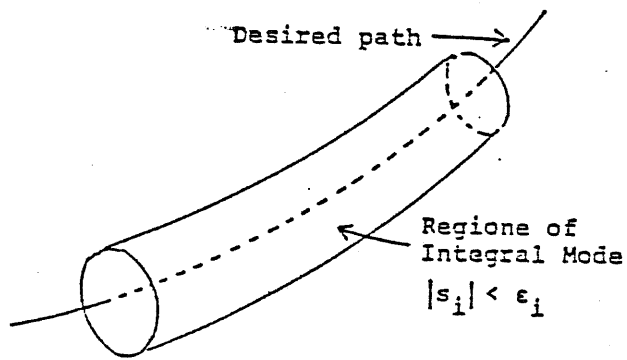
(c) Armature current



(d) Control input

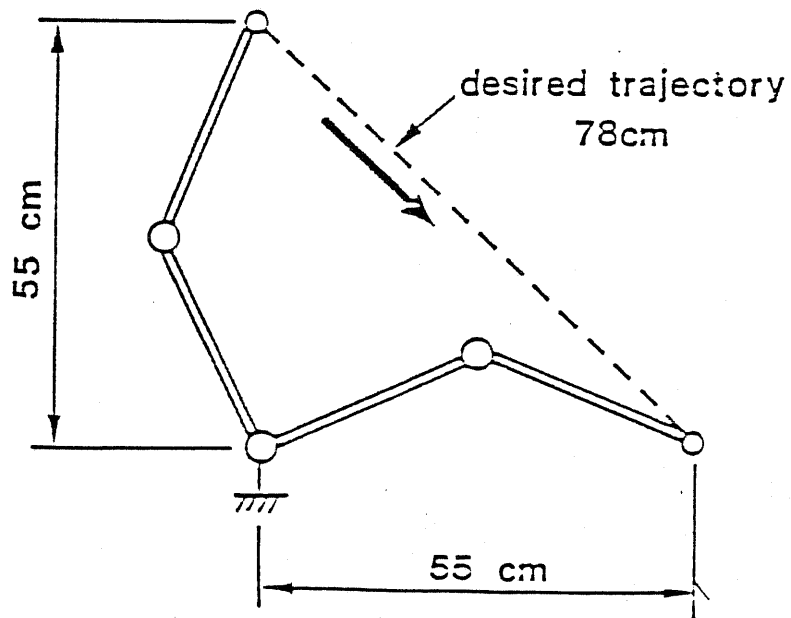
Time response (lower arm without payload)

图4-13. 時間応答



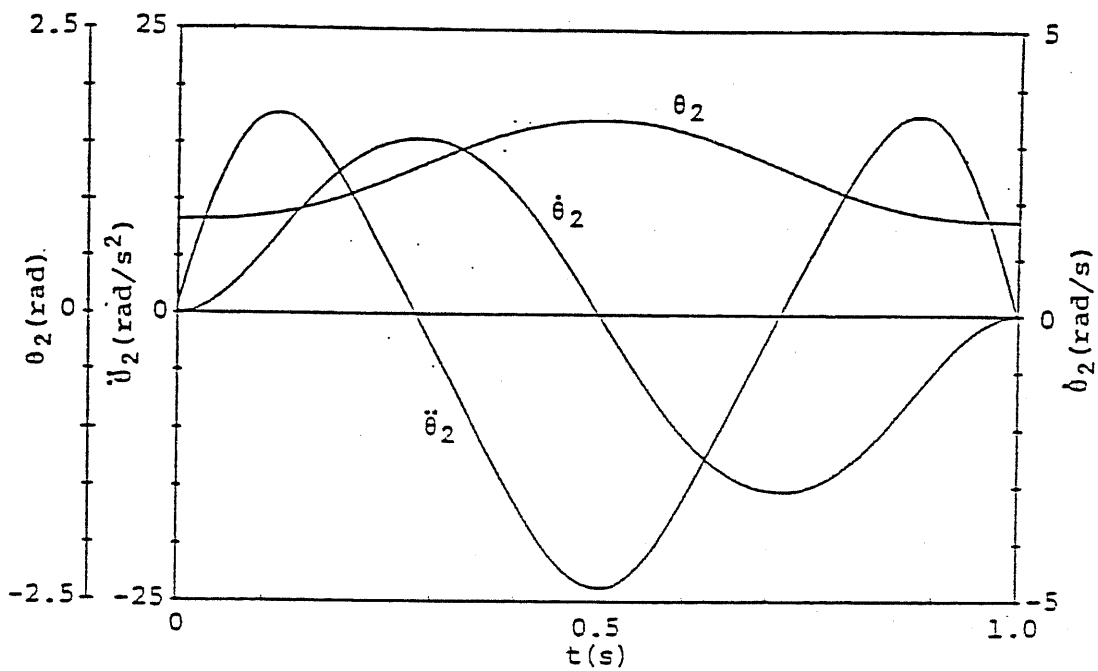
Integral Mode

図4-14. 積分モード

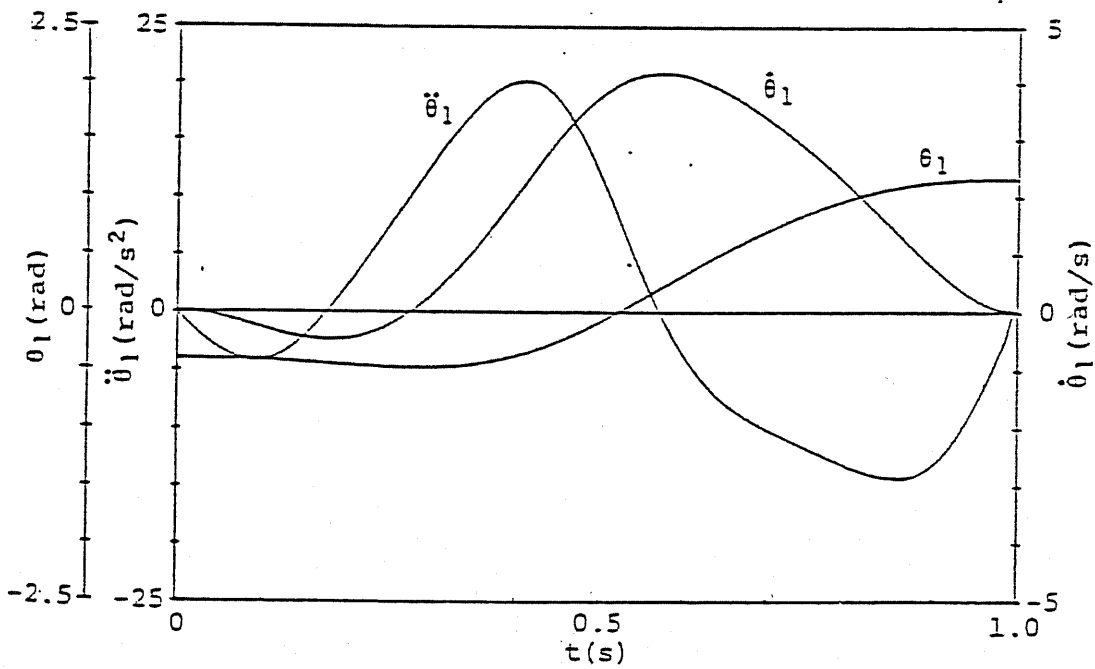


Desired trajectory

図4-15. 目標軌道



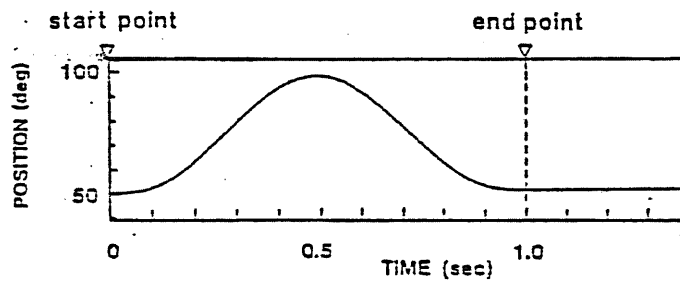
(a) upper arm



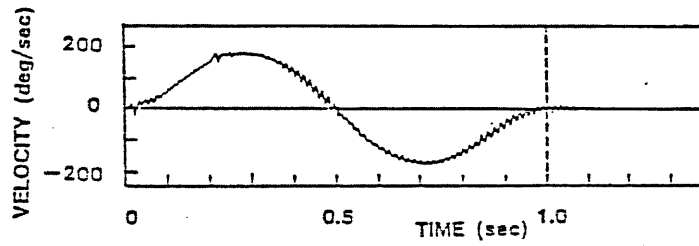
(b) lower arm

Calculated angular position, velocity and acceleration

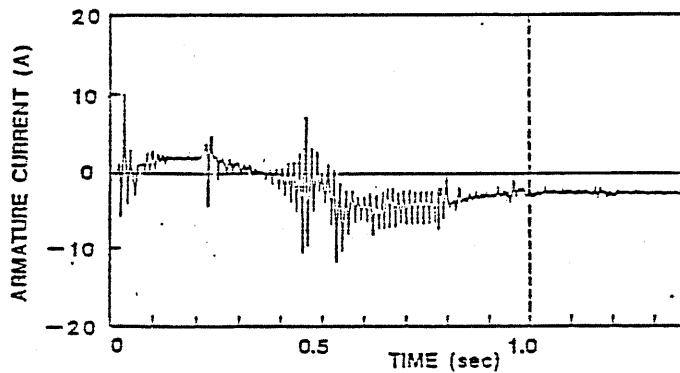
图4-16. 目标位置, 速度, 加速度



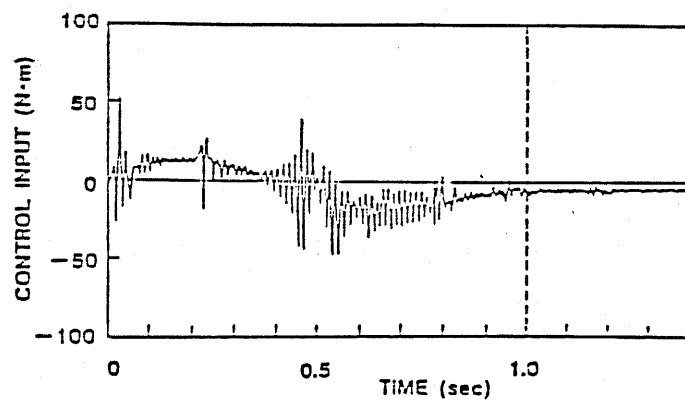
(a) Position



(b) Velocity



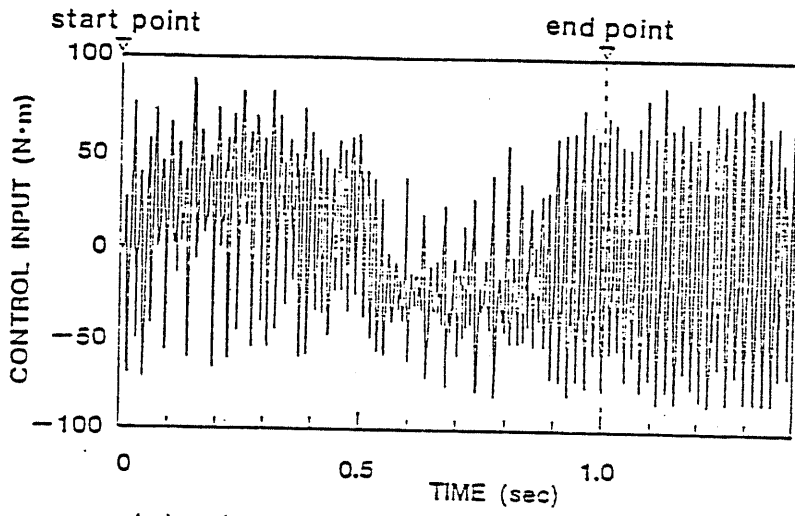
(c) Armature current



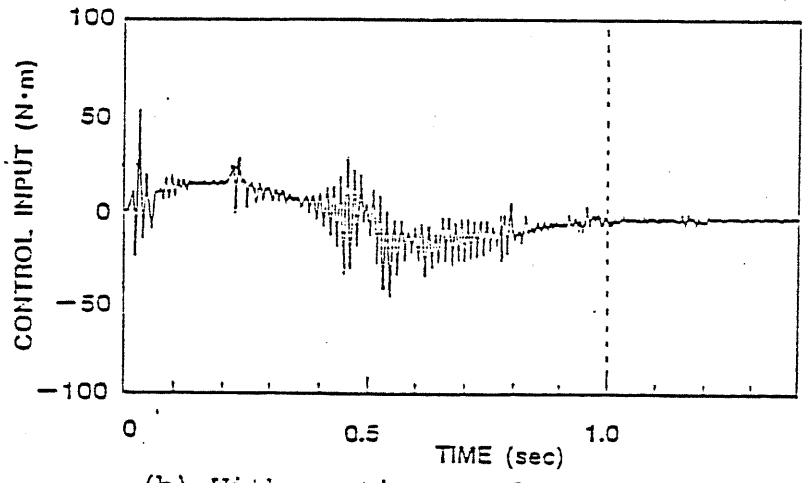
(d) Calculated control input in microprocessor

Tracking performance
(upper arm, 2kg payload)

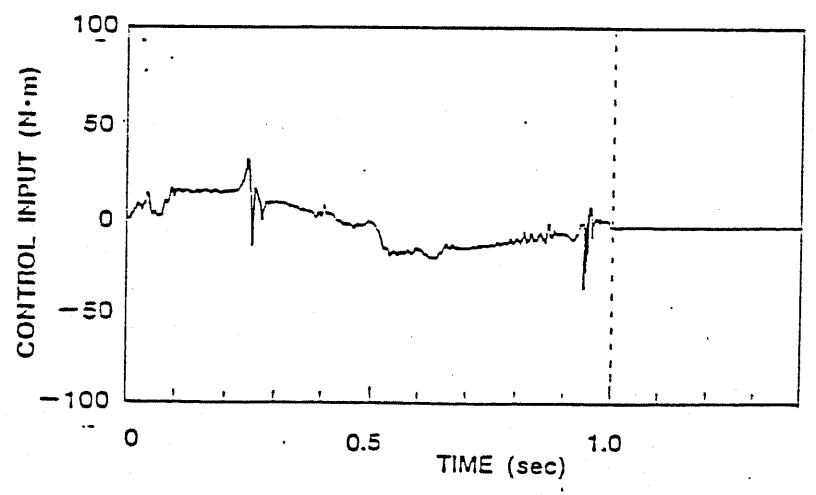
図4-17. アームの応答



(a) Without continuous function, $\delta=0$



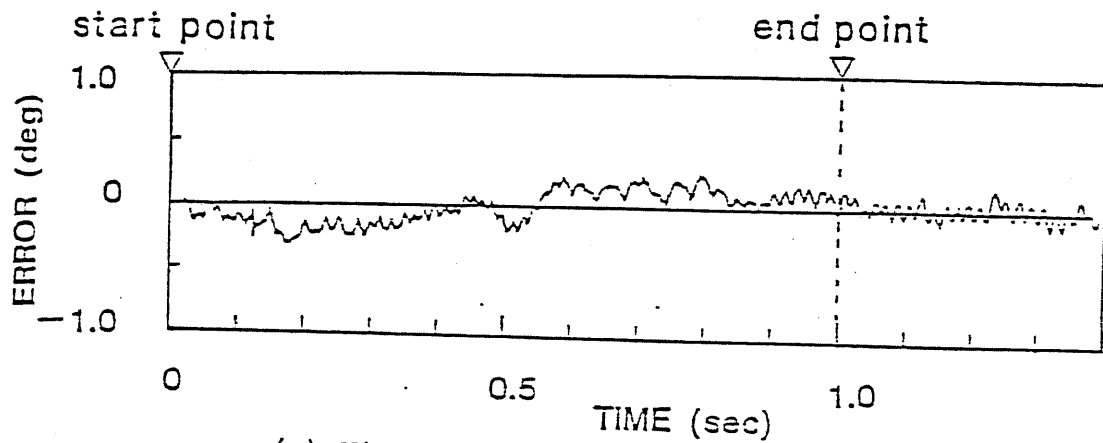
(b) With continuous function, $\delta=0.1$



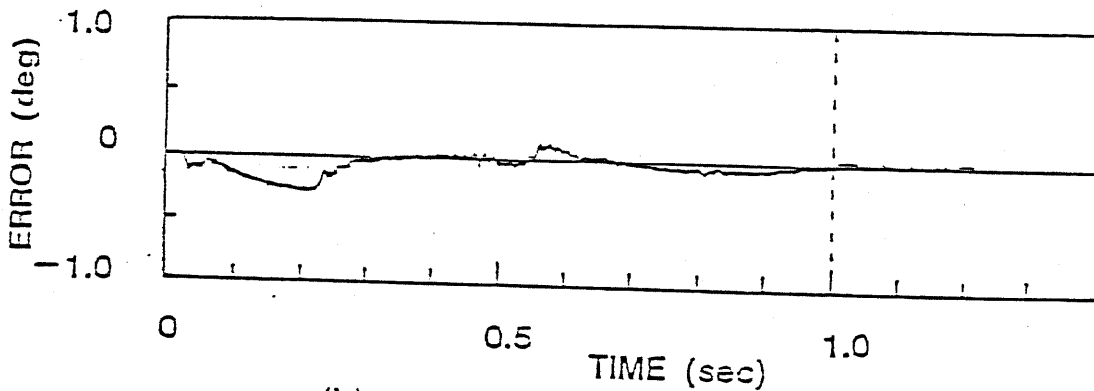
(c) With continuous function, $\delta=0.5$

Effect of continuous function(calculated control input in microprocessor, upper arm)

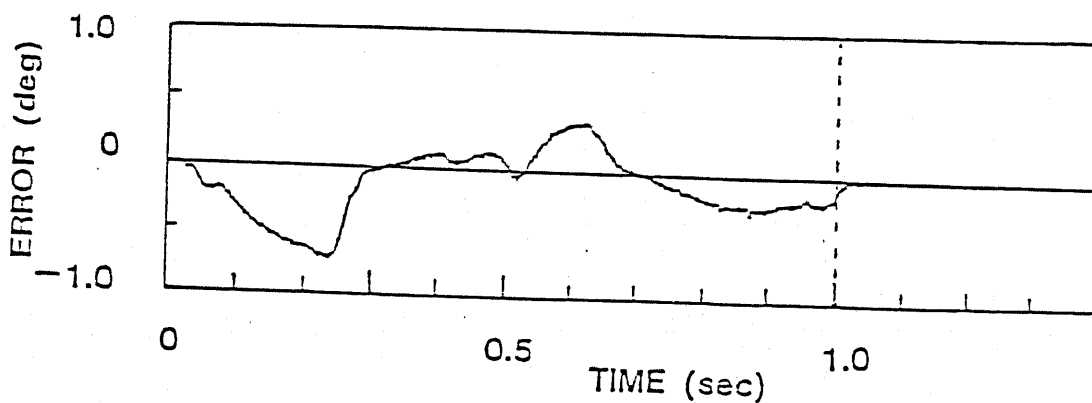
図4-18. 連続関数の影響



(a) Without continuous function, $\delta=0$



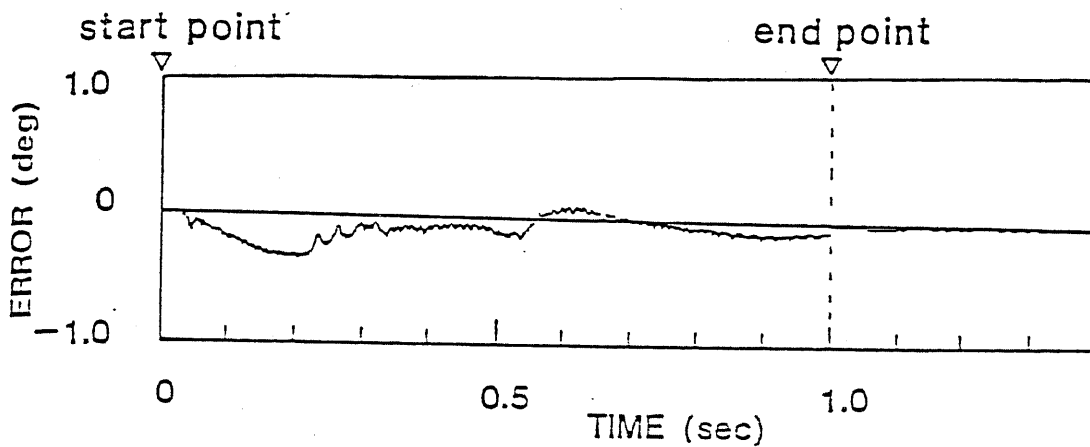
(b) With continuous function, $\delta=0.1$



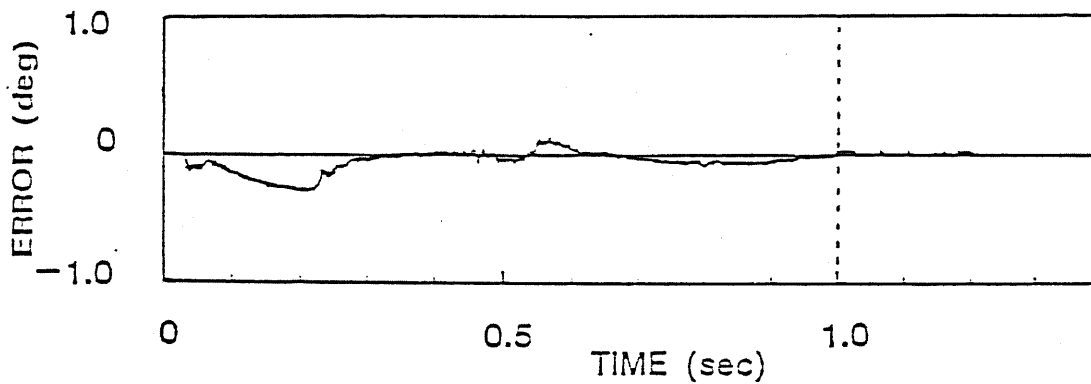
(c) With continuous function, $\delta=0.5$

Effect of continuous function.(tracking error of upper arm)

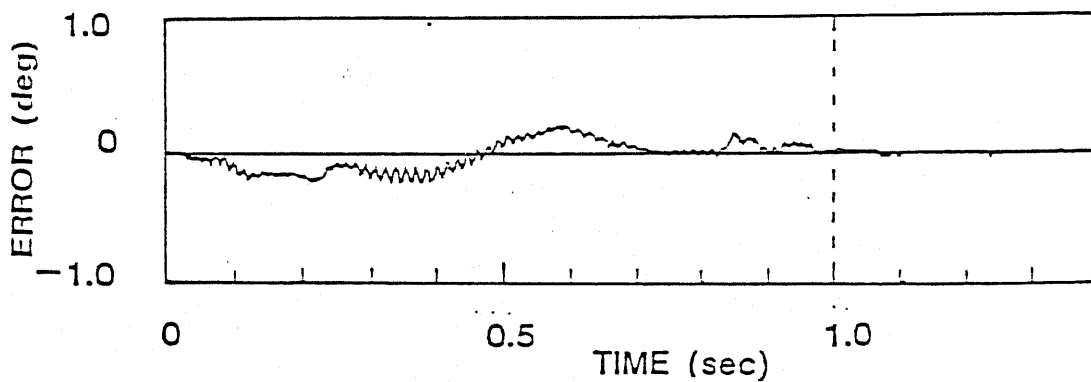
図4-19. 連続関数の影響



(a) Without payload



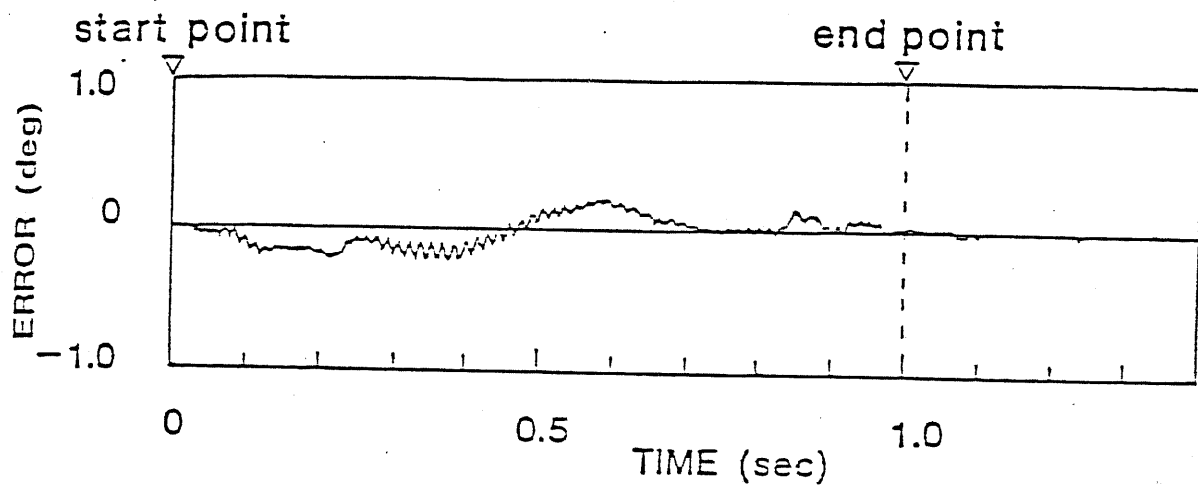
(b) With 2kg payload



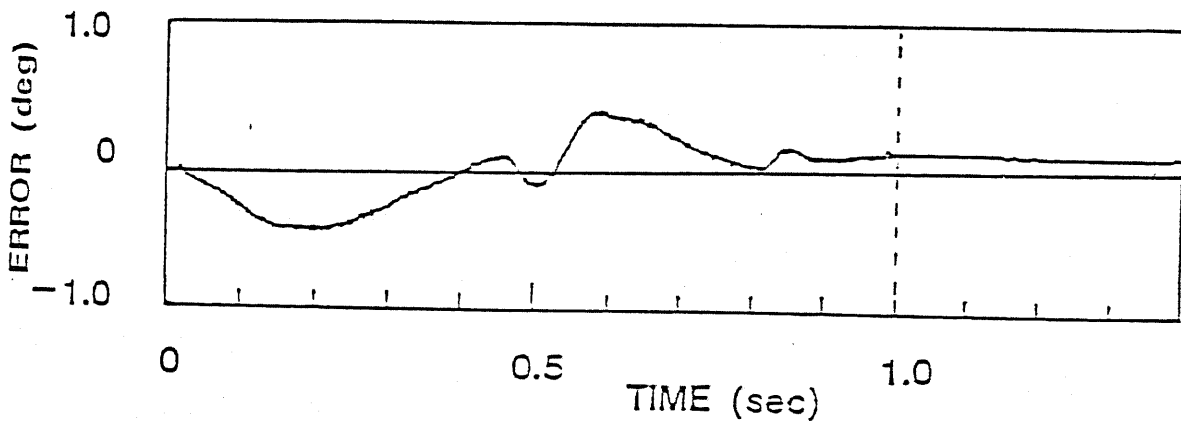
(c) With 4kg payload

Tracking error of upper arm

図4-20. 可変構造系のロバスト性



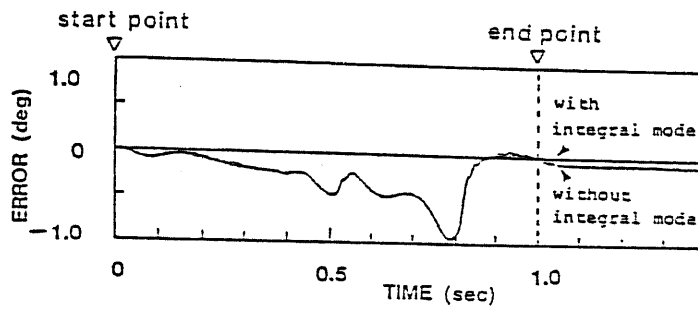
(a) Sliding mode $\delta = 0.1$



(b) PD control

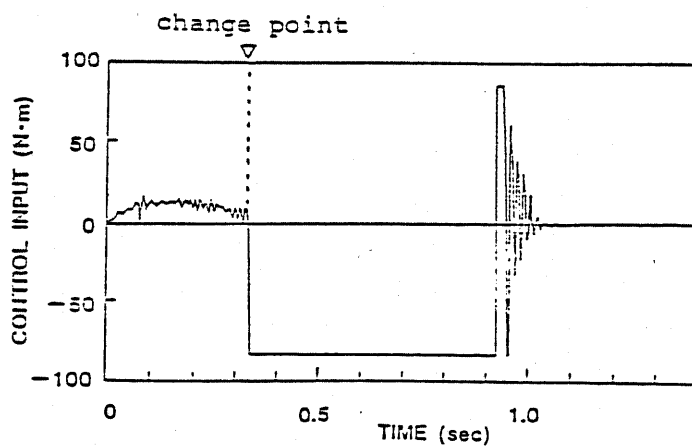
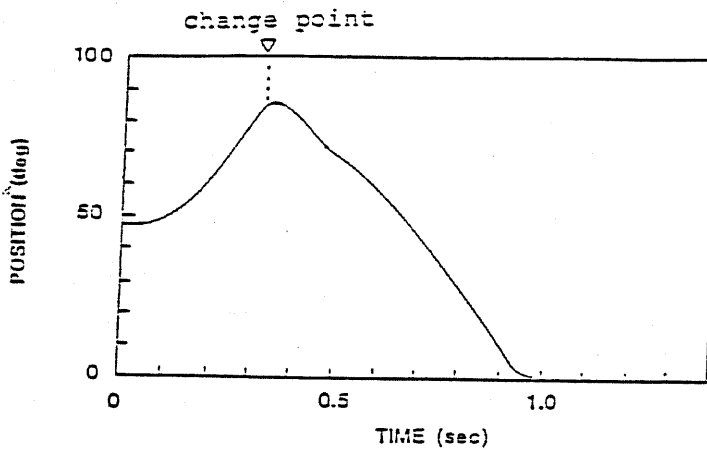
Comparison of Tracking error (tuned at 2kg payload, upper arm, 4kg payload)

図4-21. PDとの比較



Effect of integral mode

図4-22. 積分モードの効果



Response for abrupt change of desired path

図4-23. 目標軌道変更に対する応答

	Lower arm	Upper arm
Rated output (W)	200	60
Rated torque (kg.cm)	6.5	1.95
Rated speed (rpm)	3000	3000
Torque constant (kg.cm/A)	1.21	0.584
Armature resistance (Ω)	0.4	1.1
Counter-EMF constant (mV/rpm)	12.4	6.0
Mechanical time constant (msec)	4.8	5.3
Electric time constant (msec)	2.5	0.82
Moment of inertia (g.cm.sec ²)	1.71	0.16

Actuator parameters

表4-1. アクチュエータの仕様

payload (Kg)	0	2	4
$a_{11}(\theta)$ (N.m)	3.89 $+1.29 \times 10^{-1} \cos \theta_2$	4.20 $+4.42 \times 10^{-1} \cos \theta_2$	4.52 $+7.44 \times 10^{-1} \cos \theta_2$
$a_{12}(\theta)$ (N.m)	6.11×10^{-2} $+6.46 \times 10^{-2} \cos \theta_2$	1.91×10^{-1} $+2.21 \times 10^{-1} \cos \theta_2$	3.25×10^{-1} $+3.72 \times 10^{-1} \cos \theta_2$
a_{22} (N.m)	6.91×10^{-1}	8.21×10^{-1}	9.55×10^{-1}
P_1 (N.m)	$-2.26 \times 10^1 \sin \theta_1$ $-2.11 \sin(\theta_1 + \theta_2)$	$-2.85 \times 10^1 \sin \theta_1$ $-7.21 \sin(\theta_1 + \theta_2)$	$-3.44 \times 10^1 \sin \theta_1$ $-1.22 \times 10^1 \sin(\theta_1 + \theta_2)$
P_2 (N.m)	$-2.11 \sin(\theta_1 + \theta_2)$	$-7.21 \sin(\theta_1 + \theta_2)$	$-1.22 \times 10^1 \sin(\theta_1 + \theta_2)$

Parameter variations by variable payload

表4-2. Payloadの変化によるパラメータ値

Gain constants	i=1	i=2
ϕ_i^{\pm} (N.m/rad)	∓ 60	∓ 30
ξ_i^{\pm} (N.m.sec/rad)	∓ 120	∓ 60
k_i (N.m)	-20	-6
\dot{c}_i (1/sec ²)	10	10
$c_{i \max}$ (1/sec)	15	15

Gain constants for
experimental investigations

表4-3. コントローラゲイン

Gain constants	i=1	i=2
ψ_i (N.m/rad)	100	50
ξ_i (N.m.sec/rad)	100	50
k_i (N.m)	10	10
c_i (1/sec)	10	10

Gain constants in experiments
(with integral mode)

表4-4. コントローラゲイン

Control law	Sliding mode			PD		
	0	2	4	0	2	4
Payload (kg)	0	2	4	0	2	4
Maximum error (deg)	-0.33	-0.23	0.24	-0.50	-0.46	0.48
Mean value $\sum_{j=1}^{800} e_j T_s / \text{lsec}$ (deg)	0.130	0.068	0.099	0.260	0.160	0.210

Comparison between SM and PD

表4-5. PDとの比較

第5章 ON-OFF Patternの発生

5-1. はじめに

可変構造系は超平面上にSliding Mode(すべり状態)を発生させることにより、制御対象のパラメータ変動及び外乱に対してロバスト性(頑健性)に優れた制御系が構成できる[1],[2]。しかし、従来の可変構造制御系は制御則によって生成された不連続制御入力信号をPWMアンプを介してスイッチング素子のON-OFFパターンに変換し、アクチュエータへ供給していた(図5-1(a))。これに対し今回、可変構造系の特徴である不連続制御入力信号に着目し、PWMアンプを廃して可変構造系によってON-OFFパターンを直接発生する制御系を構成する(図5-1(b))。

この制御系は構成が簡単でロバスト性に優れているが、PWMアンプを廃したことでスイッチング周波数の低下が問題となる。

本章では、スイッチング周波数低下の問題に対して切り換え面に電機子電流を取り込みスイッチング周波数を上げることを提案する。制御対象を、一自由度の位置サーボ系とし、アクチュエータにDCサーボモータを用いて直接ON-OFF制御した結果について述べる。

5-2. 可変構造系によるON-OFFパターン生成

可変構造系を図5-2に示す。最下段に構造が異なるサブシステムが複数個存在し中段にCoordinatorを有する階層構造を持つ。この可変構造系を制御系で考えると、構造が異なるサブシステムの集合からサブシステムの時系列を作り目標を達成する系をいう。非常に有益な概念で多くの応用が考えられる。

本章ではパワースwitching素子のON状態とOFF状態を構造とみなしSliding Modeを適用することを考える。PWMアンプを廃することにより電力変換まで含む系での最適化が可能となるが、本章では、主にリミットサイクルに関して考察を行う。

5-3. 位置サーボ系への適用

DCサーボモータをアクチュエータとする位置サーボ系を制御対象とする。ここでは、始点及び終点を指示し途中の経路は指示しないPTP(Point To Point)動作を行うことを考える。

5-3-1. 従来の可変構造系

従来の可変構造系の位置サーボ系への適用では、制御入力 u 及び状態空間内に設定する切り換え面 s を

$$\begin{aligned}
u &= \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 + k_f \text{sign}(s) \\
s &= c_1 e_1 + c_2 e_2 \quad c_1, c_2 > 0 \\
\psi_1 &= \begin{cases} \alpha_1 & \text{if } se_1 > 0 \\ \beta_1 & \text{if } se_1 < 0 \end{cases} \\
\psi_2 &= \begin{cases} \alpha_2 & \text{if } se_2 > 0 \\ \beta_2 & \text{if } se_2 < 0 \end{cases} \\
e_1 &= x_{1d} - x_1 \quad x_{1d}: \text{desired position} \\
e_2 &= \dot{e}_1
\end{aligned} \tag{5-1}$$

としSliding Mode制御系を構成していた。このとき制御入力 u はパルス幅変調を受けたフィードバック型の信号となる(図5-3)。断続な制御入力信号 u はPWMアンプを介してPWMパターンとなりスイッチング素子のON-OFFを行う。

5-3-2. ON-OFFパターンに着目した可変構造系

本研究は可変構造系の特徴に注目しているので制御入力 u をパワースイッチング素子の"ON" "OFF"の2つの状態に対応させることを考える。図5-4に示す回路構成でパワースイッチング素子の"ON" "OFF"によって状態は2²通り存在する。ここではその内の2つの状態に注目することにより制御入力を

$$u = \begin{cases} V_s & s > 0 \\ -V_s & s < 0 \end{cases} \quad (V_s: \text{Constant}) \tag{5-2}$$

と選ぶ。ここで、 V_s はスイッチング素子に印加できる最大電圧である。この制御入力 u はスイッチング素子のON-OFFパターンを形成する。このようなパターンにすればPWMアンプを廃した制御系が構成できる。

5-3-3. スイッチング周波数規定要因[3],[4]

(5-2)式の制御則はPWMアンプを廃したのでスイッチング周波数の大きさが問題となる。

5-3-3-1. スイッチング周波数の低下

従来の切り換え面 s を用いたON-OFFパターン発生 of スイッチング周波数をシミュレーションによって確認する。

シミュレーション条件は、サンプリング周期を100KHz、センサー分解能を 角度:0.04°・速度:0.224(deg/sec)・電機子電流:12bit、演算遅れは無いものとする。

なお、サンプリング周期は、スイッチング周波数を上げるためできるだけ大きく設定してある。このサンプリング周期はDSPを採用すれば十分可能な周期である。

$$\begin{aligned} s &= c_1 e_1 + c_2 e_2 \\ u &= V_s \operatorname{sgn}(s) \\ c_1 &= 38 \quad c_2 = 1 \quad V_s = 25 \end{aligned} \quad (5-3)$$

図5-5は、負荷4kg時の位置エラー、速度、電機子電流及び制御入力の応答を示す。定常状態に於てスイッチング周波数は約2.1kHzである。また電機子電流はスイッチング周波数が低いため脈動が大きい。切り換え面を位置及び速度の状態量のみから構成すると、電機子電流の遅れによってスイッチング周波数の増大が望めないことがわかる(3-3-2参照)。

制御入力のスイッチング周波数低下に伴い下記の問題が生じる。

- ① 電流リップル分(chattering)が大きくなり、トルク変動が増加する。
- ② 電流リップル分が鉄心を振動させ、可聴周波数に入れば不快な音を発生する。

5-3-3-2. リミットサイクルの存在

ここではスイッチング周波数の規定要因について図5-6に示す電機子電流の遅れを考慮したDCサーボモータの位置制御系を考える。状態方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ x &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -K \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u \quad (K = 1/T_p, T_p := \text{時定数}) \end{aligned} \quad (5-4)$$

である。この制御対象は極を原点に持つので平衡点は唯一には定まらない。そのため、原点に対して正負対称なリミットサイクルが存在しない場合がある。しかし、切り換え面 $s=cx=0$ ($cb \neq 0$) を考えると、原点を通る点の集合(平面)が平衡点となり、その平衡点において正負対称なリミットサイクルが存在する。図5-7(a)に示すような正負対称のリミットサイクルが発生すると仮定し、リミットサイクルの半周期をKT(但し、Kはサンプリング回数、Tはサンプリングタイム)とすれば、 $0 \leq t < KT$ における状態は離散系で表すと次のようになる。

$$x(t) = \exp(At) + \int_0^T \exp A(t-\tau) b d\tau u(t) \quad (5-5)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} & 1/K-e^{-t}/(K-1)+e^{-kt}/(K(K-1)) \\ 0 & e^{-t} & (e^{-kt}-e^{-t})/(1-K) \\ 0 & 0 & e^{-kt} \end{bmatrix} x_0$$

$$+ \begin{bmatrix} T-K/(K-1)+1/(K(K-1))+Ke^{-T}/(K-1)-e^{-kT}/(K(K-T)) \\ (1/K-1-e^{-kT}/K+e^{-T})K/(1-K) \\ 1-e^{-kT} \end{bmatrix} (-M) \quad (5-6)$$

●次にリミットサイクルの初期値 x_0 を求める。

(A)半周期毎の状態が原点に関して対称な場合

リミットサイクルの初期値と半周期後の状態が原点に対して対称な場合、初期値 x_0 は図5-7(a)より

$$x_0 = -x(KT) \quad (5-7)$$

を満足する。

(B)原点に対して対称でない場合

リミットサイクルの初期値と半周期後の状態が原点に対して非対称な場合、図5-7(b)より時刻 $t=t_0$ における状態と $t=t_0+2KT$ において状態が等しくなるので

$$x_0 = x(2KT) \quad (5-8)$$

となり、初期値が求まる。

●次に、本システムにリミットサイクルが存在することを示す。可変構造系では対象にエネルギーを与えながら平衡状態を保っている。このとき(5-8)式が満足されている。リミットサイクルの存在は次のChangの方程式からわかる。周期 $2KT$ で(5-8)式が満足されているとChangの方程式

$$\{\Phi(-2KT)-I\} x_0(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+2KT} \Phi(t_0-\tau) b u(\tau) d\tau \quad (5-9)$$

が得られる[5]。(5-9)式から $x_0(t_0)$ が求まる条件は

$$|\Phi(-2KT) - I| \neq 0 \quad (5-10)$$

である。本システムは(5-10)式を満足するので必ず周期 $2KT$ のリミットサイクルが存在する。

本システムではリミットサイクルが原点に対して対称ではないが、原点と平衡点との差を δ とすると(図5-7(b))、初期値は

$$x_0 = -x(KT) + \delta \quad |\delta| < x_0 \quad (5-11)$$

となる。今回は $\delta = 0$ として原点に対称な場合のみを考える。

5-3-3-3. スイッチング周波数と切り換え面の関係

(5-7)式より、初期値を求めパラメータを $A=100, T=1, M=1$ と設定し数値計算を行い $k=1, 2, 3, 4$ の場合の x_1-x_2, x_1-x_3 の状態面軌跡を図5-8, 9に示す。

図5-7(a)より、周期 $2kT$ のリミットサイクルが存在しているきのリレー要素への入力 s と出力 u は、時刻 $t=(k-1)T, kT$ において、次の条件

$$\begin{aligned} s &= ((k-1)T) > 0 \\ s &= (kT) < 0 \end{aligned} \quad (5-12)$$

を満足している。(5-12)式の条件からリミットサイクル発生と切り換え面の関係を考える。

(A) 切り換え面 $s=x_1=0$

切り換え面を $s=x_1=0$ と設定した場合、図5-8より(5-12)式の切り換え条件を満足しない。 $k=4$ 以下ではリミットサイクルが発生せず k の値が大きいリミットサイクルが発生する。この切り換え面では $k=1$ のみ発生する条件は得られない。

(B) 切り換え面 $s=cx_1+x_2=0$

切り換え面を $s=cx_1+x_2=0$ (但し、 c は傾き) とする。傾き c を小さくし切り換え面 s_1 を設定すると(5-12)式の切り換え条件を満足する。このとき $k=1, 2, 3, 4$ のリミットサイクルが発生する。次に傾き c を大きくし切り換え面を s_2 と設定すると、切り換え条件は満足されず周期の長いリミットサイクルが発生する。 s_1 の切り換え面

では $k=1,2,3,4$ のいずれの場合も存在し得る。現在のところ $k=1$ のリミットサイクルのみが生じる条件は求められない。

(C)切り換え面 $s=cx_1+x_2+x_3=0$

切り換え面を $s=cx_1+x_2+x_3=0$ とした場合、図5-9より傾き c を切り換え面が s_3, s_4 となるように設定すれば $k=1$ のみが発生する。

したがって状態が3つからなる場合は超平面を三つの状態量から構成すれば $k=1$ のみの条件を満足し1サンプリング毎に切り換えが発生する制御系が可能となる。

5-3-3-4. スイッチング周波数と演算遅れの関係

制御系をデジタル系で構成する場合、演算遅れが問題となる。ここでは図5-10に示す1サンプリング演算遅れのある系のスイッチング周波数と切り換え面の関係について考える。

1サンプリング演算遅れがある場合、リレー要素への入力 s と出力 u の関係は図5-11となる。図5より切り換え条件は、時刻 $t=(k-1)T, (k-2)T$ において

$$\begin{aligned} s((k-1)T) &< 0 \\ s((k-2)T) &> 0 \end{aligned} \tag{5-13}$$

となる。この切り換え条件を図5-12,13の状態面上で考える。

(A)切り換え面 $s=x_1=0$

切り換え面を $s=x_1=0$ と設定した場合、図5-12より $k=4$ 以下では(5-13)式の切り換え条件を満足しない。その結果 $k=4$ より長い周期のリミットサイクルが発生する。

(B)切り換え面 $s=cx_1+x_2=0$

切り換え面を $s=cx_1+x_2=0$ (但し、 c は傾き)と設定する。図5-12で傾き c で切り換え面 s_1 を設定した場合、 $k=1$ は時刻 $t=(k-1)T, (k-2)T$ においてそれぞれ $s((k-1)T) > 0, s((k-2)T) < 0$ となり(5-13)式の切り換え条件を満足しない。また、 $k=2,3$ も図5より明らかに(5-13)式を満足しない。この切り換え面で条件を満足するのは $k=4$ のみである。更に傾きを大きくし s_2 とすると切り換え条件を満足しないので $k=4$ 以下ではスイッチングは起こらず、長い周期のリミットサイクルが発生する。

(C)切り換え面 $s=cx_1+x_2+x_3=0$

切り換え面を $s=cx_1+x_2+x_3=0$ とする。図5-13で切り換え面を s_3 とした場合(5-13)式の切り換え条件を $k=2,3,4$ で満足する。次に傾き c を大きくして切り換え面を s_4 とすると、 $k=2$ のみの切り換え条件を満足する。更に傾き c を大きくして切り換え面を s_5 とすると、切り換え条件を満足しないので長い周期のリミットサイクルが

発生する。

よって制御系をディジタル系で構成する場合、演算遅れの影響により切り換え面を三つの状態量から構成しても1サンプリング毎の切り換えは得られず $K=2$ でスイッチングが行われる。

5-3-3-5. スイッチング周波数とセンサー量子化幅の関係

スイッチング周波数とセンサー量子化幅の関係を考えるため x_1-x_3 状態面上で1サンプリング毎にスイッチングが行われている状態について考える。センサー出力の量子化特性を”丸め”としセンサー量子化幅を Q とする。 n サンプリング時の状態を s_n とし、そのときのセンサー出力を s_{nq} とする。

(A) $Q < s_n$

リミットサイクルのサンプリング時点での値がセンサー量子化幅より大きい場合は、 $s=0$ の切り換え条件を満足する s_{nq} がセンサーより出力される。 $Q < s_{nq}$ の時はスイッチング周波数には関係せず、制御精度のみに関係する(図5-14(a))。

(B) $Q > s_n$

センサー量子化幅がリミットサイクルのサンプリング時点での値より大きい場合、 x_1, x_3 のセンサー出力を x_{1q}, x_{3q} とすると

$$\begin{aligned} -Q/2 \leq x_1, x_3 < Q/2 & \quad x_{1q}, x_{3q} = 0 \\ Q/2 \leq x_1, x_3 < 3Q/2 & \quad x_{1q}, x_{3q} = Q \end{aligned} \quad (5-14)$$

となり、出力は図5-14(b)となる。初期状態を s_0 としコントローラからの出力を $\pm M$ とした場合、最初出力は $-M$ となり状態は s_1 へ移動する。このときセンサーからの出力は0となる。この結果コントローラからの出力は M となる。つぎに状態は s_2 に移動するがセンサー量子化幅内なのでセンサー出力 s_{2q} は0となりコントローラからの出力は M となる。そして状態がセンサー量子化幅より大きくなった時点で初めてスイッチングが行われる。それ以降、プラントはその周期によりスイッチングが行われる。センサー量子化幅が大きいほどスイッチング周波数は低下する。

このようにセンサー量子化幅が大きい場合は状態が(5-12)式の切り換え条件を満足してもセンサー出力により満足せず1サンプリング毎のスイッチングは得られない。

これからセンサー量子化幅の設定指針は、リミットサイクルの初期値より小さい量子化幅 Q を持つセンサーを用いれば、演算遅れが無い場合1サンプリング毎に

スイッチングが行われる。

以上の考察よりスイッチング周波数を決める要因としては次の3点が考えられる。

- ① サンプルリング周期
- ② 切り換え面の構成
- ③ 演算による遅れ

制御対象の電機子電流が無視できない場合は、切り換え面を位置及び速度の状態のみから構成すると切り換え条件を満足する状態が複数存在する。このとき高い周期のリミットサイクルのみを得る条件は求められない。従ってサンプルリング周期を上げてスイッチング周波数の増大は望めないことになる。よって切り換え面に電機子電流を導入することによって、高い周期のスイッチングを行うON-OFF制御系を構成する。

5-4. 切り換え面の構成

前節の考察に基づき電機子電流を取り込み新しい切り換え面を構成する。この切り換え面の有効性をシミュレーションで確認する。

5-4-1. 位置+速度+電流

$$s = c_1 e_1 + c_2 e_2 + e_3 \quad (5-15)$$

$e_3 = -x_3$: Armature current

この切り換え面を用いるとスイッチング周波数は上がり、演算遅れが無い場合はサンプルリング周期毎にスイッチングが生じる。図5-15に位置エラー、速度、電機子電流及び制御入力($c_1=38, c_2=1$)のシミュレーション結果を示す。スイッチング周波数は制御系のサンプルリングまで上がり整定時間180(msec)の早い一次応答を示す。速度及び電機子電流の脈動は減少しているが、定常誤差が 8×10^{-3} (rad)存在する。この定常誤差を取り除くために、積分動作を切り換え面に導入する。

5-4-2. 位置+速度+電流+積分

$$s = c_0 \int_0^{\infty} e_1 dt + c_1 e_1 + c_2 e_2 + e_3 \quad (5-16)$$

この切り換え面を用いると、演算遅れが無い場合はサンプリング周期毎にスイッチングを行う。

c_0, c_1, c_2 は減衰定数が0.707となるように設定してある($c_0=50, c_1=10, c_2=1$)。図5-16は、負荷が4kg時の位置エラー及び制御入力 of 応答を示す。応答は二次応答を示し、オーバーシュートが存在する。整定時間は720(msec)と遅いが、定常誤差が残らない応答となる(8×10^{-5} (rad))。

傾き c の減衰比 ξ を $\xi < 1$ と設定するとオーバーシュートが存在し、 $\xi = 1$ の臨界制御に設定すると整定時間が長いなどの問題がある。そこで、バウンダリー幅 ε を設定し、 $|s| > \varepsilon$ の間は応答時間を早くするために切り換え面4-1を用い、 $|s| \leq \varepsilon$ 間では切り換え面4-2に可変し、定常誤差を取り除く可変モードを考える。これ自体が可変構造系としての特徴を持つ。

5-4-3. 可変モード

$$s = \begin{cases} c_1 e_1 + c_2 e_2 + e_3 & |s| > \varepsilon \\ c_0 \int_{T_h}^{T_o} e_1 dt + c_1 e_1 + c_2 e_2 + e_3 & |s| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (5-17)$$

但し T_h := バウンダリー到達時間

T_o := バウンダリー逸脱時間

ここで、 ε は次の指針に基づいて設定する。 $x_2, x_3 \rightarrow 0$ と仮定すると $\dot{s} (|s| > \varepsilon$ と考える)は

$$\dot{s} = b u_{\max} \quad (5-18)$$

但し、 u_{\max} := 最大印加電圧

と近似される。 s の移動量は

$$\dot{s} T_s \approx b u_{\max} T_s \quad (5-19)$$

但し、 T_s := サンプリング時間

となる。そこで、 $|s|$ がサンプリングの間バウンダリー ε より出ないように ε を s の移動量の5倍と設定する。

$$\varepsilon = 5 \cdot b u_{\max} T_s \quad (5-20)$$

このように切り換え面を可変にすることにより整定時間が短く定常誤差が残らない応答を得ることができる。

シミュレーションは減衰定数が0.707となる次のパラメータのもとで行った。

$$c_0=722 \quad c_1=38 \quad c_2=1 \quad \varepsilon=0.45 \quad (5-21)$$

図5-17は、負荷が4Kg時の位置エラー及び制御入力への応答、図5-18に位相面軌跡を示す。定常誤差(6×10^{-5} (rad))は小さく、整定時間(180(msec))も切り換え面4-1と同等な早い一次応答となる。

5-5. Sliding Mode存在領域

ディジタル系で構成されるSliding Modeは制御入力の飽和からSliding Mode存在領域が存在する。図5-19に於て円の内部から発する状態(a)は $s=0$ に到達した後Sliding Modeを生じる。しかし、円の外部から発する状態(b)は $s=0$ に到達した後Sliding Modeが生じず状態が次に $s=0$ に到達した後(このとき円内に到達する)Sliding Modeが生じる。またSliding Mode自体が擬似Sliding Modeとなる[6]。制御対象は $s=0$ の近傍にChatteringとして存在し原点に向かう。このときの制御対象の存在領域は図5-19で Ω である。本システムでは制御入力に二値しか取れないので原点に於ても Ω が存在しリミットサイクルを生じている。また過渡時に於てはスイッチング周波数は定常時の半分程になる場合がある。

5-6. ARMAモデルによる予測

制御系をディジタル系で構成すると演算遅れが伴う。切り換え面を4-1とし演算遅れを1サンプリングとした場合の制御入力のスイッチング周波数は約17KHzとなる(図5-20)。この遅れがスイッチング周波数の低下に大きく関係する。演算遅れに対応するためにARMAモデルを用いて切り換え面を予測する。

制御対象を

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (5-22(a))$$

$$y(t) = cx(t) \quad (5-22(b))$$

としたときのARMAモデルは

$$Y(z) = h[zI - \Phi]^{-1} \Gamma U(z) \quad (5-23)$$

$$\text{ここで } \Phi = \text{EXP}(AT)$$

$$\Gamma = \int_0^T \text{EXP}(A\tau) b d\tau$$

$$h = c$$

となる。ここでこのARMAモデルと切り換え面をリンクするためには

$$h = [c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, 1] \quad (5-24)$$

とおけばよい。エラーに対する切り換え面のARMAモデルは次式のように表せられる。

$$S(z) = c_1 R(z) - \frac{r(z)}{p(z)} U(z) \quad (5-25)$$

$$\text{但し } \begin{aligned} r(z) &= r_1 z^2 + r_2 z + r_3 \\ p(z) &= z^3 + p_1 z^2 + p_2 z + p_3 \end{aligned}$$

これから時刻Kでの切り換え面S(K)は

$$S(K) = \Phi^T(K) \Theta_a \quad (5-26)$$

$$\Phi^T(K) = [-p_1, -p_2, -p_3, c_1, c_1 p_1, c_1 p_2, c_1 p_3, -r_1, -r_2, -r_3]$$

$$\Theta_a^T = [S(K-1), S(K-2), S(K-3), R(K), R(K-1), R(K-2), R(K-3), \\ U(K-1), U(K-2), U(K-3)]$$

と求まる。また、制御対象のパラメータが未知であったり、パラメータ変動に対処するためARMAモデルのパラメータ θ を次に示す射影アルゴリズムを用いて推定する[7]。

$$\theta(K) = \theta(K-1) + \frac{\Phi(K-1)e(K-1)}{\Phi^T(K-1)\Phi(K-1)} \quad (5-27)$$

$$e(K-1) = S(K-1) - \Phi^T(K-1)\theta(K-1)$$

図5-21に(5-27)式でパラメータ θ を推定し(5-26)式で切り換え面を予測し制御した結果を示す。切り換え面はARMAモデルから正確に予測でき、その結果スイッチング周波数が制御系のサンプリングまで上がることが確認できた。

5-7. おわりに

可変構造系を用いてスイッチング素子のON-OFFパターンを生成した。本章で提案した制御則により下記に示す結果を得た。

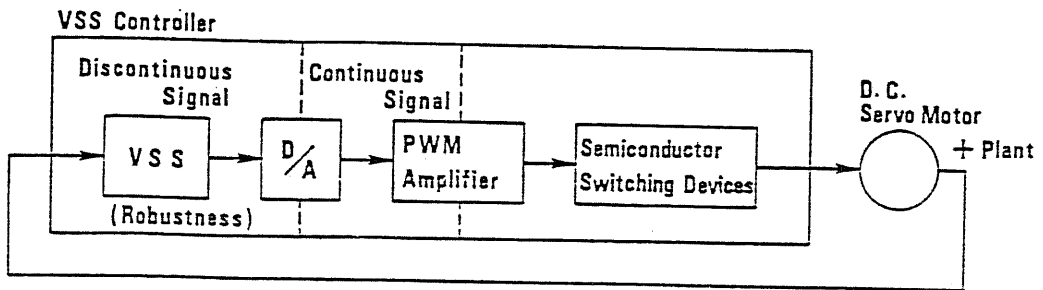
- サンプリング毎のスイッチング（定常状態）
- オーバershootの無い早い応答
- 定常誤差の小さい応答

今後の課題は次の通りである。

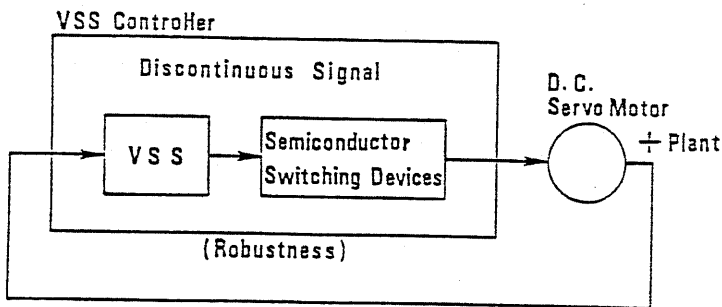
- ① DSPを用いて、実システムにおいてスイッチング周波数20KHz以上を目標とした実験
- ② 多自由度系への拡張、CP動作の検討
- ③ 可変構造系の特徴を生かした制御系構成の検討(例えば自己組織化等)

参考文献

- [1] V.I.Utkin: "Variable Structure System with Sliding Mode," IEEE Trans on AC, Vol AC-22, 212/222. (1977)
- [2] 原島, 橋本: "Sliding Modeとその応用-1, II," システムと制御, 29-2, 94/103, 29-4, 242/250. (1985)
- [3] 原島, 近藤: "電動機駆動系のデジタル制御-サンプリングと量子化-, "計測と制御, 22-7, 634/639. (1983)
- [4] W.L.Nelson: "Pulse-Width Relay Control in Sampling System," J.of.B.Eng. Trans.of the ASME, 65/76. (1961)
- [5] D.P.Atherton, Nonlinear Control Engineering. 245/247, London, :Van Nostrand Reinhold, 1982
- [6] 安田, 伊東, 平井: "デジタル制御によるすべり動作について," SICE第8回 D.S.T シンボ資料, 39/42, (1985)
- [7] G.C.Goodwin, et, al, Adaptive Filtering, Prediction and Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984



(a) Conventional type



(b) New type

図 5 - 1 . 可変構造制御系

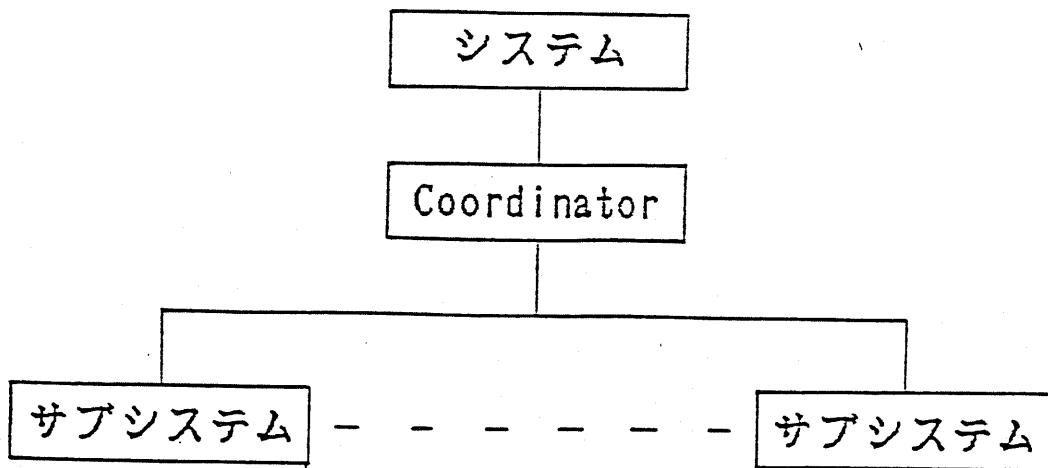
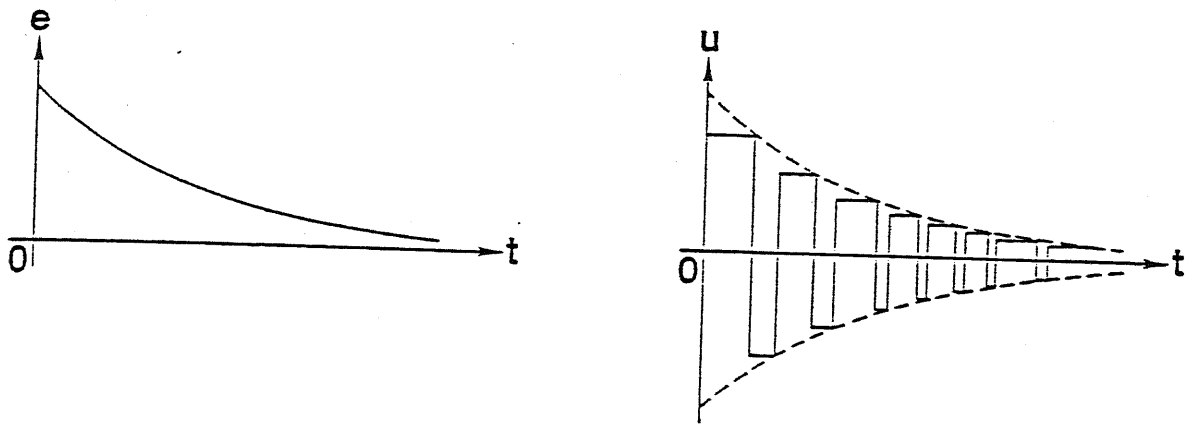
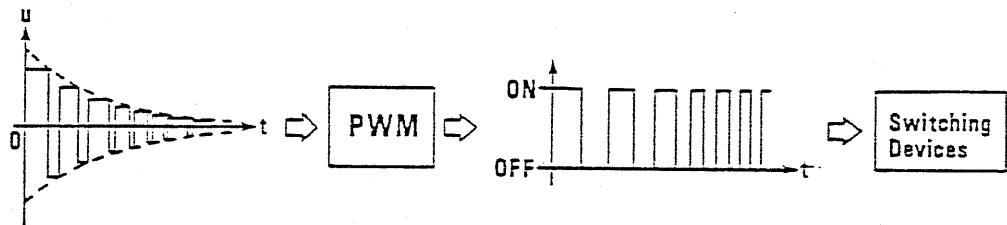


図 5 - 2 . 可変構造系

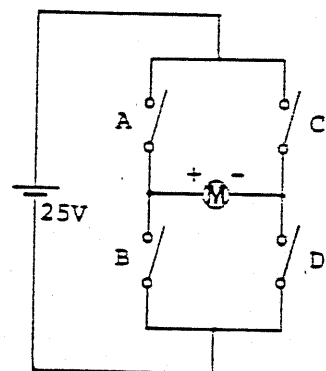


(a) Control signal of VSS



(b) Modulation of control signal

図5-3. 従来の可変構造制御入力



$S > 0 \Rightarrow A:OFF \ B:ON \ C:ON \ D:OFF$
 $S < 0 \Rightarrow A:ON \ B:OFF \ C:OFF \ D:ON$

図5-4. 回路構成

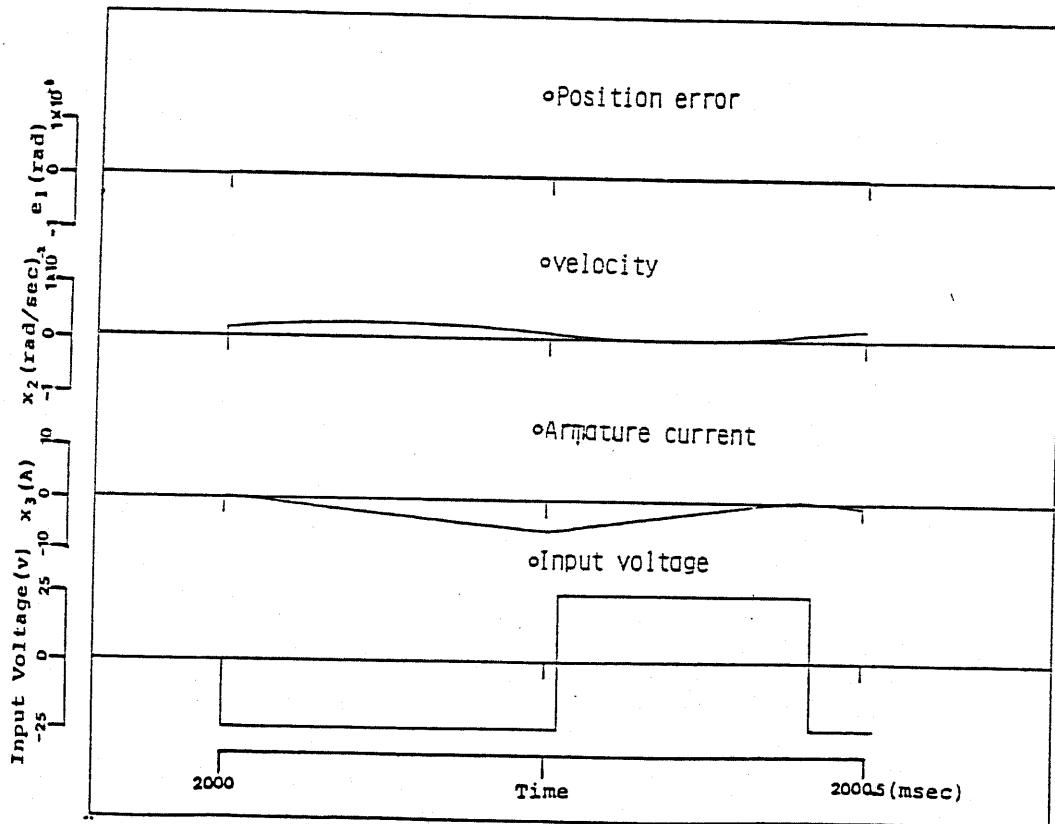
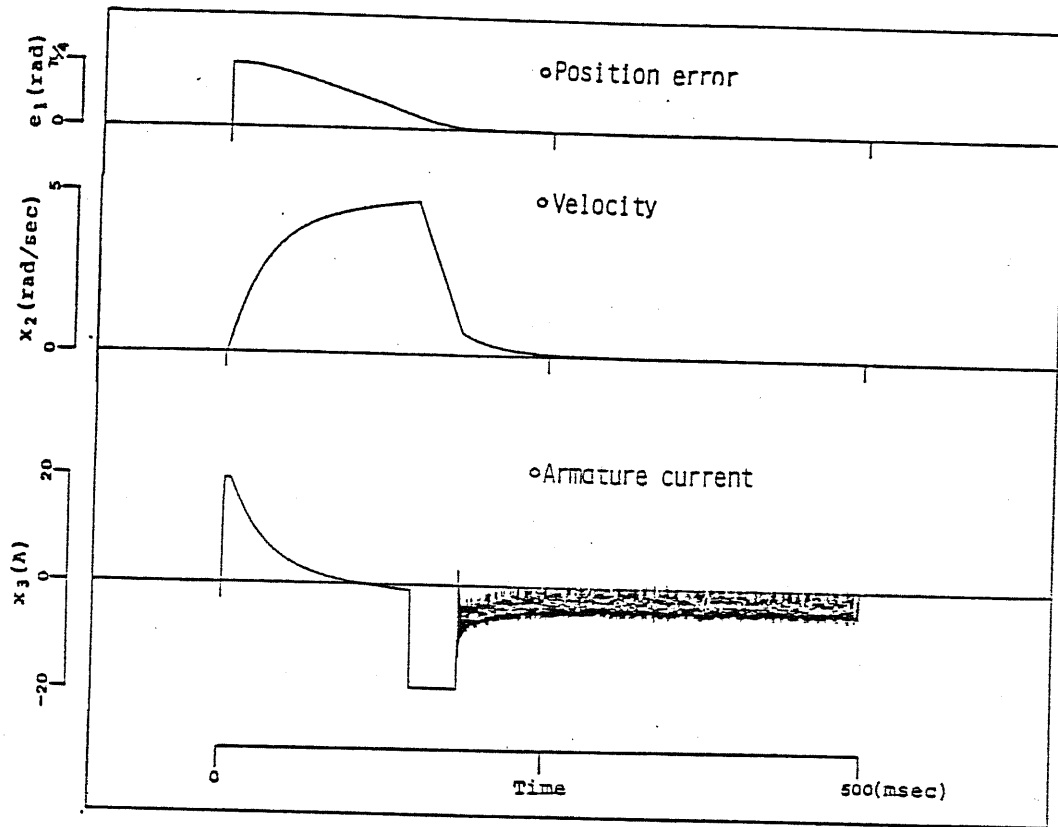


図5-5. シミュレーション結果 (位置+速度)

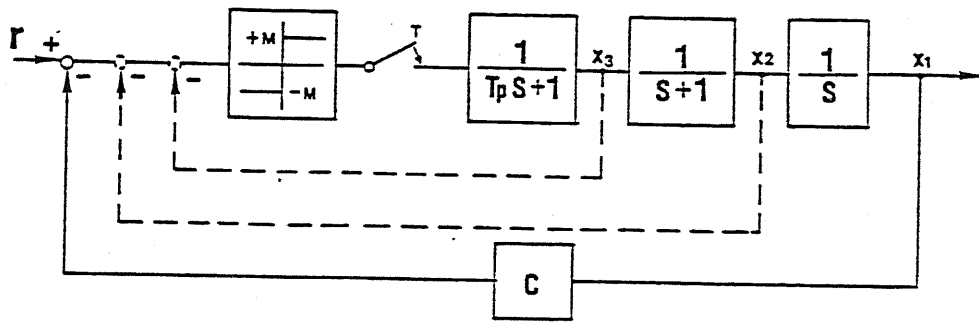


図 5 - 6. 位置サーボ系

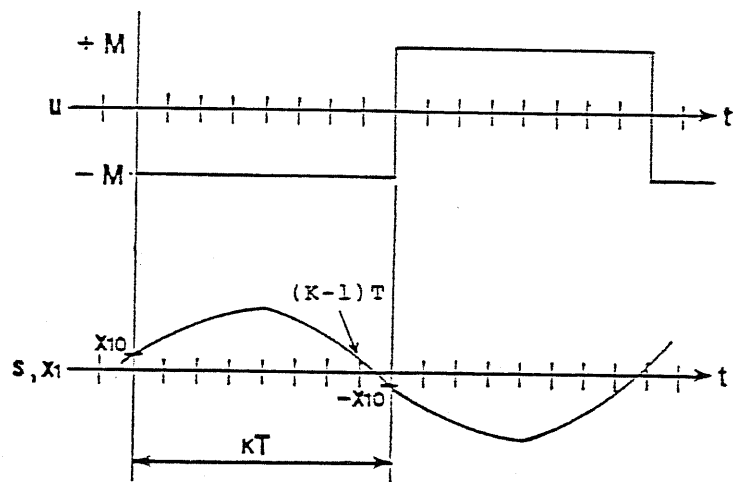


図 5 - 7 (a). 入力・出力波形

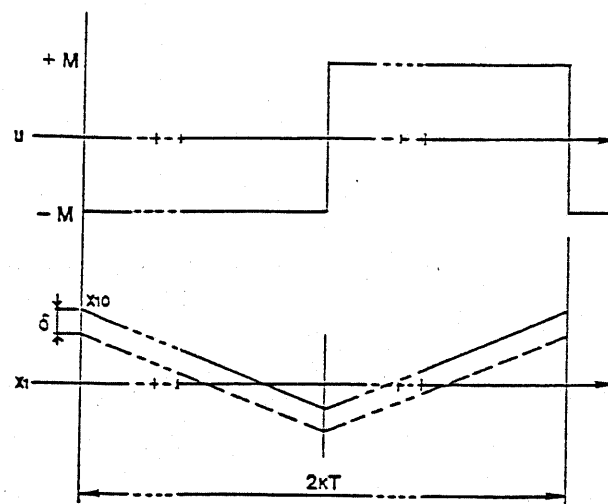


図 5 - 7 (b). 入力・出力波形 (原点に対して非対称)

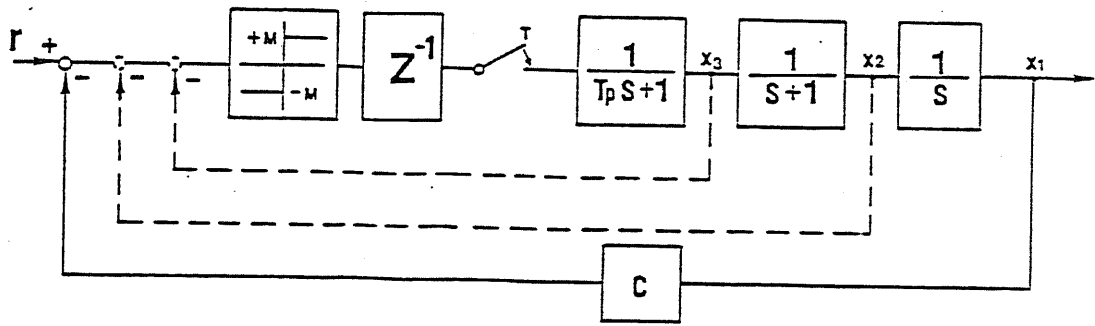


図5-10. 位置サーボ系 (1サンプリング遅れあり)

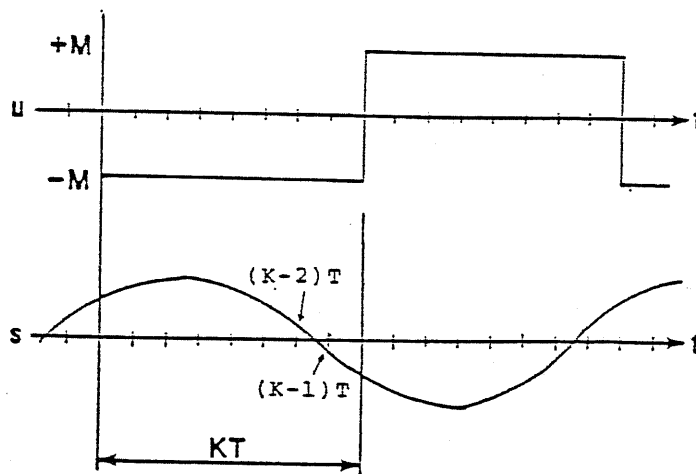


図5-11. 入力・出力波形 (1サンプリング遅れあり)

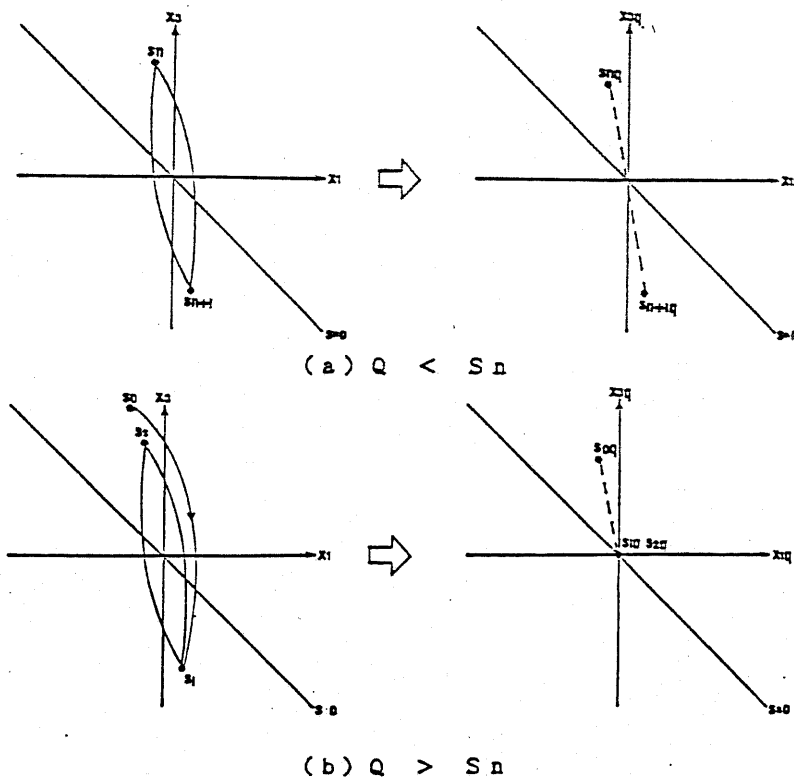


図5-14. センサー量子化幅とスイッチング (状態面 x_1-x_3)

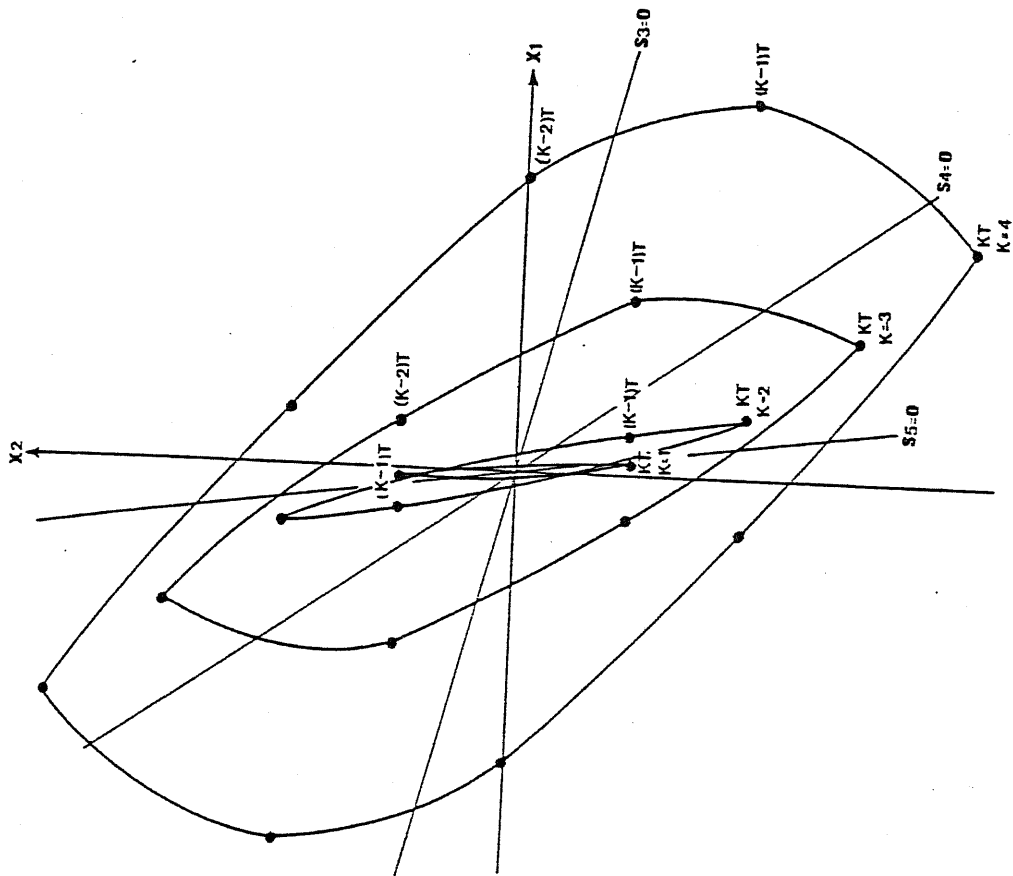


図5-13. 状態面軌跡 (x_1-x_3) (1サンプリング遅れあり)

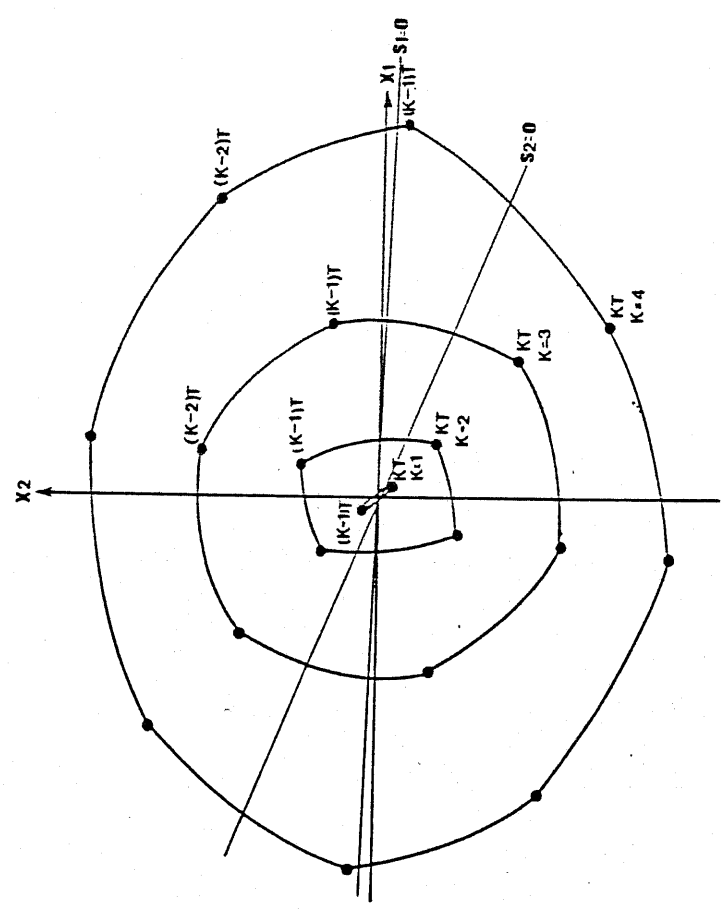


図5-12. 状態面軌跡 (x_1-x_2) (1サンプリング遅れあり)

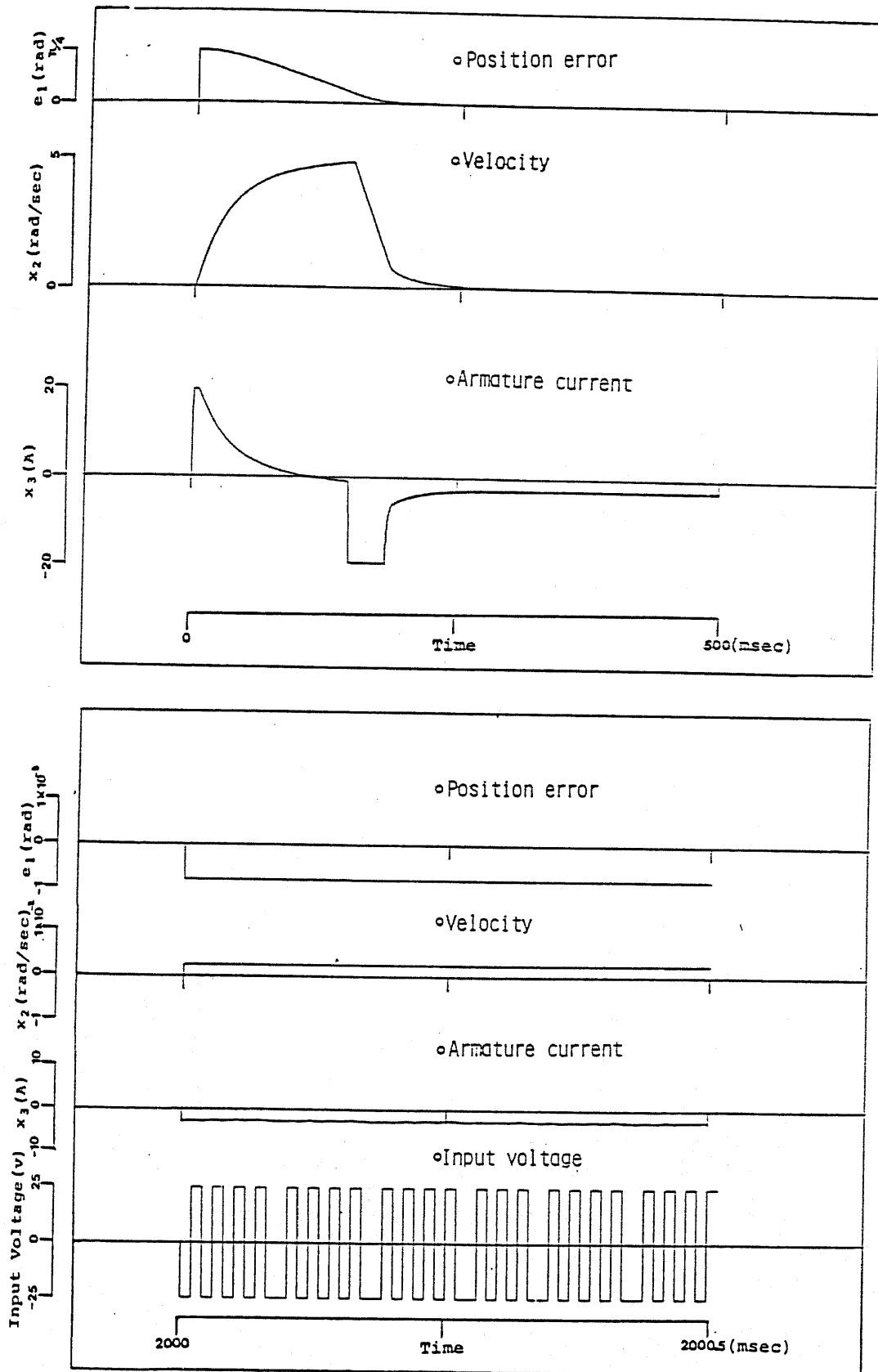


図5-15. シミュレーション結果 (位置+速度+電機子電流)

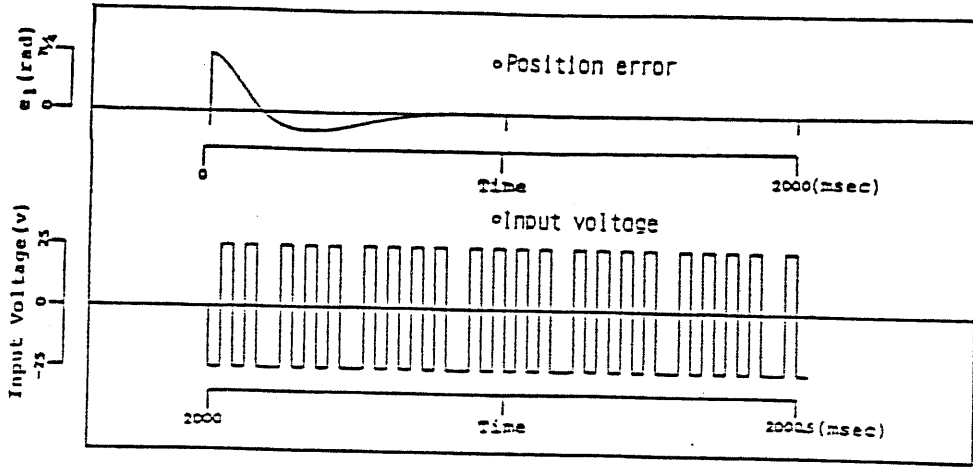


図5-16. シミュレーション結果 (位置+速度+電機子電流+積分動作)

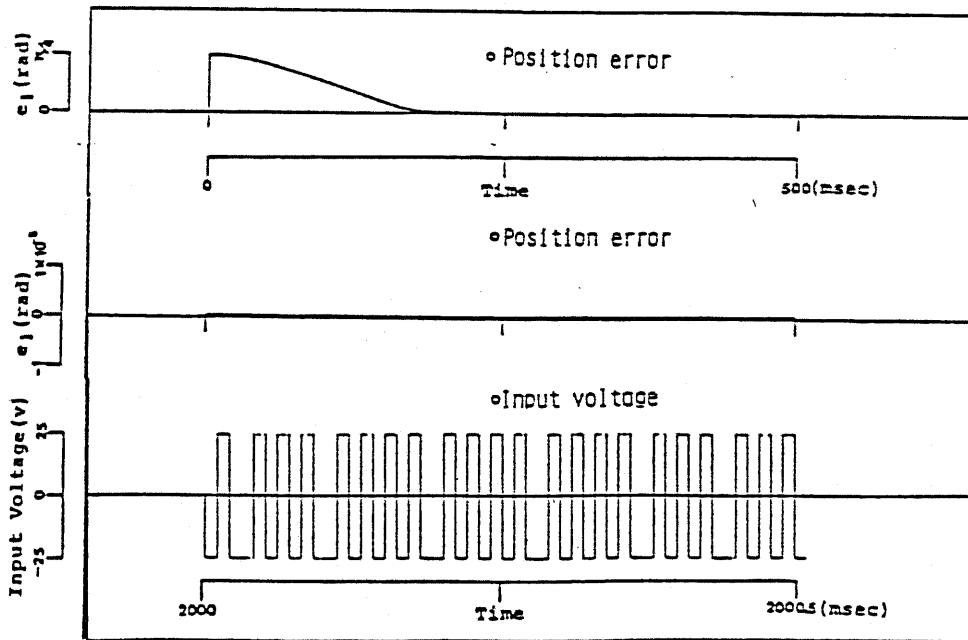


図5-17. シミュレーション結果 (可変モード)

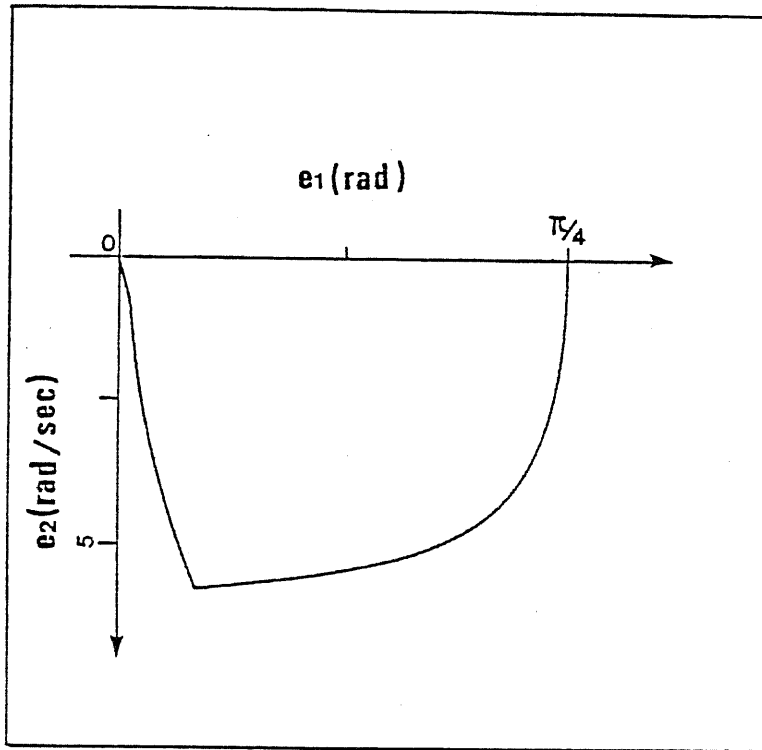


图 5 - 18. 位相面轨迹

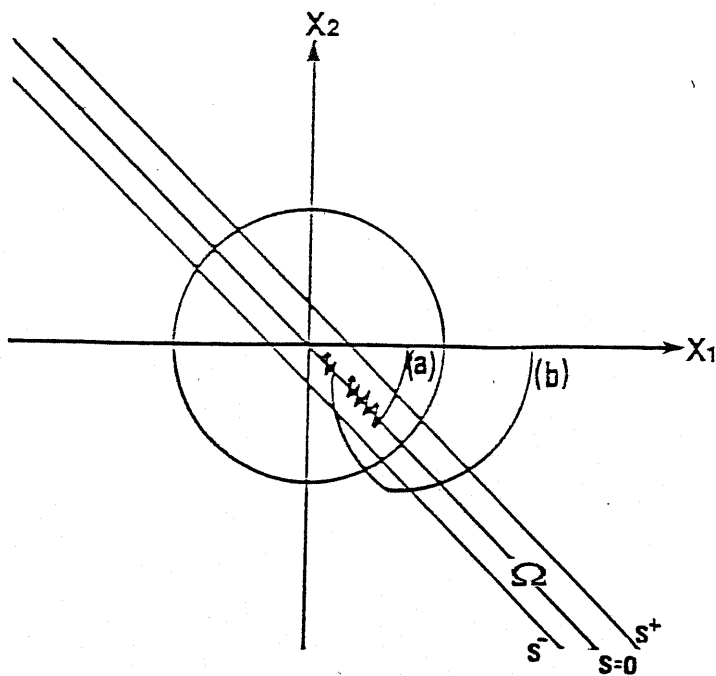


图 5 - 19. Sliding Mode 领域

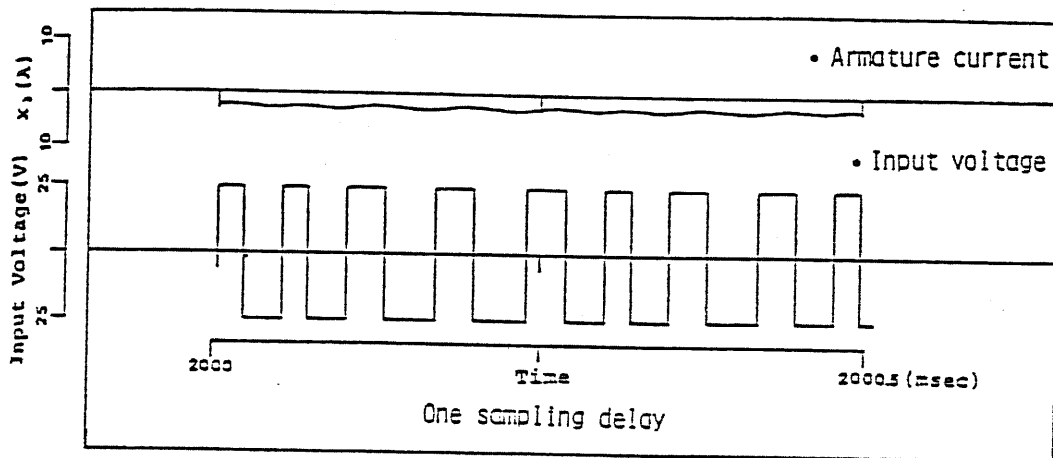


図5-20. シミュレーション結果 (可変モード1サンプリング遅れ)

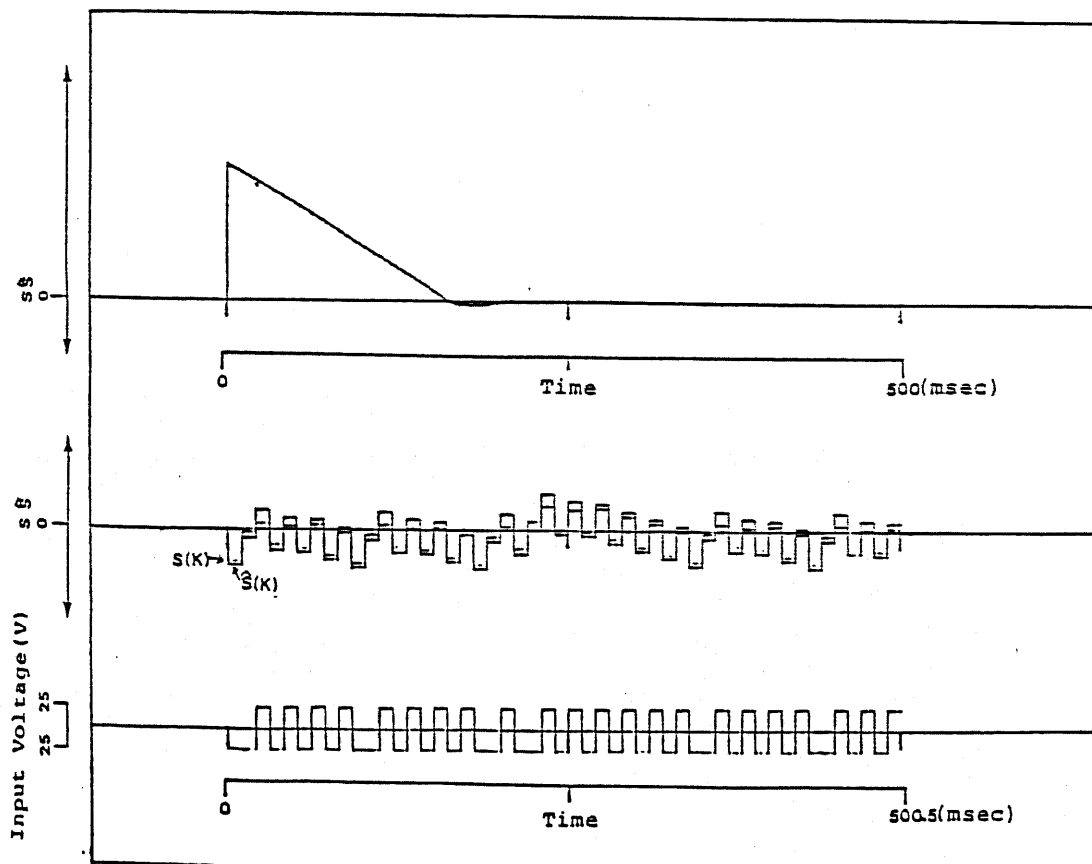


図5-21. ARMAモデルによる予測

付録

1. 可変構造系[1][2]

可変構造系理論は、線形制御理論と対比することで、その概念を明確にできる。ここでは、このような線形時不変な制御対象を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ x \in R^n, u \in R^m \quad (n \geq m) \end{aligned} \quad (1-1)$$

線形制御理論では、状態ベクトルフィードバック

$$u = -Kx \quad (K \in R^{m \times n}) \quad (1-2)$$

を制御入力とする。このフィードバック行列 K が、極配置・LQ制御等の手法で一意に定められる。これにたいして、可変構造系理論では(2)式の行列 K の各成分 K_{ij} が、制御対象の状態 x に従い次のように切り換わる。

$$K = \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{if } s_{ij}(x) > 0 \\ \beta_{ij} & \text{if } s_{ij}(x) > 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

$$(i=1, \dots, m \quad j=1, \dots, n)$$

$$\alpha_{ij} \neq \beta_{ij} \quad s_{ij}(x): \text{状態 } x \text{ の関数}$$

これから mn 個の関数 s_{ij} に対して、 K_{ij} はおのこの二つの値をとるので、 K は合計 2^{mn} 組存在する。一つの K に対応する制御系を、可変構造理論では「構造(Structure)」という。ここから、可変構造理論という。ここで「構造」とは(3)式からわかるように、制御系を構成している「要素(Component)」には変化がなく正帰還・負帰還のように変化する事を指す。つまり、制御入力 u のフィードバックゲインが切り換わる制御系である。

可変構造系の特徴を、2次系の制御対象の場合に関して示す。通常の線形フィードバックによって漸近安定には出来ないが、可変構造系を用いるとシステムは漸近安定となる。

(EX) 不安定な二つの構造を持つ制御系

$$\ddot{X} - \xi \dot{X} + \phi X = 0 \quad (\xi > 0) \quad (1-4)$$

を考える。フィードバックゲイン係数 ϕ が

$$\phi = \begin{cases} \alpha \\ -\alpha \end{cases} \quad (\alpha > 0) \quad (1-5)$$

と二つの値を取ることにより、 ϕ が α であれば負帰還で、 $-\alpha$ であれば正帰還となる。両構造とも図1-1(a),(b)に示すように不安定である。ただし、図1-1(a)で固有ベクトルに沿うときは、状態 (x, \dot{x}) が原点へ収束する。この固有ベクトルの傾き λ に着目して切り換え則を、

$$\phi = \begin{cases} \alpha & \text{if } x_s > 0 \\ -\alpha & \text{if } x_s \leq 0 \end{cases} \quad (1-6)$$

$$s = c\dot{x} + \dot{x} \quad c = -\lambda = -\frac{\xi}{2} + \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \alpha}$$

と選べば、図1-1(c)に示す漸近安定なシステムを得られる。2次系の場合異なる構造の軌跡を位相面上で組み合わせることにより希望する動特性を得ることが出来る。しかし、系のパラメータあるいはフィードバックゲイン α が変化すると動特性も変化する。例えば、何らかの原因で ξ が ξ' に変化し、変動後の固有ベクトルの傾き $c' = -\xi'/2 + \sqrt{\xi'^2/4 + \alpha}$ が $c > c'$ になったとする。この結果、切り換えは以前の傾き c を用いるので制御対象は図1-2の(a)から(b)へと挙動が変化し、パラメータに対して敏感な系になっている。

ここでパラメータ変動に対して不感な系を構成するために、切り換え線 $s=0$ の傾き c を固有ベクトルの傾きの内側にとる。位相面軌跡は図1-3と成り、制御対象は位相面軌跡に沿って I の領域から $s=0$ へ到達する。領域 II に入ると領域 I へ押し戻され、 $s=0$ の直線上で振動を生じながら原点へ収束する。この現象を Sliding Mode (すべり状態) という。

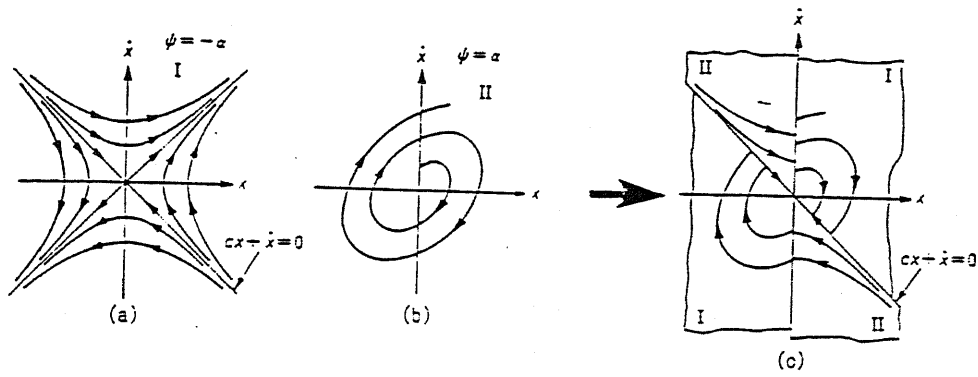


図1-1. 不定定な二つの構造をもつ可変構造系

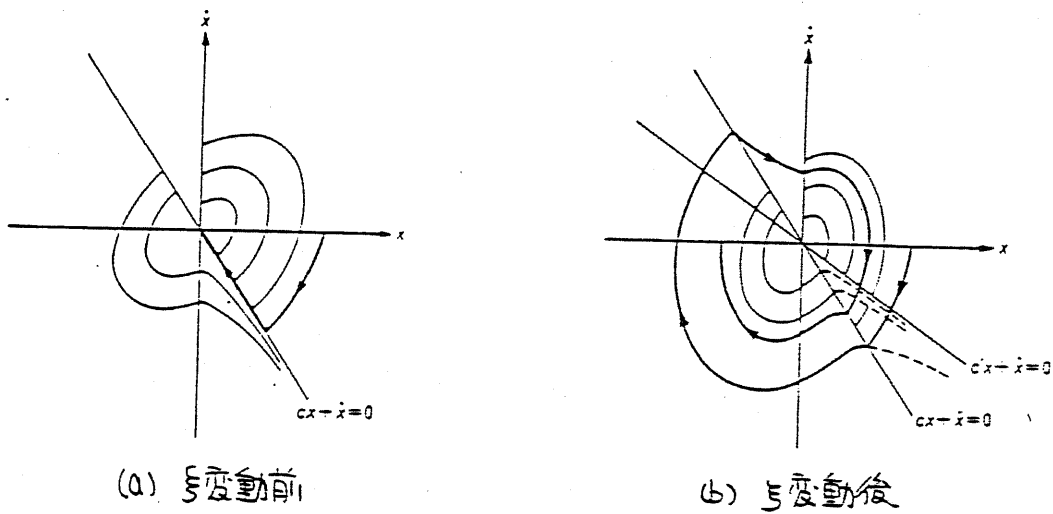


図1-2. xiの変動による動特性の変化

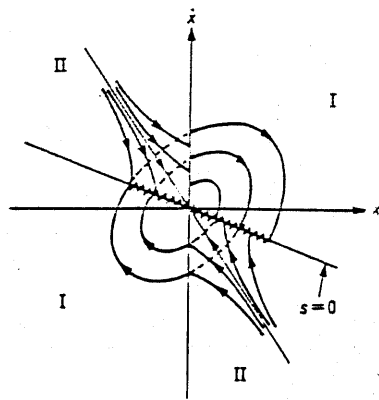


図1-3. Sliding Modeの導入

2. 実験システム

本実験では図2-1に示すような二軸ロボットアームの一軸を利用して、シミュレーション及び実験を行った。システムは、60W DCサーボモータをMOS FETにより駆動し1:80のハーモニックドライブを介してロボットアームに接続してある。位置はパルスエンコーダにより、速度はタコジェネレータにより、電機子電流は0.1Ωの抵抗を介してA/D変換して12bitのデータを16bitマイクロプロセッサへ情報を送り制御を行っている。実験システムを図2-2に示す。

次に、本システムの状態方程式を求める[3]。先ず、図2-3に示すアームに対して、そのダイナミクスは

$$(M_a l^2/3 + M_b l^2) \ddot{\theta} + (M_a l/2 + M_b l) g \sin \theta = T \quad (2-1)$$

で表される。ここで、 θ はアームの回転角、 T は関節角に働く駆動トルク、 $M_a \cdot M_b$ はそれぞれアームと負荷の質量、 l はアームの長さ、 g は重力加速度を示す。又、アクチュエータの生成トルクは、モータの駆動トルクと、アームの駆動トルクの和に等しいので、減速比 r のハーモニックドライブを介して結合されている場合は、

$$rT + J \dot{\omega} + D \omega = K i_a \quad (2-2)$$

となる。ここで、 D は減速機の粘性摩擦係数、 J はモータの慣性モーメント、 K はトルク係数、 i_a は電機子電流、 ω は回転速度である。

関節角 θ と回転速度 ω との関係より、

$$\dot{\theta} = r \omega \quad (2-3)$$

が成り立ち、(2-3)式を(2-2)式に代入し、さらに(2-1)式より、アームとモータを合わせたダイナミクスは、

$$\{J + r^2(M_a l^2/3 + M_b l^2)\} \ddot{\theta} + D \dot{\theta} + r^2(M_a l/2 + M_b l) g \sin \theta = rK i_a \quad (2-4)$$

となる。さらに、電機子回路について、キルヒホッフの電圧則より、

$$L_a \dot{i}_a + R_a i_a + K_e \omega = v_s \quad (2-5)$$

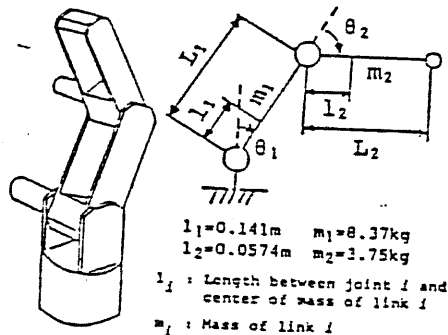
が成り立ち、(2-3)式の関係から、

$$\dot{i}_a = -R_a i_a / L_a - (K_e / r L_a) \theta + (1 / L_a) v_s \quad (2-6)$$

の微分方程式が成り立つ。よって、本システムの電圧指令の状態方程式は、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_e}{r L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{r K_t}{J + i' \left(\frac{M_a}{3} i' + 1 \right)} & 0 & -\frac{0}{J + i' \left(\frac{M_a}{3} i' + 1 \right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{r \left(\frac{M_a}{2} i' + M_p \right) \omega \sin \theta}{J + i' \left(\frac{M_a}{3} i' + 1 \right)} \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

となる。



Upper arm	30cm	80:1 Harmonic drive
	(60W dc)	1000puls/rev. encoder
		Tachogenerator
Lower arm	30cm	80:1 Harmonic drive
	(200W dc)	1000puls/rev. encoder
		Tachogenerator

図2-1. 二軸ロボット

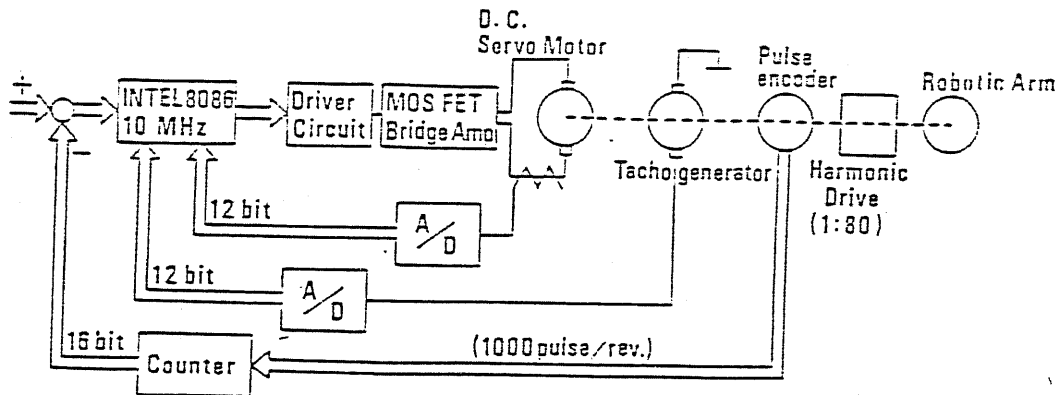


図2-2. 実験システム

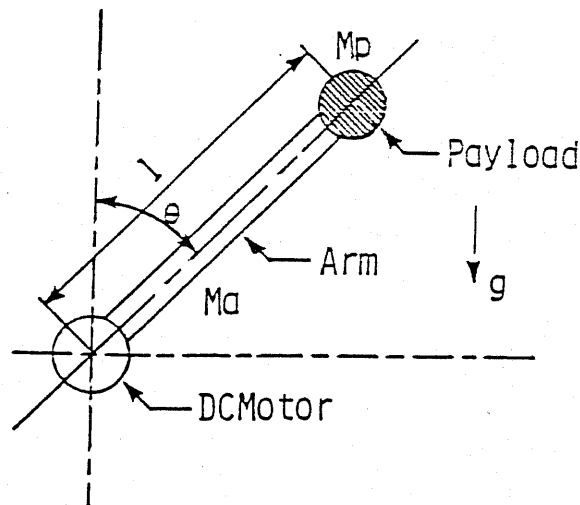


図2-3. 7-6モデル

3. Sliding Mode 存在条件及び到達条件

本制御則におけるSliding Modeの存在条件及び到達条件について述べる。ここでは、2次系のシステムに対して直観的に導入する。制御対象を

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 + u\end{aligned}\tag{3-1}$$

とし、制御入力 u を

$$u = v_s \operatorname{sgn}(s)\tag{3-2}$$

$$\text{但し } s = ce_1 + e_2$$

$$e_1 = x_{1d} - x_1 \quad x_{1d}: \text{desired position}$$

$$e_2 = \dot{e}_1$$

とする。

存在条件

存在条件は、

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \dot{s} < 0\tag{3-3}$$

であることが知られている[1],[2]。(3-3)式より

$$s \dot{s} = (a_1 x_1 + (a_2 - c)x_2)s - us\tag{3-4}$$

となる。(3-3)式を満足するためには、下線部に注意し第1項は $s \rightarrow 0$ で無視し、第2項については制御入力を(3-2)式のように設定すれば、切り換え線 $s=0$ の近傍でSliding Modeは存在し、切り換え面はHurwitz条件を満足しているなのでこの系は原点へ収束する。しかし、この存在条件は切り換え線近傍での局所的なSliding Mode存在条件である。このため次に本制御系が任意の初期値から出発して切り換え線 $s=0$ に到達する条件を示す。

到達条件

到達条件(十分条件)は、

$$s\dot{s} < 0 \quad (3-5)$$

であり、ゲイン V_s を

$$V_s > a_1 x_1 + (a_2 - c)x_2 \quad (3-6)$$

と設定すれば、(3-5)式は満足される。又、状態量 x_1, x_2 が大きく(3-6)式を満足しない場合は制御入力を(3-2)式のように設定すれば、システムは切り換え線 $s=0$ へ向かって移動する。これは、等傾斜線法により位相面軌跡で確認できる。

本制御則は、制御入力を(3-2)式のように設定すればシステムは任意の位置より出発して必ず切り換え面に向かって移動し到達する。到達後は存在条件を満足するのでシステムはSliding Modeとなり原点へ収束する。

4. 平衡点が原点に存在しない理由

制御対象を

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (4-1)$$

とする。もし制御対象が漸近安定ならば、制御入力 u が

$$u = \begin{cases} +M \\ -M \end{cases} \quad (4-2)$$

ならば、一对の平衡点

$$x_e = \pm A^{-1} bM \quad (4-3)$$

が存在する。(4-3)式より平衡点 x_e が存在する条件は

$$|A| \neq 0 \quad (4-4)$$

である。即ち原点に極を持たないことである。この場合リミットサイクルは原点に対して対称でない場合がある。(4-4)式で $|A| = 0$ の場合は平衡点は存在するが唯一ではない。左逆行列が存在すれば平衡点は

となる。

$$x_e = \pm A^{-1} bM$$

(4-5)

5. (6) 式の導出

$$\dot{x} = Ax(t) + bu(t) \quad (5-1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -d \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

(5-1) を離散化する。

$$x(nT) = \text{EXP}(A_n)x_0 + \int_0^n \text{EXP}(A_n) b d\tau u(\tau) \quad (5-2)$$

$$\text{EXP}(A_n) = d^{-1} [SI - A]^{-1} = d^{-1} \frac{\text{adj}(SI - A)}{\det(SI - A)} \quad d^{-1} : \text{逆行変換} \quad (5-3)$$

$$\det(SI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+d \end{vmatrix} = s(s+1)(s+d) \quad (5-4)$$

$$\text{adj}(SI - A) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+d) & s+d & 1 \\ 0 & s(s+d) & s \\ 0 & 0 & s(s+1) \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

$$[SI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s(s+1)(s+d)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+d)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+d} \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

$$\therefore \text{EXP}(A_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} & \frac{1}{d} - \frac{e^{-t}}{d-1} + \frac{e^{-dt}}{d(d-1)} \\ 0 & e^{-t} & \frac{e^{-dt} - e^{-t}}{1-d} \\ 0 & 0 & e^{-dt} \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

次に $\int_0^n \text{EXP}(A_n) b d\tau$ を求める。

$$\text{EXP}(A_n) b = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d e^{-t}}{d-1} + \frac{e^{-dt}}{d-1} \\ \frac{d(e^{-dt} - e^{-t})}{1-d} \\ d e^{-dt} \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \text{Exp}(A_n) |b| dt &= \left[n + \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{\alpha-1} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha(\alpha-1)} \right. \\
 &\quad \left. \frac{\alpha}{1-\alpha} (-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}) \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\alpha t} \right]_0^T \\
 &= \left[T - \frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} + \frac{\alpha}{\alpha(\alpha-1)} e^{-\alpha T} - \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} e^{-\alpha T} \right. \\
 &\quad \left. \frac{\alpha}{1-\alpha} (\frac{1}{\alpha} - 1 - \frac{e^{-\alpha T}}{\alpha} + e^{-\alpha T}) \right. \\
 &\quad \left. 1 - e^{-\alpha T} \right] \quad (59)
 \end{aligned}$$

よ2. (5-7), (5-9)より (6)が導出される。

6. 切り換え面に対する考察

ここでは本制御則の各切り換え面によるシステムの状態について述べる。制御対象は三次系とし一入力の可制御正準系とする。

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (6-1)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

位置+速度+電機子電流

$$s = c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3 \quad (6-2)$$

状態がSliding Modeの時、 $s=0$ となりまたその微分 \dot{s} も $s=0$ である。(6-2)式より

$$\begin{aligned} s &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3 \\ &= c_1 x_2 + c_2 x_3 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 + u = 0 \end{aligned} \quad (6-3)$$

(6-3)式より等価制御入力 u_{eq} を求めると

$$u_{eq} = a_1 x_1 + (a_2 - c_1) x_2 + (a_3 - c_2) x_3 \quad (6-4)$$

となる。(6-4)式を(6-1)式に代入するとシステムは

$$\dot{x} = A' x \quad (6-1)$$

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_1 & -c_2 \end{vmatrix} x \quad (6-5)$$

となり、システムは傾き c に依存する。又(6-5)式よりシステムの極は

$$\det(sI - A') = s(s^2 + c_2s + c_1) = 0 \quad (6-6)$$

より求めることが出来る。

位置+速度+電機子電流+積分

$$s = c_a \int x_1 dt + c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3 \quad (6-7)$$

同様にして等価制御入力 u_{eq} を求めると

$$u_{eq} = (a_1 - c_a)x_1 + (a_2 - c_1)x_2 + (a_3 - c_2)x_3 \quad (6-8)$$

となり、システムは

$$\dot{x} = A'x \quad (6-9)$$

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c_a & -c_1 & -c_2 \end{vmatrix} x \quad (6-10)$$

となる。またその極は

$$\det(sI - A') = s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_a = 0 \quad (6-11)$$

となる。

7. 擬似 Sliding Mode

本システムをデジタル系によって構成する場合、制御器の演算による遅れや、ハードウェアの制限によって切り換え面上では無限大の周期で切り換えが起きることは不可能であり、必ず切り換えの遅れを生じる。この遅れが小さい場合には切り換え面近傍においてチャタリングを起こして Sliding Mode に似た動作となる。この動作を擬似 Sliding Mode という。ここでは本制御則の擬似 Sliding Mode につ

いて考える。

制御対象を

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ x(t) &\in R^n \quad u(t) \in R^1 \end{aligned} \quad (7-1)$$

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \cdot & 0 & 1 & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & & & 1 & 0 \\ & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & -a_1 & -a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_n \end{array} \quad b = \begin{array}{c|c} & 0 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & 0 \\ & 1 \end{array}$$

として、次のような仮定をする。

仮定： (1) 状態 $x(t)$ はサンプリング周期 T 毎に直接観測できるものとする。

(2) 制御入力 $u(t)$ は

$$u(t) = u(mT) \quad mT \leq t < (m+1)T \quad (m=1, 2, \dots) \quad (7-2)$$

とする。

(3) 演算時間はサンプリング周期より短いものとする。

上記の仮定で切り換え面を次式のように設定する。

$$\begin{aligned} \text{超平面の設定: } \Sigma &\equiv \{ x \mid x \in R^n, s = c^T x = 0 \} \quad c^T = [c_1, \dots, c_n] \\ & \quad c_n = 1 \end{aligned} \quad (7-3)$$

ここで、Itkis、安田らの擬似Sliding Mode領域の定義を下記に示す[4][5]。

切り換え面 Σ を含む領域 Ω を

$$\Omega \equiv \{ x \mid x \in R^n, |c^T x| - \theta^T |x| \leq 0 \} \quad \theta > 0 \quad (7-4)$$

として解 $x(t)$ が領域 Ω に到達し、それ以降、解が Ω 内に存在する時、 Ω をSliding Mode領域といい、この領域内での解 $x(t)$ のふるまいを擬似Sliding Modeという。

制御入力 u を

$$u = -k_s s(mT) - k_v |x(mT)| \operatorname{sign}(s(mT)) \quad (7-5)$$

とした場合、もし、 $k_v = 0$ とおくと制御入力 u 及びチャタリングは

$$\begin{array}{ll} |x(mT)| \rightarrow \text{大の時} & u = \text{大} \rightarrow \text{チャタリングは大きい} \\ |x(mT)| \rightarrow \text{小の時} & u = \text{小} \rightarrow \text{チャタリングは小さい} \end{array}$$

となり、図7-1のような振舞いをする。本制御系は制御入力を次式のように設定している。

$$\begin{aligned} u(mT) &= -V_s \operatorname{sgn}(s(mT)) \\ V_s &= \text{const}, V_s > 0 \end{aligned} \quad (7-6)$$

原点近傍でも一定の制御入力が入力されているため原点近傍でのチャタリングが大きくなることが予想される。その時のシステムは(7-6)式を(7-1)式に代入するとシステムは

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - bV_s \operatorname{sgn}(s(mT)) \quad (7-7)$$

となる。

そこで今回、制御入力がON-OFFパターンの擬似Sliding Mode領域の定義を次のようにする。

定義

切り換え超平面 Σ を含む領域 Ω を

$$\Omega \equiv \{ x \mid x \in \mathbb{R}^n, |c^T x| - \theta \leq 0 \} \quad \theta > 0 \quad (7-8)$$

とする。(7-7)式で表されるシステムがどのような初期値より出発しても解 $x(t)$ が有限時間で領域 Ω に到達し、それ以降、解が Ω 内に存在する時、 Ω を Sliding Mode 領域といい、この領域内での解 $x(t)$ のふるまいを擬似 Sliding Mode という(図7-2)。

擬似 Sliding Mode の存在条件

領域 Ω の上限、下限の境界を次のように定める。

$$s^+ = c^T x - \theta \quad (7-9.a)$$

$$s^- = c^T x + \theta \quad (7-9.b)$$

次に(7-9)式を時間で微分すると

$$\dot{s}^\pm(t) = c^T \dot{x} \quad (7-10)$$

となり、時刻 $mT \leq t < (m+1)T$ において

$$\dot{s}^\pm(t) = c^T [Ax(t) + bu(mT)] \quad (7-11)$$

となる。

補題

与えた c, θ に対して、 $mT \leq t < (m+1)T$ 間の任意の時刻 t で次の2条件が満足するならば領域 Ω は Sliding Mode 領域である。

$$(i) \quad s(mT) > 0 \text{ ならば、} \dot{s}^-(t) < 0 \quad (7-12)$$

$$s(mT) < 0 \text{ ならば、} \dot{s}^-(t) > 0 \quad (7-13)$$

$$(ii) \quad \xi(t) = x(t) - x(mT) \text{ について} \quad (7-14)$$

$$c^T |\xi(t)| \leq |s(mT)| + \theta \quad (7-15)$$

(証明)

(i) について

(a) 初期値 x_0 が Ω^- (Ω^-) の時、即ち領域外 ($s^-(0) > 0$ ($s^-(0) < 0$)) より出発する場合、条件(i)より $\dot{s}^-(t)$ は単調減少 ($\dot{s}^-(t)$ は単調増加) なので状態 $x(t)$ は領域 Ω に到達する。もし $s^-(mT) > 0$ ($s^-(mT) < 0$) なる m について、

$mT \leq t < (m+1)T$ の区間で $s^-(t) \geq 0$ ($s^+(t) \leq 0$) が成り立つなら $x(t)$ は Ω 内に存在する。

(b) サンプルング時刻 mT での状態 $x(mT)$ が Ω 内で、かつ $s(mT) \neq 0$ の時、 $s(mT) > 0$ ($s(mT) < 0$) なる m について、 $mT \leq t < (m+1)T$ の区間で $s^-(t) \geq 0$ ($s^+(t) \leq 0$) が成り立つなら $x(t)$ は Ω 内に存在する。

(ii) について

$\xi(t) = x(t) - x(mT)$ より $x(t) = \xi(t) + x(mT)$ となり、(7-9.b)式に代入すると

$$\begin{aligned} s^-(t) &= c^T x(t) + \theta = c^T (\xi(t) + x(mT)) + \theta \\ &= c^T \xi(t) + c^T x(mT) + \theta \\ &\geq -c^T |\xi(t)| + c^T x(mT) + \theta \geq 0 \\ \therefore c^T |\xi(t)| &\leq |s(mT)| + \theta \end{aligned} \quad (7-16)$$

(7-16)式は時刻 $mT \leq t < (m+1)T$ 間での状態 $s(t)$ が Sliding Mode 領域内に存在することを保証する。

次に入力ゲイン k を求める。

まず時刻 mT の状態を $s(mT) > 0$ とする。(7-9)式を時間で微分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{s}^-(t) &= c^T \dot{x}(t) \\ &= c^T \{Ax(t) + bu(mT)\} \end{aligned} \quad (7-17)$$

ここで、(7-14)式より

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x(t) - x(mT) = Ax(t) + bu(mT) \\ &= A\xi(t) + Ax(mT) + bu(mT) \end{aligned} \quad (7-18)$$

となり、 $\xi(t)$ は

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \int e^{A(t-s)} ds (Ax(mT) + bu(mT)) \\ &= -\frac{1}{A} (1 - e^{A(t-mT)}) (Ax(mT) + bu(mT)) \end{aligned} \quad (7-19)$$

となる。よって $\dot{s}^+(t)$ は

$$\begin{aligned}\dot{s}^-(t) &= c^T e^{A(t-mT)} \{Ax(mT) + bu(mT)\} \\ &= c^T (e^{A(t-mT)} - I) \{Ax(mT) + bu(mT)\} + c^T \{Ax(mT) + bu(mT)\} \\ &\leq c^T (e^{p(t-mT)} - 1) |Ax(mT) + bu(mT)| + c^T |Ax(mT) + bu(mT)| \\ &= c^T e^{p(t-mT)} |Ax(mT) + bu(mT)|\end{aligned}$$

ここで $s(mT) > 0$ より、 $\text{sgn}(s(mT)) = 1$ となり、

$$\begin{aligned}s^+(t) &\leq c^T e^{p(t-mT)} \{ |A| |x(mT)| - bV_s \} \\ &= c^T e^{p(t-mT)} |A| |x(mT)| - e^{p(t-mT)} V_s \quad (7-20) \\ &\text{但し } p \triangleq \max \left\{ \frac{c_{i-1} + |a_i|}{c_i} \right\}\end{aligned}$$

よってゲイン V_s は

$$V_s > c^T |A| |x(mT)| = \sum_{i=1}^n (c_{i-1} + a_i) |x_i(mT)| \quad (7-21)$$

(7-21)式より原点近傍でのゲイン K の設定指針は

$$\underline{V_s > 0} \quad (7-22)$$

である。次に $\xi(t) = \int e^{A(t-s)} ds (Ax(mT) + bu(mT))$ より両辺に左から c^T を掛け絶対値をとると

$$\begin{aligned}c^T |\xi(t)| &\leq \int c^T e^{A(t-s)} ds |Ax(mT) + bu(mT)| \\ &\leq \int e^{p(t-s)} ds c^T |Ax(mT) + bu(mT)| \\ &= e^{p(t-mT)} - 1 \quad c^T |Ax(mT) + bu(mT)| \\ &= \beta^{-1} c^T |Ax(mT) + bu(mT)| \\ &\leq \beta^{-1} c^T |A| |x(mT)| + \beta^{-1} c^T b V_s \quad (7-23) \\ &\text{但し、 } \beta^{-1} \triangleq \frac{e^{p(t-mT)} - 1}{p}\end{aligned}$$

よってゲイン V_s は (7-23) 式より

$$V_s < \beta c^T |A| |x(mT)| + \beta \theta^{-1} c^T |A| |x(mT)| \quad (7-24)$$

となる。(7-24)式より原点近傍でのゲイン V_s の設定指針は

$$V_s < \beta \theta \quad (7-25)$$

である。また、その十分条件を与えておく。

$$\lambda \min |A| \geq \beta \quad (7-26)$$

以上の結果より原点近傍でのゲイン V_s の設定指針は

$$0 < V_s < \beta \theta \quad (7-27)$$

である。

シミュレーション結果

制御対象を次のようにする。

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u(t) \quad (7-27)$$

これに対して超平面を $c: = 1$ として

$$s = c_1 x_1 + x_2 \quad (7-28)$$

とする。(7-27)式の条件よりサンプリングタイムを0.01(s)としてゲイン K を求めた。図7-3.4に $\theta = 1, 0.1$ とした時のゲイン K をそれぞれ90.9としてシミュレーションを行った。その結果より、状態がすべり領域に入ってから領域外には出ず、原点近傍においても領域外には出ない結果を得た。

しかし、実機においては、スイッチング素子への最大電圧であり、すでにその値は与えられおり、状態量が大きい場合はゲインが存在条件を満足しないため擬似Sliding Modeは存在しない場合がある。擬似Sliding Modeの存在領域はゲインと状態量の関係から図7-5のように表せられ、この領域外では、システムが任意の初期値から出発した場合、状態は領域に向かって移動し、領域内で切り換え面に到達し擬似Sliding Mode状態となり原点へ収束する。又チャタリングの大きさはサンプリング時間とも大きく関係する。サンプリング時間が十分短い場合は擬似

Sliding Mode存在領域 Ω の θ の値が小さくなり、チャタリングが小さくなる。よって確定された入力ゲイン V_s の場合はサンプリング時間を十分小さくすればチャタリングも小さいものとなる。

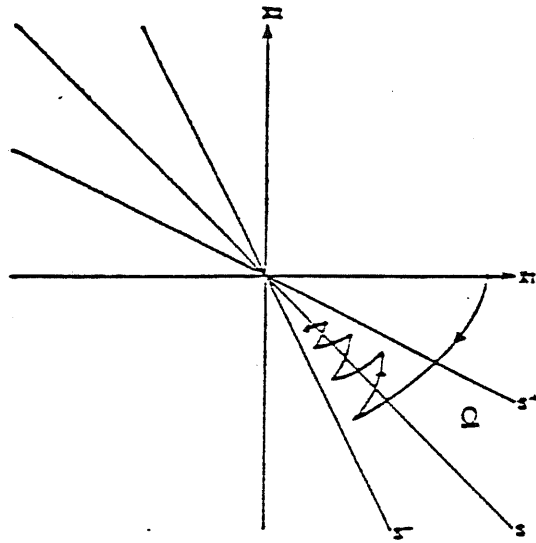


圖 7-1. It's is. 類似 Sliding Mode 存在區域

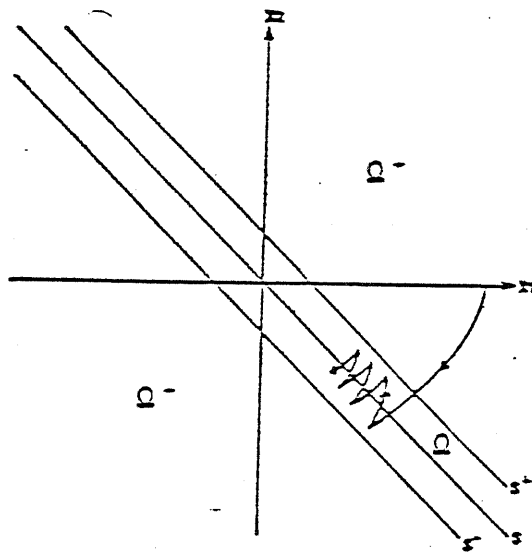


圖 7-2. ON-OFF Pattern 類似 Sliding Mode 存在區域

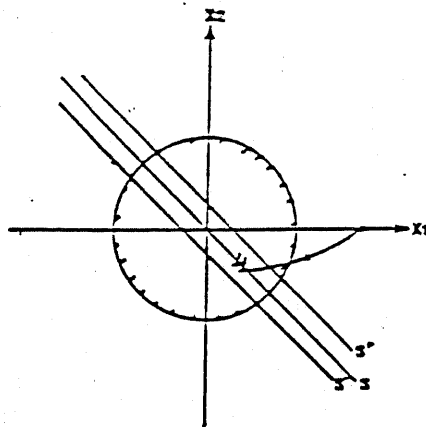


圖 7-5. 類似 Sliding Mode 存在區域

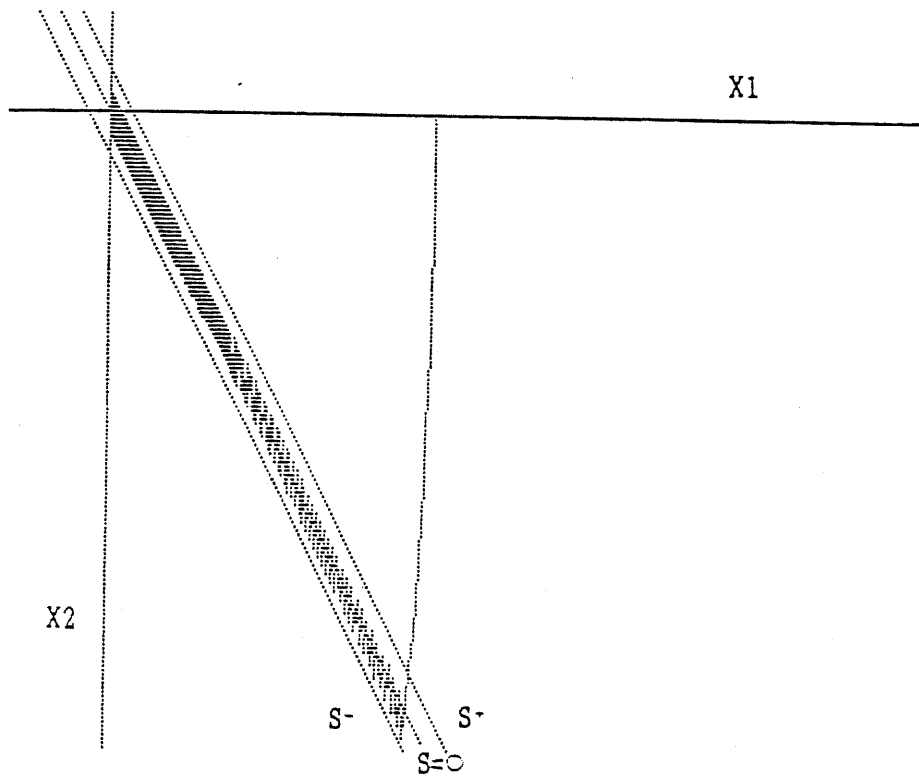


図7-3. シミュレーション結果(1)

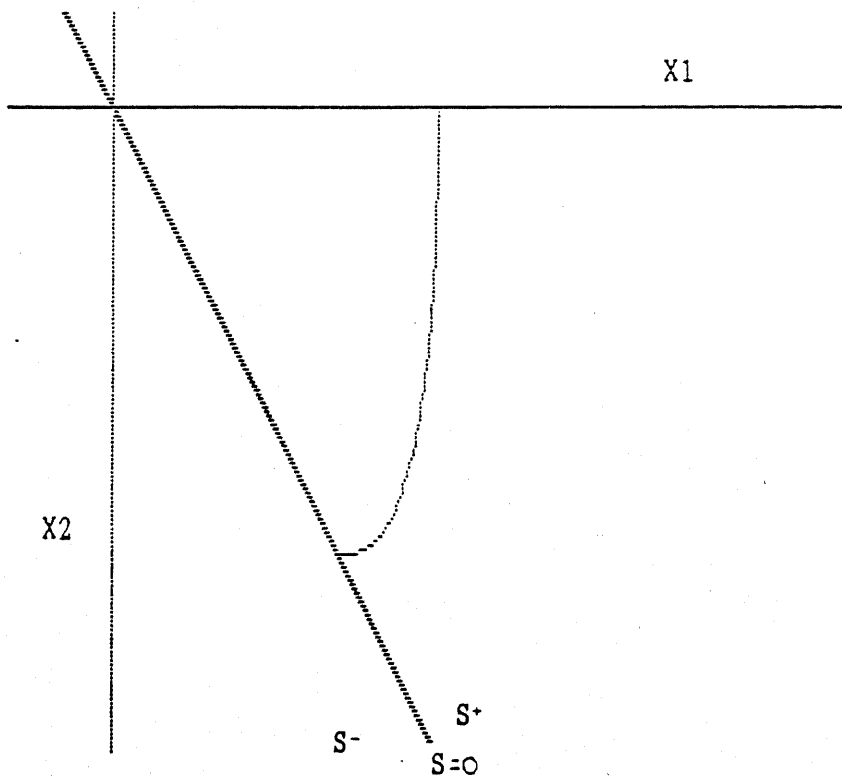


図7-4. シミュレーション結果(2)

8. ARMA モデル真値パラメータ

制御対象をモータ側で表すと状態方程式は次のように成る。

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (8-1)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & \frac{K_e}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_t}{J_m} & 0 & -\frac{D}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_a}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_a \quad (8-2)$$

但し $J_m = J + r^2(M_H^2 + M_P^2)$

但し、 $R_a = 1.1 [\Omega]$ $M_p = 4 [\text{Kg}]$ $l = 0.3 [\text{m}]$ $L_a = 0.9 \times 10^{-3} [\text{H}]$ $M_H = 3.75 [\text{Kg}]$
 $g = 9.8 [\text{Kg/m}^2]$ $D = 5 \times 10^{-5} [\text{N}\cdot\text{ms/rad}]$ $K_t = 5.73 \times 10^{-3} [\text{N}\cdot\text{m/A}]$
 $K_e = 5.73 \times 10^{-3} [\text{V/rad/s}]$ $r = 1/80$ $J_m = 8.95 \times 10^{-5} [\text{Kg}\cdot\text{m}^2]$

数値計算をすると次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.22 \times 10^3 & 0 & -6.37 \times 10^3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6.40 \times 10^2 & 0 & -5.59 \times 10^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.11 \times 10^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_a \quad (8-3)$$

(8-3)式を離散化する。

$$x(n+1) = \text{EXP}(AT)x(n) + \int_0^T \text{EXP}(A_p) b d p u(n) \quad (8-4)$$

$$[sI - A]^{-1}$$

$$\det(sI - A) = s(s+35)(s+1185)$$

$$\text{adj}(sI - A)$$

$$\text{adj}_{11} = -\frac{0.03}{s+35} + \frac{1.03}{s+1185} \quad \text{adj}_{12} = 0$$

$$\text{adj}_{13} = -\frac{5.54 \times 10^{-2}}{s+35} + \frac{5.54 \times 10^{-2}}{s+1185}$$

$$\text{adj}_{21} = \frac{1.54 \times 10^{-2}}{s} - \frac{1.59 \times 10^{-2}}{s+35} + \frac{4.7 \times 10^{-4}}{s+1185}$$

$$\text{EXP}(AT)b = \begin{vmatrix} -33.3e^{-35T} + 1.14e^{-1185T} \\ 1.71 \times 10^{-1} - 1.76 \times 10e^{-35T} + 0.52e^{-1185T} \\ 6.18 \times 10^2 e^{-35T} - 6.18 \times 10^2 e^{-1185T} \end{vmatrix} \quad (8-6)$$

$$\int \text{EXP}(Ap)bdp = \begin{vmatrix} 9.51 \times 10^{-1} e^{-35p} - 9.62 \times 10^{-4} e^{-1185p} \\ 1.71 \times 10p + 5.03 \times 10^{-1} e^{-35p} - 4.39 \times 10^{-4} e^{-1185p} \\ -1.76 \times 10e^{-35p} + 5.22 \times 10^{-1} e^{-1185p} \end{vmatrix} \begin{matrix} T \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 9.51 \times 10^{-1} e^{-35T} - 9.62 \times 10^{-4} e^{-1185T} - 9.5 \times 10^{-1} \\ 1.71 \times 10T + 5.03 \times 10^{-1} e^{-35T} - 4.39 \times 10^{-4} e^{-1185T} - 5.03 \times 10^{-1} \\ -1.76 \times 10e^{-35T} + 5.22 \times 10^{-1} e^{-1185T} + 1.71 \times 10 \end{vmatrix} \quad (8-7)$$

$$= \begin{vmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{vmatrix}$$

z変換を行う。出力Y(z)は

$$Y(z) = c[zI - \Phi]^{-1} \Gamma$$

(8-8)

なる。

$$[zI - \Phi]^{-1} = \begin{vmatrix} z - \Phi_{11} & 0 & -\Phi_{13} \\ -\Phi_{21} & z - \Phi_{22} & -\Phi_{23} \\ -\Phi_{31} & 0 & z - \Phi_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det[zI - \Phi] &= (z - \Phi_{11})(z - \Phi_{22})(z - \Phi_{33}) - \Phi_{13}\Phi_{31}(z - \Phi_{22}) \\ &= z^3 - (\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33})z^2 \\ &\quad + (\Phi_{11}\Phi_{22} + \Phi_{33}(\Phi_{11} + \Phi_{22}) - \Phi_{13}\Phi_{31})z \\ &\quad + \Phi_{13}\Phi_{31}\Phi_{22} - \Phi_{11}\Phi_{22}\Phi_{33} \\ &\triangleq z^3 + p_1 z^2 + p_2 z + p_3 \end{aligned}$$

(8-9)

$$\text{adj}[zI - \Phi] = \begin{pmatrix} (z - \Phi_{22})(z - \Phi_{33}) & 0 \\ \Phi_{21}(z - \Phi_{33}) + \Phi_{23}\Phi_{31} & (z - \Phi_{11})(z - \Phi_{33}) - \Phi_{13}\Phi_{31} \\ \Phi_{31}(z - \Phi_{22}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_{13}(z - \Phi_{22}) \\ \Phi_{23}(z - \Phi_{11}) + \Phi_{13}\Phi_{21} \\ (z - \Phi_{11})(z - \Phi_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & 0 & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & 0 & z_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{cadj}[zI - \Phi]\Gamma &= [c, 1, 1] \text{adj}[zI - \Phi] \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{pmatrix} \\ &= \Gamma_1(cz_{11} + z_{21} + z_{31}) + \Gamma_2 z_{22} + \Gamma_3(cz_{13} + z_{23} + z_{33}) \\ &= (\Gamma_1 c + \Gamma_2 + \Gamma_3)z^2 + \{\Gamma_1 \Phi_{21} - \Gamma_1 c(\Phi_{22} + \Phi_{33}) + \Gamma_1 \Phi_{31} \\ &\quad - \Gamma_2(\Phi_{11} + \Phi_{33}) + \Gamma_3 c \Phi_{13} + \Gamma_3 \Phi_{23} - \Gamma_3(\Phi_{11} + \Phi_{22})\}z \\ &\quad + \{\Gamma_1 c \Phi_{22} \Phi_{33} + \Gamma_1(\Phi_{23} \Phi_{31} - \Phi_{21} \Phi_{33}) - \Gamma_1 \Phi_{31} \Phi_{22} \\ &\quad + \Gamma_2(\Phi_{11} \Phi_{33} - \Phi_{13} \Phi_{31}) - \Gamma_3 c \Phi_{13} \Phi_{22} \\ &\quad + \Gamma_3(\Phi_{13} \Phi_{21} - \Phi_{23} \Phi_{11}) + \Gamma_3 \Phi_{11} \Phi_{22}\} \\ &\triangleq \Gamma_1 z^2 + \Gamma_2 z + \Gamma_3 \end{aligned} \tag{8-10}$$

よって真値パラメータは(8-9), (8-10)式より求められる。

$$\begin{aligned} p_1 &= -(\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}) \\ p_2 &= \Phi_{11} \Phi_{22} + \Phi_{33}(\Phi_{11} + \Phi_{22}) - \Phi_{13} \Phi_{31} \\ p_3 &= \Phi_{13} \Phi_{31} \Phi_{22} - \Phi_{11} \Phi_{22} \Phi_{33} \\ \Gamma_1 &= \Gamma_1 c + \Gamma_2 + \Gamma_3 \\ \Gamma_2 &= \Gamma_1 \Phi_{21} - \Gamma_1 c(\Phi_{22} + \Phi_{33}) + \Gamma_1 \Phi_{31} \\ &\quad - \Gamma_2(\Phi_{11} + \Phi_{33}) + \Gamma_3 c \Phi_{13} + \Gamma_3 \Phi_{23} - \Gamma_3(\Phi_{11} + \Phi_{22}) \\ \Gamma_3 &= \Gamma_1 c \Phi_{22} \Phi_{33} + \Gamma_1(\Phi_{23} \Phi_{31} - \Phi_{21} \Phi_{33}) - \Gamma_1 \Phi_{31} \Phi_{22} \\ &\quad + \Gamma_2(\Phi_{11} \Phi_{33} - \Phi_{13} \Phi_{31}) - \Gamma_3 c \Phi_{13} \Phi_{22} \\ &\quad + \Gamma_3(\Phi_{13} \Phi_{21} - \Phi_{23} \Phi_{11}) + \Gamma_3 \Phi_{11} \Phi_{22} \end{aligned}$$

9. オブザーバを用いた可変構造系の設計[6]

Sliding Modeは超平面 $s=0$ を構成する時、全ての状態量が観測出来なければならぬ。そこで状態量が観測できない状態に対しオブザーバを構成し状態量を推定し、その推定状態を用いて超平面を構成しSliding Mode制御を行う。制御対象を

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} & (i=1, \dots, n-1) \\ \dot{x}_n &= -\sum_{i=1}^n a_i x_i + u \end{aligned} \quad (9-1)$$

と置く。ここで最小次元オブザーバを

$$\dot{w} = Aw + Ky + bu \quad (9-2)$$

$$\hat{x} = Dw + Hy \quad (9-3)$$

として、観測できない状態量を推定し k 個フィードバック可能として

$$u = -\sum_{i=1}^k \psi_i x_i - kr \operatorname{sgn}(s) \quad (9-4)$$

$$\psi_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{if } sx_i > 0 \\ \beta_i & \text{if } sx_i < 0 \end{cases}$$

$$s = \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad \text{但し、} c_i > 0, c_n = 1 \quad (9-5)$$

とする。この時制御入力 u は、Sliding Mode存在条件

$$s\dot{s} < 0 \quad (9-6)$$

を満足するように設計し、不観測な状態量 x_i を \hat{x}_i にして制御入力を

$$u = -\sum_{i=1}^k \psi_i \hat{x}_i - kr \operatorname{sgn}(s) \quad (9-7)$$

として制御を行う。

シミュレーション

制御対象は

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (9-8)$$

とし、 x_1 のみ可観測であると仮定する。

最小次元オブザーバはオブザーバの極を-10とすると

$$\dot{w} = -10w - 9y + u \quad (9-9)$$

$$x_2 = w + 9y \quad (9-10)$$

となる。Sliding Modeの入力を

$$u = \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 + k_r \operatorname{sgn}(s) \quad (9-11)$$

$$\psi_1 = \begin{cases} \alpha_1 & se_1 > 0 \\ \beta_1 & se_2 < 0 \end{cases} \quad \psi_2 = \begin{cases} \alpha_2 & se_2 > 0 \\ \beta_2 & se_2 < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} e_1 = x_1 - x_1^d \\ e_2 = -x_2 \end{matrix}$$

とする。存在条件よりフィードバックゲインは

$$s\dot{s} = -\psi_1 se_1 + (c-1-\psi_2)se_2 - k_r \cdot s \cdot \operatorname{sgn}(s) \quad (9-12)$$

$$\psi_1 = \begin{cases} \alpha_1 > 0 & se_1 > 0 \\ \beta_1 < 0 & se_2 < 0 \end{cases} \quad \psi_2 = \begin{cases} \alpha_2 > c-1 & se_2 > 0 \\ \beta_2 < c-1 & se_2 < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} k_r > 0 \\ (9-13) \end{matrix}$$

となる。傾き $c=5$ としゲインは下記のように設定した。

$$\psi_1 = \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = -1 \end{cases} \quad \psi_2 = \begin{cases} \alpha_2 = 10 \\ \beta_2 = -10 \end{cases} \quad k_r = 5 \quad (9-14)$$

シミュレーション結果を図9に示す。 x_2 の初期値は-0.5と設定した。シミュレーション結果より、状態が不観測でもオブザーバを構成することにより状態を推定しその推定値よりSliding Mode制御可能であることを確認した。

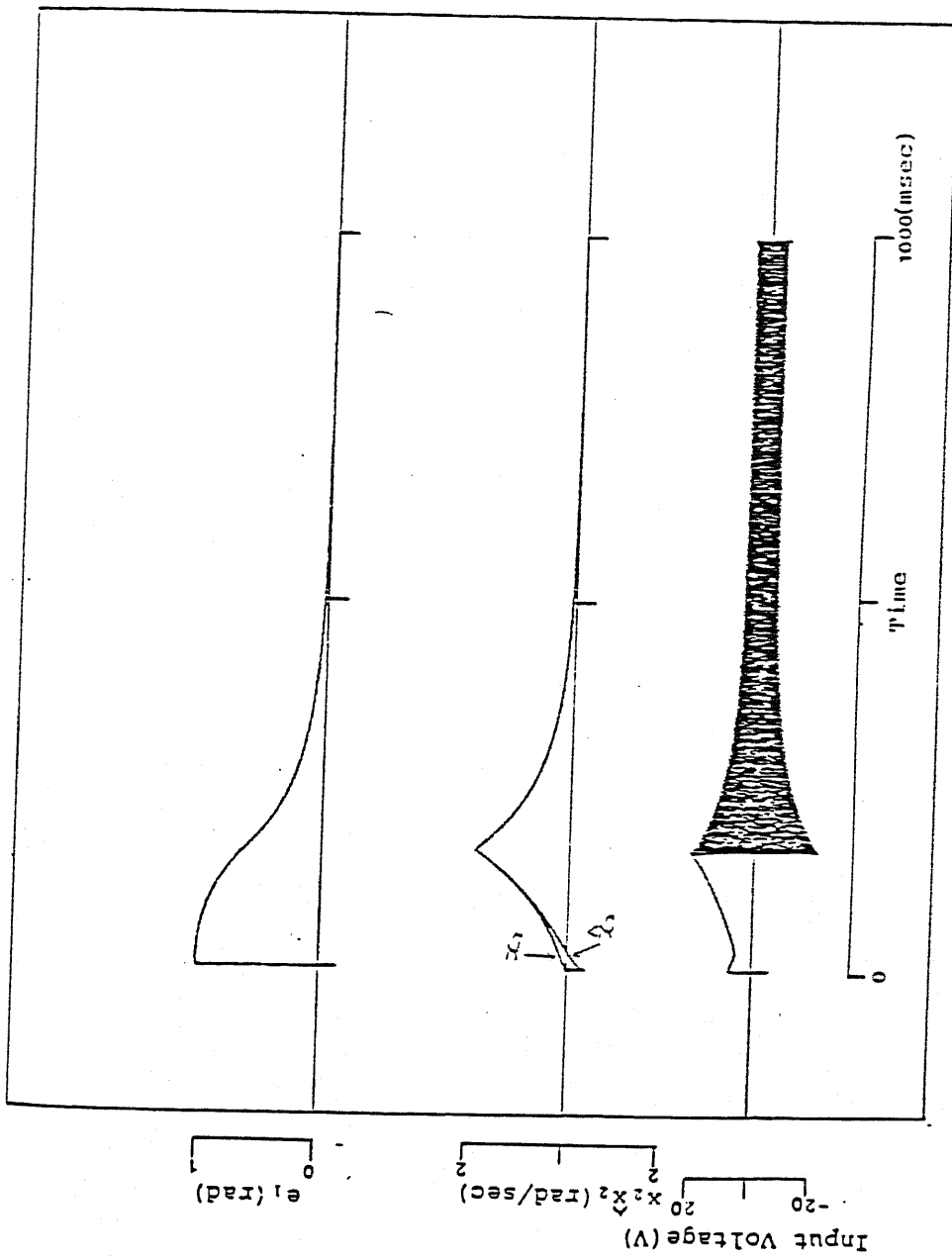


図9. シミュレーション結果

10. カルマンフィルターを用いた可変構造系の設計[6]

オブザーバを用いて状態量を推定した場合、観測雑音等の未知外乱を考慮せず推定を行うが、現実にはこの様な外乱を無視することは出来ない。そこでカルマンフィルターを用いて状態量を推定しSliding Mode制御を行う。

制御対象を

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + v(t) \quad (10-1)$$

$$y(t) = cx(t) + w(t)$$

但し、 $v(t)$ はシステム雑音、 $w(t)$ は観測雑音で

$$E[v(t)] = 0, E[w(t)] = 0 \quad \forall(t) \text{ であり}$$

$$E[v(t)v(\tau)^T] = Q\delta(t-\tau), E[w(t)w(\tau)^T] = R\delta(t-\tau) \text{ で}$$

$$E[v(t)w(\tau)^T] = 0 \quad \forall(t, \tau) \text{ とする。}$$

とする。この時、システム(10-1)に対する同一次元オブザーバを

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - Kc)x(t) + Ky(t) + bu(t) \quad (10-2)$$

として

$$K = Pc^T R^{-1} \quad (10-3)$$

$$PA^T + AP - Pc^T R^{-1} cP + Q = 0 \quad (10-4)$$

より、求める唯一解の最適ゲイン行列を求め、状態量を推定しSliding Mode制御において設計を通常的设计則に従い行い状態量 x_i を x_i にして制御を行う。

シミュレーション

制御対象は

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$$

$$y = x_1 + w$$

とする。(10-4),(10-3)よりゲイン行列を求めると

$$k_1 = (-r + \sqrt{r^2 + 2r\sqrt{rq}}) / r \quad (10-5.a)$$

$$k_2 = (\sqrt{rq+r} - \sqrt{r^2 + 2r\sqrt{rq}}) / r \quad (10-5.b)$$

となる。(10-2)式を解くと

$$\dot{\hat{x}}_1 = -k_1 \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + k_1 y \quad (10-6.a)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -k_2 \hat{x}_1 - \hat{x}_2 + k_2 y + u \quad (10-6.b)$$

となる。Sliding Modeのゲイン及び傾き c は(9-14)式に設定し、観測雑音の分散 w を1、システム雑音 v を0.25としシミュレーションを行った結果を図11-1,2に示す。図11-1はカルマンフィルタ無し、図11-2はカルマンフィルタ有りである。フィルタ無しの場合雑音の影響を受けた応答となるが、フィルタにより状態を推定しその推定値を用いた場合は良好な応答を得た。システムに雑音がありその雑音が制御に影響する場合はカルマンフィルタにより状態を推定しSliding Mode制御を行えば良好な制御が出来ることを確認した。

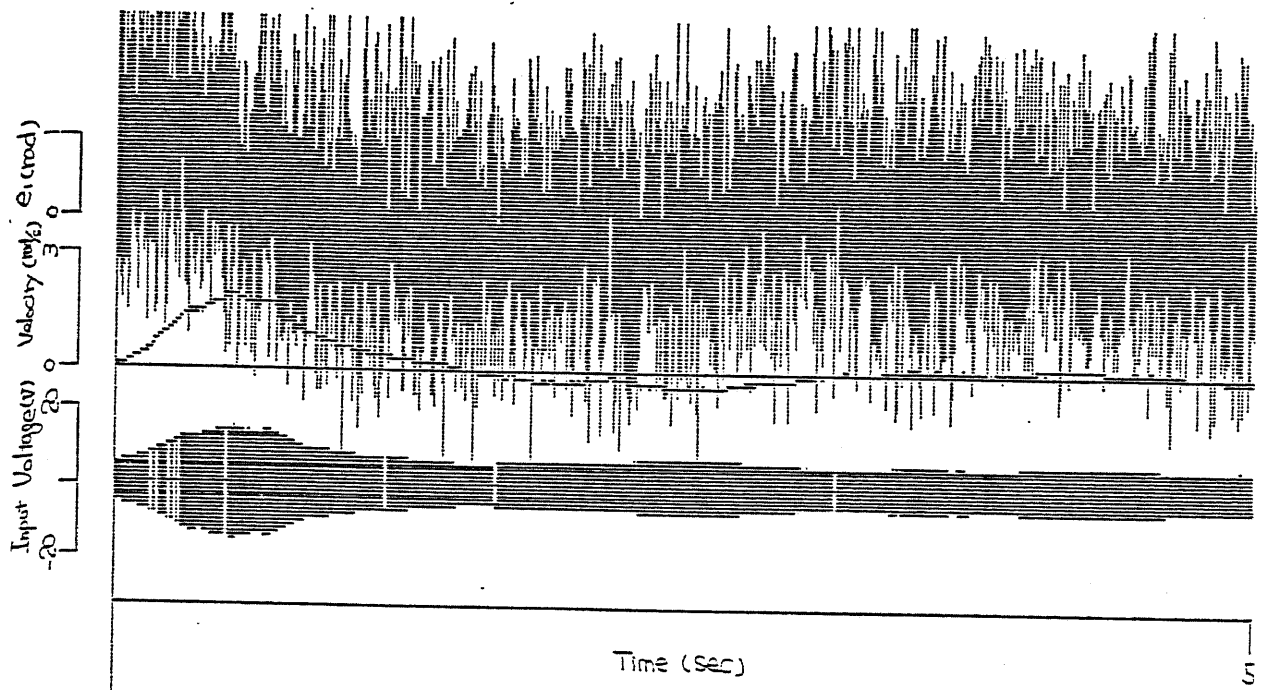


図10-1.シミュレーション結果 (カルマンフィルター無し)

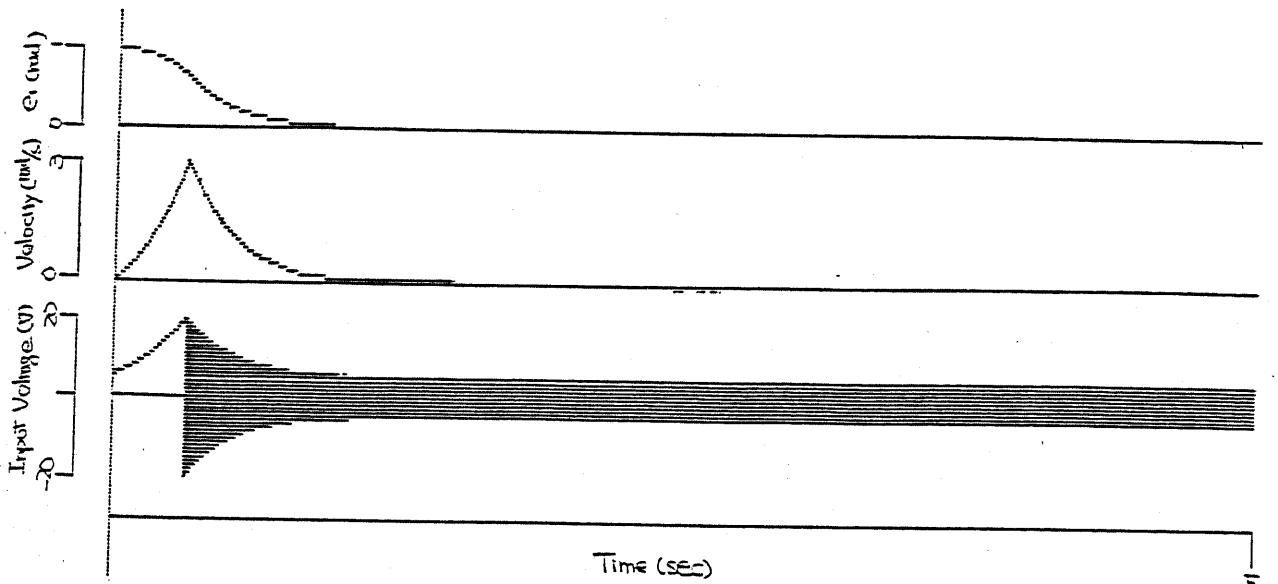


図10-2.シミュレーション結果 (カルマンフィルター有り)

1.1. 参考文献

- [1] V.I.Utkin: "Variable Structure System with Sliding Mode," IEEE Trans on AC, Vol AC-22, 212/222. (1977)
- [2] 原島, 橋本: "Sliding Modeとその応用-1, II," システムと制御, 29-2, 4. (1985)
- [3] 有本: "サーボ理論とロボットの制御," 日本ロボット学会誌. 2-5, 480/486. (1984)
- [4] U. Itkis: "Control System with Variable Structure," John Wiley and Sons. (1976)
- [5] 安田, 伊東, 平井: "デジタル制御によるすべり動作について," SICE第8回 D.S.T シンボ資料, 39/42, (1985)
- [6] 美多, 小郷: "システム制御理論入門," 実教出版. (1979)

第6章 ブラシレスサーボモータへの適用

1. はじめに

本章はブラシレスサーボモータの位置制御系を可変構造系を用いて構成したものである。可変構造系の特徴は Sliding Mode (すべり状態) を生じることによってパラメータ変動、外乱等に対してロバストな制御系を構成できることにある。最近のパワーエレクトロニクス、マイクロエレクトロニクスの発達が高速スイッチングおよび高速な演算を可能にし、Sliding Mode をロボットアームや電動機等の実システムへ応用した研究が報告されている[1,2]。

一方、電動機の駆動方法としてはPWMによるインバータのスイッチングパターンの生成が広く用いられている。最近ではインバータの空間ベクトル(電圧)に注目し、電流瞬時値制御やベクトル制御により最適パターンを選択する方法が報告されている[3]。本章ではd-q座標系においてVSS理論に基づく離散化された制御入力と三相インバータの取り得る8つの空間ベクトル(α - β 座標)に着目し、各空間ベクトルを可変構造系での「構造」とみなし、ロバストでオーバーシュートのない位置制御系を構成する。

2. 可変構造系の適用

可変構造系は離散集合(構造)から、目的に従って構造の時系列を生成するものである。従って、可変構造系を制御に応用すると制御入力は離散化される。この離散化された制御入力をインバータの空間ベクトルに対応させSliding Mode存在条件および到達条件を満足するように制御系を構成すればロバストな系が得られる。

ここで問題となるのは、

- ① 位置制御への Sliding Mode の適用(切り換え線の設定)
- ② Sliding Mode 存在条件の確保
- ③ 切り換え線への到達条件の確保
- ④ マッピング(空間ベクトルの選択)による Sliding Mode 存在・到達条件の保存

である。本章はこの4つの問題に解を与えるものである。

3. 制御対象

● ブラシレスサーボモータ

ブラシレスサーボモータの状態方程式は、状態変数として仮想巻線電流 i_r 、d軸電

流 i_d 、 q 軸電流 i_q 、角速度 w 、電気角 θ を選択すると(6-1)式となる。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -R_r(1+3L/2)/\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\sqrt{3}/2 MR_r)/\Delta & -R(1_r+L_r)/\Delta & -pw & 0 & 0 \\ (\sqrt{3}/2 Mp_w(1_r+L_r))/\Delta & pw & -R(1_r+L_r)/\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (-\sqrt{3}/2 pMi_q)/\Delta & 0 & 0 & 0 & D/J \end{bmatrix} x$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (1_r+L_r)/\Delta & 0 \\ 0 & (1_r+L_r)/\Delta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} (1+3L/2)V_r/\Delta \\ (-\sqrt{3}/2 M)V_r/\Delta \\ 0 \\ 0 \\ -T_1/J \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

ただし $x^T = (i_r, i_d, i_q, \theta, w)$ 、 $U^T = (v_d, v_q)$ 、 $\Delta = (1+3L/2)(1_r+L_r)$ である。

●空間ベクトル

三相インバータの空間ベクトル(電圧)は、それぞれ2つ1組のトランジスタのon-offの組合せで決定される。"1"を上のトランジスタがon下のトランジスタがoffとなるモード、"0"を上のトランジスタがoff下のトランジスタがonとなるモードとする。このとき三相インバータ空間ベクトルは図6-1に示す $2^3 (=8)$ 通り存在する。

4. 制御系設計

4-1. 問題の定式化

●指標

ブラシレスサーボモータの位置制御系の構成問題を考える。制御指標として

- ① 応答が速く
- ② オーバーシュートのない
- ③ ロバストな

位置制御系を構成することを考える。

●Sliding Mode の導入

これらの指標を達成するため Sliding Mode を適用する。制御系の構成は d, q 軸の電流による内部ループと、位置、速度による外部ループからなる。内部ループは電気系の速い応答であり、外部ループは機械系の応答で内部ループに比べて遅い応答となる。本システムの設計は外部ループで Sliding Mode を用いてオーバーシュートの無いロバストな応答を得る制御系を構成し、電流による内部ループでハイゲインによって d 軸 q 軸を非干渉化する。そして q 軸電流指令値 i_{qr} を導入することにより外部ループと内部ループとを結合させる。

●切り換え線

位置指令値を θ_r とした場合の切り換え線を

$$s_i = \dot{\theta} + C(\theta - \theta_r) \quad (C > 0) \quad (6-2)$$

と設定する。これはオーバーシュートの無い一次系の応答となる。

●制御入力 of 構成

設計方法は、Sliding Mode 存在条件 $\lim_{s \rightarrow 0} s_i \dot{s}_i < 0$ を満たすように制御入力を構成することである。 \dot{s}_i は状態方程式(6-1)より次式となる。

$$\dot{s}_i = (C - D/J)\omega - T_1/J - (\sqrt{3}/2 p M_i r/J) i_a \quad (6-3)$$

ここで i_a は制御入力と考えられる。しかし実際には三相インバータのトランジスタの on, off により発生される電圧がモータに印加されている。このことから制御入力を、電機子の相電圧 (V_a, V_b, V_c) とする。

●設計ステップ

制御系の設計を次の三つのステップで行う。

- ① d-q 座標系での制御量 i_{dr}, i_{qr} の設定
- ② d-q座標系での制御量 i_d, i_q と制御入力電圧指令値 V_{dr}, V_{qr} の関係
- ③ d-q座標系での制御入力電圧指令値 V_d, V_q と三相インバータの相電圧 V_a, V_b, V_c との対応

4-2. i_{dr}, i_{qr} の設定

d-q座標系においてトルク方程式は次式で示される。

$$T_m = J\dot{\omega} + D\omega + T_l \quad (T_m = \sqrt{3}/2pM_i r i_a) \quad (6-4)$$

この式より電氣的発生トルクは i_a に依存している。d軸電流 i_d はトルク発生に寄与しない。従って i_d の目標値 i_{dr} は電力変換効率をあげる観点から零とおく。即ち

$$i_{dr} = 0 \quad (6-5)$$

である。次にq軸電流 i_q の目標値 i_{qr} を定める。 i_{qr} は(6-2)式で示した切り換え線において $s_i s_i < -\eta |s_i|$ ($\eta > 0$) (Sliding Mode 存在および到達条件) を満足するように設定する。 i_{qr} を可変構造系の「構造」に対応させるため

$$i_{qr} = K_i \text{sign}(s_i) \quad (6-6)$$

とおく。しかしこの i_{qr} では s_i の切り換え周波数が高くなるので i_{qr} のチャタリング幅が大きくなる。これを改善するため(6-6)式の i_{qr} を次式で示される連続系の i_{qr} に変更する。

$$i_{qr} = K_i s_i / (|s_i| + \delta) \quad \delta: \text{定数} \quad (6-7)$$

i_{qr} は可変構造系の構造としての意味は無くなるが、可変構造系の特徴は ②, ③ の設計ステップで保存される。さらに $|s_i|$ にしきい値を設定し、 $|s_i|$ がその値より小さいとき定常誤差の補償を行うため積分器を付加する。この積分器が働いているときを積分モードという。

$$i_{qr} = K_i s_i / (|s_i| + \delta) + \eta \quad (6-8)$$

$$\delta = \begin{cases} \delta_0 & |s_i| \geq \varepsilon \\ \delta_0 + \gamma \left| \int s_i dt \right| & |s_i| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} 0 & |s_i| \geq \varepsilon \\ \xi \int s_i dt & |s_i| < \varepsilon \end{cases}$$

積分器は $|s_i| < \varepsilon$ の間だけ有効に働き $|s_i| \geq \varepsilon$ ではリセットされる。次に積分モードを付加した場合の q 軸電流指令値 i_{qr} の設定方法を述べる。

4-2-1. 積分モードの境界 ε の決定

f をパラメータ変動・外乱等を表現するとする。

$$s\dot{s} = [f + bU]s < 0 \quad (6-9)$$

において、入力最大の時、一サンプリング間の s の変化は

$$\varepsilon \approx |bU|_{\max} T_s \quad (6-10)$$

(T_s : サンプリング時間)

と近似できる ($f=0$ と仮定)。このとき ε を、系のパラメータ変動、外乱等を考慮して

$$\varepsilon = K \varepsilon_0 \quad (K=5\sim 10) \quad (6-11)$$

と定めれば一たん連続領域に入った対象はそれ以降その領域に存在し積分モードが働く。また、抑制できるパラメータ変動・外乱等の条件は

$$|f| \leq |bU|_{\max} \quad (6-12)$$

である。

4-2-2. 連続関数の決定

最初に $K_i / (|s_i| + \delta)$ を決定する。これを $K_p(s_i)$ とおく。 $K_p(s_i)$ は q 軸電流指令値 i_{qr} を与える(6-8)式の第一項である。エラーが大きくなると $K_p(s_i)$ は大きく、エラーが小さい時 $K_p(s_i)$ は(6-8)式の第二項の積分項に比べて小さくなるように設定する。即ち

- ① $K_p = (s_i / |s_i|) \quad |s_i| \gg \varepsilon$
- ② $K_p = (s_i / \delta) \quad |s_i| \ll \varepsilon$

とすることである。ここで

$$\delta = \begin{cases} \varepsilon & (\varepsilon \geq 1) \\ 1/\varepsilon & (\varepsilon < 1) \end{cases} \quad (6-13)$$

と選べば、上の二つの状態に付いての要求を満たす。この関係を示したものが図6-2である。 γ はシミュレーションによりチャタリングが小さくなるような応答から定める。ここでは $\gamma=2\delta\theta$ と定めた。

4-2-3. 積分項 η の決定

内部ループである電流の応答は外部ループである機械系の応答に比べて非常に速く、 i_a が i_{ar} と等しくなっているとす。このとき、外部ループのブロック図は状態方程式(6-1)と切り換え線(6-2)より図6-3となる。ここで i_{ar} は

$$i_{ar}(s) = (K_p + K_i/s) s_i(s) \quad (6-14)$$

である。この K_i は積分ゲインで $K_i = \xi$ である。このブロック図から $e(s)/\theta_r(s)$ 、 $e(s)/T_1(s)$ を求め、ここでは $e(s)/T_1(s)$ を示す。

$$\frac{e(s)}{T_1(s)} = \frac{s}{s^2 + (D/J)s^2 - (\sqrt{3}/2pM_{ir}/J)(C+s)(K_p s + K_i)} \quad (6-15)$$

となる。(6-15)式において数値を代入すると

$$T_1 = \frac{s}{s^3 + 1.825s^2 - 8.65 \times 10^3 (C+s)(K_p s + K_i)} \quad (6-16)$$

となる。分母の第一項目第二項目は第三項目と比較して非常に小さいので、三項目の $(C+s)(K_p s + K_i)$ に着目して

$$s^2 + (C + K_i/K_p)s + CK_i/K_p = 0 \quad (6-17)$$

を得る。これは二次系の方程式で、オーバーシュートをなくすことを目的にダンピング係数を $\xi=1$ とする。このときの K_i と K_p の関係を求める。この条件は

$$K_i = CK_p \quad (6-18)$$

である。ここで K_p を次のように決定する。

$$K_p = K_i / (|s_i| + \delta\theta) \quad (6-19)$$

(6-19)式により決定された K_p を(6-18)式に代入することによって積分ゲイン

K_i すなわち ξ が求まる。(注) K_i と K_I は異なる。

4-3. 制御入力指令電圧 V_d, V_q の設定

4-2で得られた i_d, i_q の目標値 i_{dr}, i_{qr} に対して切り換え線を次式のように設定する。

$$s_d = i_d - i_{dr} \quad (i_{dr} = 0) \quad (6-20)$$

$$s_q = i_q - i_{qr} \quad (6-21)$$

ここで制御入力電圧 V_d, V_q を Sliding Mode 存在・到達条件 $s_d s_q < -\eta_d |s_d|$, $s_q s_d < -\eta_q |s_d|$ を満足するように定める。 s_d は状態方程式(6-1)より

$$s_d = i_d = \{R(l_r + L_r)/\Delta\} i_d - p w i_q + \{(l_r + L_r)/\Delta\} V_d \quad (6-22)$$

となる。ここで、インバータの空間ベクトルが離散的な値を取ることを考慮して制御入力電圧 V_d を離散値系で与える。実システムに適用する際、演算時間を短縮させる事を考えあわせて制御入力電圧 V_d を

$$V_d = -K_d \text{sign}(s_d) \quad (6-23)$$

と選ぶ。 $s_d s_q$ は状態方程式(6-1)と(6-23)式から

$$s_d s_q = -s_d [\{R(l_r + L_r)/\Delta\} i_d + p w i_q] + \{(l_r + L_r)/\Delta\} K_d |s_d| \quad (6-24)$$

となる。 $s_d s_q < -\eta_d |s_d|$ を満たすための K_d の条件は

$$K_d > |R i_d + ((\Delta p w)/(l_r + L_r)) i_q| \quad (6-25)$$

である。(6-25)式においてパラメータ変動等を考慮して K_d を大きめに取ることによってロバスト性が得られる。

同様にして K_q の条件は

$$K_q > |(\sqrt{3}/2 M p w l_r + ((\Delta p w)/(l_r + L_r)) i_d - R i_q)| \quad (6-26)$$

と求まる。実現を考えた場合、 K_d, K_q はインバータの DC 電圧から決まる値とな

る。これについての検討は後述する。

次のステップとして d-q座標における制御入力指令電圧 V_d, V_q と三相インバータの相電圧 V_a, V_b, V_c を $s_d s_d < -\eta_d |s_d|$, $s_q s_q < -\eta_q |s_q|$ の Sliding Mode 存在・到達条件を満たしたまま対応させることを考える。

4-4. V_d, V_q から V_a, V_b, V_c へのマッピング

d-q座標系における制御入力(V_d, V_q)は s_d, s_q の正負により d-q座標平面において4つの場合がある(図6-4)。これらを三相インバータの相電圧 V_a, V_b, V_c に対応させる。これは

$$V_a = \sqrt{2/3} \text{sign}\{V_d \cos \theta + V_q \sin \theta\} \quad (6-27)$$

$$V_b = \sqrt{2/3} \text{sign}\{V_d \cos(\theta + 2\pi/3) + V_q \sin(\theta + 2\pi/3)\} \quad (6-28)$$

$$V_c = \sqrt{2/3} \text{sign}\{V_d \cos(\theta - 2\pi/3) + V_q \sin(\theta - 2\pi/3)\} \quad (6-29)$$

でおこなう。この変換により $s_d s_d < -\eta_d |s_d|$, $s_q s_q < -\eta_q |s_q|$ の性質を失うことなく制御入力 (V_d, V_q) から三相インバータ電圧 (V_a, V_b, V_c) に変換される。しかし (V_a, V_b, V_c) はインバータの on-off パターンで決定される値であり、離散値しか取り得ない。三相インバータの取り得る空間ベクトルは図6-1 に示される8種類であり、零ベクトルとなるモードを除くと6種類の空間ベクトルとなる。この空間ベクトルを次の方法で選択する。

インバータのモデルを図6-5で示す。三相インバータの空間ベクトルを $V(V_{ap}, V_{bp}, V_{cp})$ で示す。この V_{ap}, V_{bp}, V_{cp} を

$$V_{ap} = \text{sign}(V_a), V_{bp} = \text{sign}(V_b), V_{cp} = \text{sign}(V_c) \quad (6-30)$$

で与え、これらを三相インバータの on-off パターンとする。(6-30)式にそれぞれ(6-27)-(6-29)式を代入する。これから三相インバータの空間ベクトル $V(V_{ap}, V_{bp}, V_{cp})$ は s_d, s_q の符号と位置 θ によって決定されることがわかる。この関係を表1に示す。ここで示した方法を用いることで \sin, \cos の演算を行わずに、(6-30)式で示されたマッピングを実現することができる。

以上の設計手順に従い可変構造系を用いたブラシレスサーボモータの位置制御系が実現できる。

5. マッピングの妥当性

4で述べた設計において最も問題になるのは (V_d, V_q) から (V_a, V_b, V_c) へのマッピングである。本制御則で $s_d \dot{s}_d < -\eta_d |s_d|$, $s_q \dot{s}_q < -\eta_q |s_q|$ (Sliding Mode 存在・到達条件) が保存されているか検討する。三相インバータ空間ベクトルを α - β 座標系での電圧 V_α, V_β に変換する。これらは

$$V_\alpha = \sqrt{2/3}(V_a - (1/2)(V_b + V_c)) \quad (6-31)$$

$$V_\beta = \sqrt{2/3} \sqrt{3/2}(V_b - V_c) \quad (6-32)$$

で変換される。空間ベクトルと V_α, V_β の関係は表2で示される。一方、制御入力電圧 V_d, V_q を α - β 座標系へ変換した値 $V_{d\alpha\beta}, V_{q\alpha\beta}$ は

$$V_{d\alpha\beta} = \sqrt{2/3}(V_d \cos(\theta) + V_q \sin(\theta)) \quad (6-33)$$

$$V_{q\alpha\beta} = \sqrt{2/3}(-V_d \sin(\theta) + V_q \cos(\theta)) \quad (6-34)$$

となる。ここで

$$|V_\alpha| > |V_{d\alpha\beta}| \quad (6-35)$$

$$|V_\beta| > |V_{q\alpha\beta}| \quad (6-36)$$

を満たしていれば Sliding Mode 存在・到達条件が保存される。図6-6にこの関係を示す。これは連続系での議論であるが、本システムの様な離散系では各サンプリングで (6-35)、(6-36)式の関係を満たしていてもサンプリングの間 (6-35)、(6-36)式を満足しないこともある。しかし、サンプリングが十分速ければほとんど影響はない。定量的議論は別の機会に論じる。

しかし実際にはインバータの電源電圧は制限されているので入力の飽和領域にかかってしまう場合がある。この時は Sliding Mode 存在および到達条件は満たされていない。次にこの場合に付いて考察する。

6. 入力飽和における検討

6-1. 電流飽和

電流にはモータの定格値による上限が存在する。電流飽和の問題は(6-2)式で示される切り換え線についての Sliding Mode 存在・到達条件に関係する。この条

件は

$$K_i > | (1/(\sqrt{3/2pM_i r}))(-T_1 + CJ\omega - D\omega) | \quad (6-37)$$

($k_i > 0$)

である。 K_i は q 軸電流指令値 i_{or} を決定するゲインである。 K_i は(6-37)式から外部負荷 T_1 , 速度 ω に依存する (他は定数)。モータの電流定格値を K_{imax} とすると

$$K_{imax} \geq K_i \quad (6-38)$$

(6-37), (6-38)式より Sliding Mode 存在・到達条件を満たす速度 ω の範囲が決定できる。いま $K_{imax} = K_i$ とする。

① $T_1 = 0$ の場合

$$K_{imax} > | (1/(\sqrt{3/2pM_i r}))(CJ\omega - D\omega) | \quad (6-39)$$

ω が

$$|\omega| < (\sqrt{3/2pM_i r})K_{imax} / (CJ - D) \quad (6-40)$$

であれば Sliding Mode 存在・到達条件を満足する。

② $T_1 \neq 0$ の場合

$$K_{imax} > | (1/(\sqrt{3/2pM_i r}))(T_1 + CJ\omega - D\omega) | \quad (6-41)$$

ω が

$$|\omega| < (|T_1|_{max} + (\sqrt{3/2pM_i r})K_{imax}) / (CJ - D) \quad (6-42)$$
$$|T_1|_{max} = |max[T_1]|$$

であれば Sliding Mode 存在・到達条件を満足する。当然 C の値が大きくなれば $|\omega|$ の値は小さくなり、 C の値が小さくなれば $|\omega|$ の値は大きくなる。

以上の事から電流に飽和のある場合 Sliding Mode 存在・到達条件は C の値と

$|w|$ の値に関係する。

次に初期値による Sliding Mode の存在を検討する。

6-2. 初期位置による検討

$|w|$ は Sliding Mode の切り換え線の傾き C と初期値(位置)に依存する。切り換え線の傾き C が定まったとき、初期位置によって、位相面上で3種類の軌跡が考えられる。これを図6-7に示す。

- ① 切り換え線に達すると直ちに Sliding Mode に入る
- ② 最初切り換え線に達した際に Sliding Mode に入らず再び切り換え線に達した時に Sliding Mode に入る
- ③ 二度目に切り換え線に達した際に Sliding Mode に入るがオーバーシュートを生じる

の3つの場合が存在する。①, ②, ③の領域の初期位置の境界を求める。

6-2-1. ①の領域

この領域は(6-40), (6-42)式が満足されている領域である。位相面上の軌跡は、速度が w_{max} に達するより前に切り換え線に到達する。 C が決定されるとこの領域は w に依存する。これを満たす w の最大値を w_{max} とおくと、 w_{max} は、(6-42)式から与えられる。次に切り換え線 $s=0$ と、最大速度線 $w=w_{max}$ との交点 (e_1, \dot{e}_1) を求める。これは

$$(e_1, \dot{e}_1) = (-w_{max}/C, w_{max}) \quad (6-43)$$

である。最大加速曲線は

$$J\dot{w} + Dw = T_m \quad (T_m = \sqrt{3/2} p M i r i c) \quad (6-44)$$

を解いて

$$e = A_1 - (1/a^2)(a\dot{e} - M \ln(M + a\dot{e})) \quad (6-45)$$

ただし $a = D/J, M = T_m, A_1$: 積分定数

である。この曲線で交点 (e_1, \dot{e}_1) を通るものは

$$e = -w_{max}/C + (1/a^2)(aw_{max} - M \ln(M + aw_{max})) - (1/a^2)(a\dot{e} - M \ln(M + a\dot{e})) \quad (6-46)$$

となる。この曲線と速度零との交点が①の領域の上限となる。これは

$$e_{max} = -w_{max}/C + (1/a^2)(aw_{max} - M \ln(M + aw_{max})) - (1/a^2)M \ln(M) \quad (6-47)$$

と求まる。

6-2-2. ②の領域

この領域の位相面上での軌跡は、最大加速曲線上を移動し、切り換え線に達した後最大減速曲線に沿って移動する。ここでオーバーシュートをしないための②の最大領域は最大減速曲線が同一象限で位置エラー零、速度エラー零、即ち原点 $(0,0)$ に収束するときである。最大減速曲線は

$$J\ddot{w} + D\dot{w} = -T_H \quad (T_H = \sqrt{3/2} p M i r_0) \quad (6-48)$$

を解いて

$$e = A_2 - (1/a^2)(ae + M \ln(M - ae)) \quad (6-49)$$

ただし $A = D/J, M = T_H, A_2$: 積分定数

である。この曲線は原点 $(0,0)$ を通るので

$$e = (1/a^2)M \ln(M) - (1/a^2)(ae + M \ln(M - ae)) \quad (6-50)$$

と求められる。この曲線と、切り換え線との交点を (e_2, \dot{e}_2) とする。次に最大加速曲線は(6-45)式で示される。この曲線で交点 (e_2, \dot{e}_2) を通る曲線は

$$e = e_2 + (1/a^2)(ae_2 - M \ln(M + ae_2)) - (1/a^2)(a\dot{e} - M \ln(M + a\dot{e})) \quad (6-51)$$

である。e=0 の時の e の値が ② の領域の上限である。従って

$$e_{\max} = e_2 + (1/a^2)(ae_2 - M \ln(M + ae_2)) - (1/a^2)M \ln(M) \quad (6-52)$$

と求まる。

6-2-3. ③の領域

$e > e_{\max}$ (②の領域) の場合は ③ の領域になる。この領域ではオーバーシュートが生じる。ここで e_{\max} の値は切り換え線の傾き C の値に依存する。C が小さい場合 e_{\max} の値は大きくなる。e の値を観測しその値に従って C を変化させることによりオーバーシュートなしに目標値に到達させることができる。しかし実システムにおいては、機械的に速度が制限される。今回対象としたモデルでは速度制限に掛かっておりこの領域は生じない。

以上の設計方法の妥当性をシミュレーションにより確認する。

7. シミュレーション結果

シミュレーションに用いた各パラメータの値を表3 に示す。

7-1. 電流チャタリングに関するシミュレーション

図6-8は(6-6)式で示される離散値系の q 軸電流指令値、(6-8)式で示される積分モードを付加した連続系の q 軸電流指令値の目標値に対する応答を示したものである。電流のチャタリングに注目すると(6-6)式で与えた i_{ar} の応答はチャタリング幅、即ち電流リップルが小さくなっている。

7-2. ロバスト性に関するシミュレーション

図6-8-(a) にステップ状の外乱に対する応答を示す。位置エラーは零に収束しており、積分モードを導入した効果がみられる。図6-9 に非線形負荷に対する応答を示す。応答時間は、負荷のない場合と差のないことが分かる。

7-3. マッピングの妥当性

図6-10 は (6-35)、(6-36) 式の関係を示す。これは図6-8-(b)で示された応答についての結果である。定常状態では、この関係が成立している。過渡状態においては入力飽和のためにこの関係が成り立っていない。これは、この応答が6で

述べた②の場合となっているためである。しかし、切り換え線に到達した後は Sliding Mode 存在・到達条件 $s_d s_d < -\eta_d |s_d|$ 、 $s_q s_q < -\eta_q |s_q|$ を保存している。これは本章で提案した簡単なマッピングの妥当性を示すものである。

7-4. Sliding Mode の存在

図6-11 は位相面軌跡を示したものである。初期位置が前述した ①, ② の領域の場合を示している。ここで採用したモデルでは、機械的に速度の上限値が決定されてしまうため ③ の領域は存在しない。

8. おわりに

可変構造系を制御に応用しブラシレスサーボモータの位置制御系を構成する方法を提案した。シミュレーションにより以下の結果を得た。

- ① オーバーシュートが無く、かつ応答の速い位置制御系を構成できる。
- ② 外乱やパラメータの変動に対してロバストな制御系を構成できる。
- ③ 簡単なマッピングにより Sliding Mode の存在・到達条件を失うことなく d-q 軸座標平面の制御入力電圧を三相インバータの空間ベクトルへ対応させることができる。
- ④ q 軸電流指令値 i_{qr} に積分モードを導入することにより定常誤差をなくすことができる。

参考文献

- [1] H.Hashimoto, K.Maruyama, F.Harashima, "A Micro-processor-Based Robot Manipulator Control with Sliding Mode", IEEE Tran. on IE, vol. IE-34, no. 2, (1987)
- [2] 浅田、岡村、黒江、丸橋：「スライディングモード制御による同期電動機サーボシステムの一制御法」電気学会研究会資料、IA-86-4
- [3] 野口、高橋：「新理論に基づく誘導機の高速・高効率制御法」電気学会研究会資料、SPC-85-48

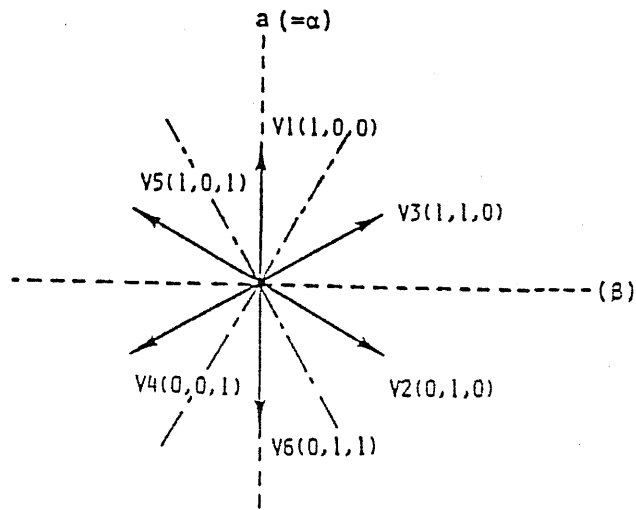


図6-1. 三相インバータ空間ベクトル

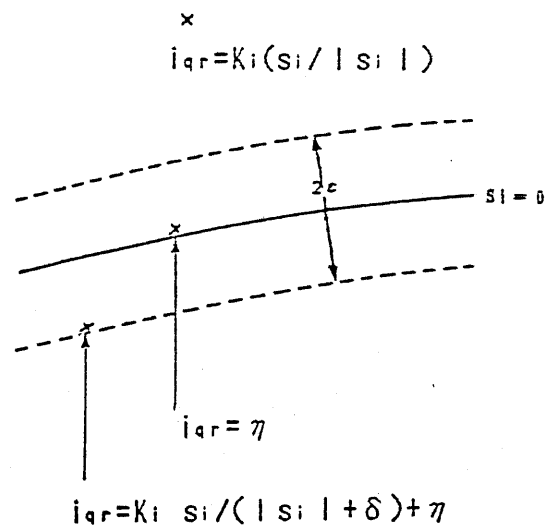


図6-2. 3種類の i_{qr}

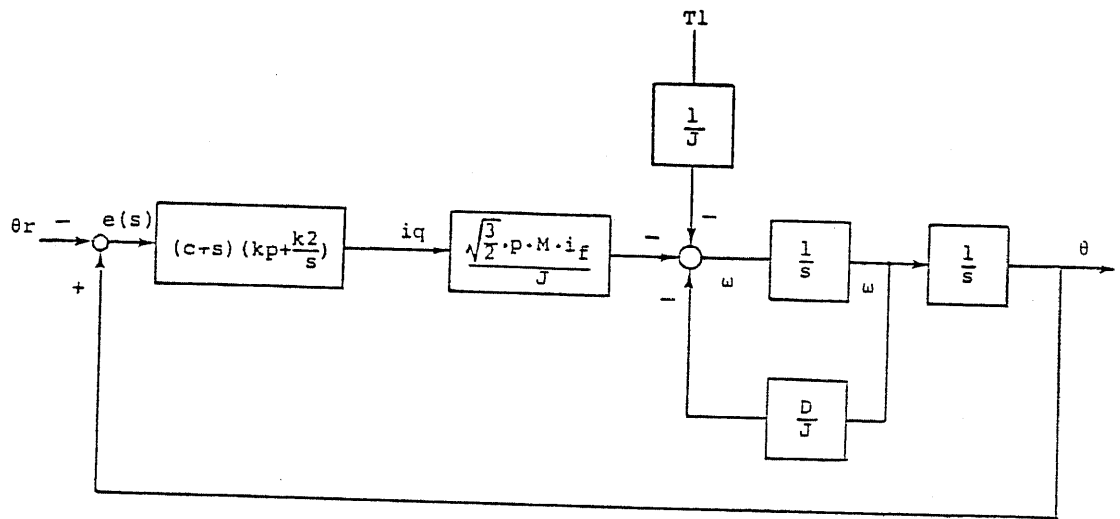


図6-3. 制御系のブロック

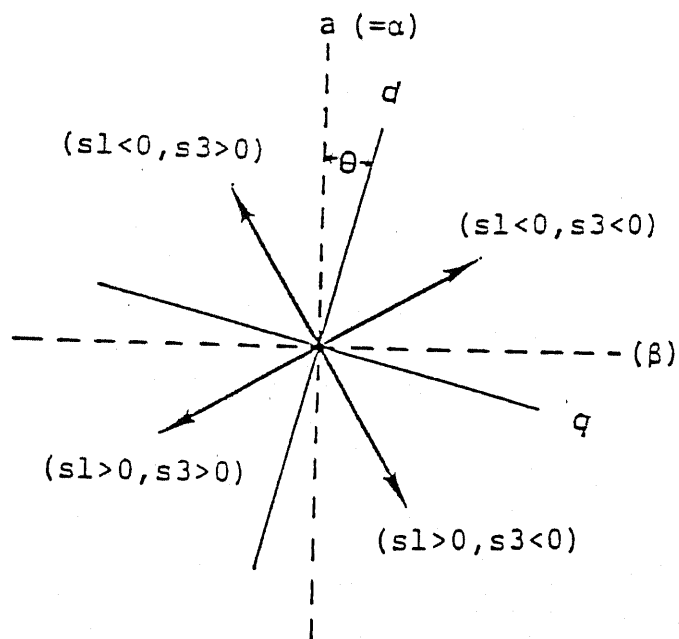


図6-4. d-q座標系制御入力 V_d, V_q

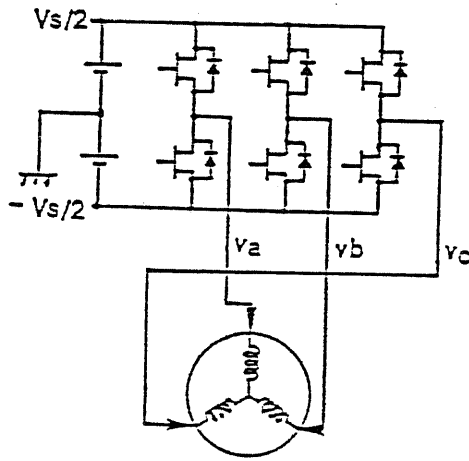


図6-5. インバータモデル

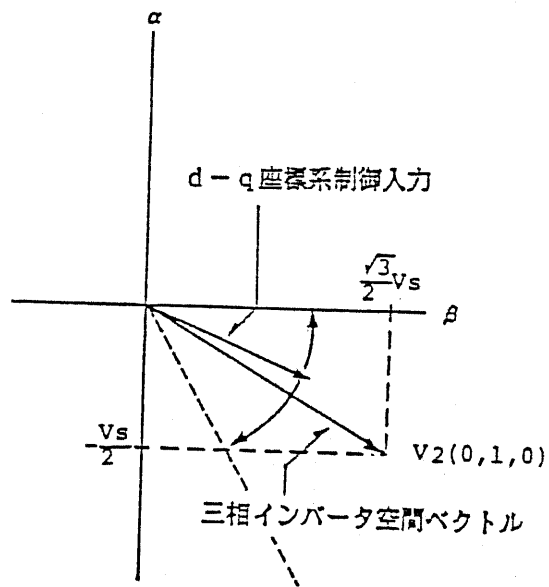


図6-6. Sliding Mode 条件

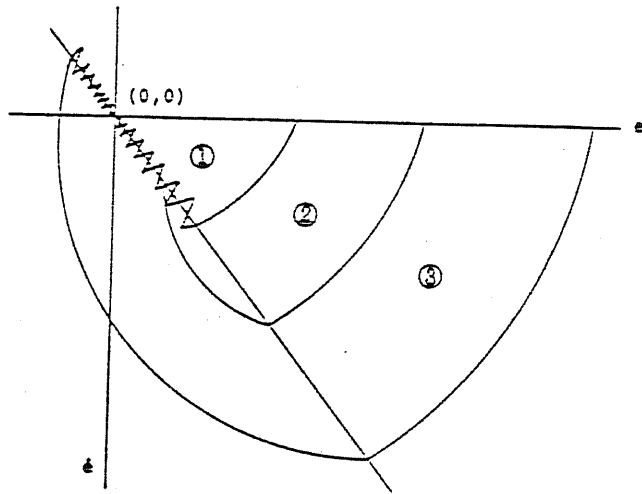


図6-7. 3種類の初期位置による位相回転軌跡

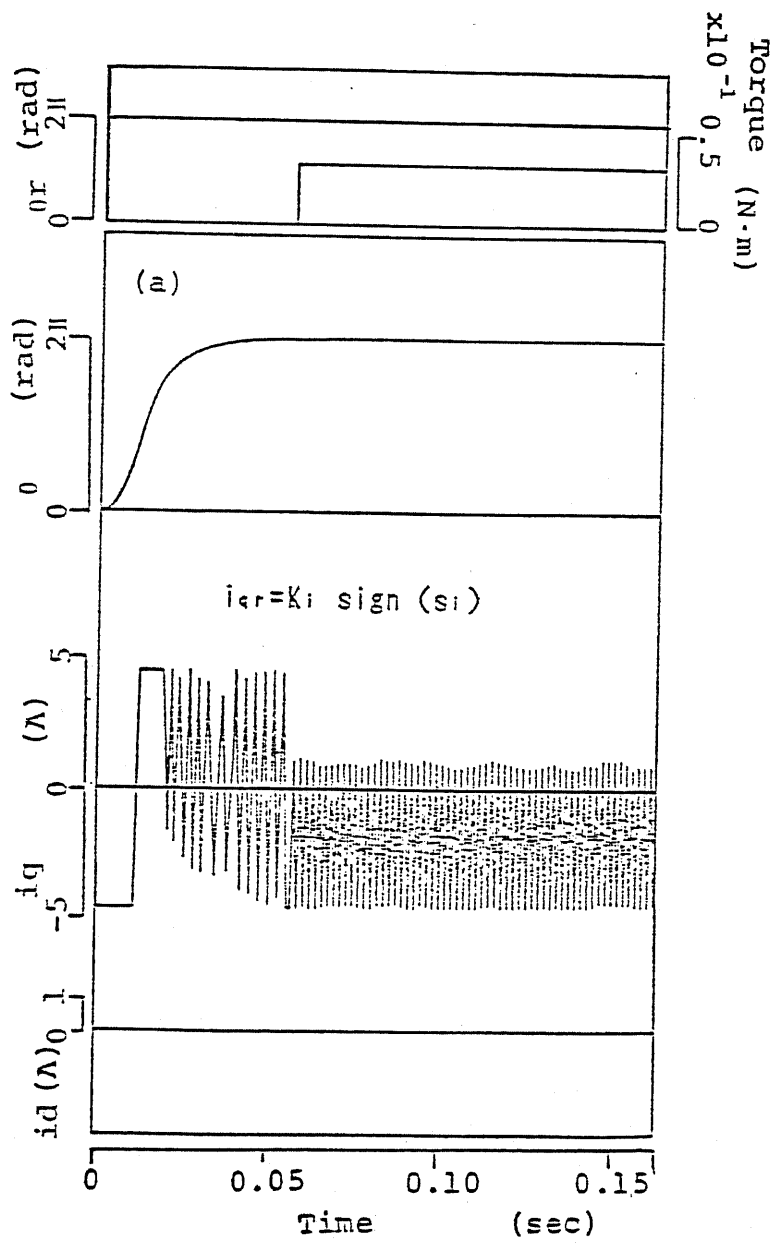


图6-8. 時間応答

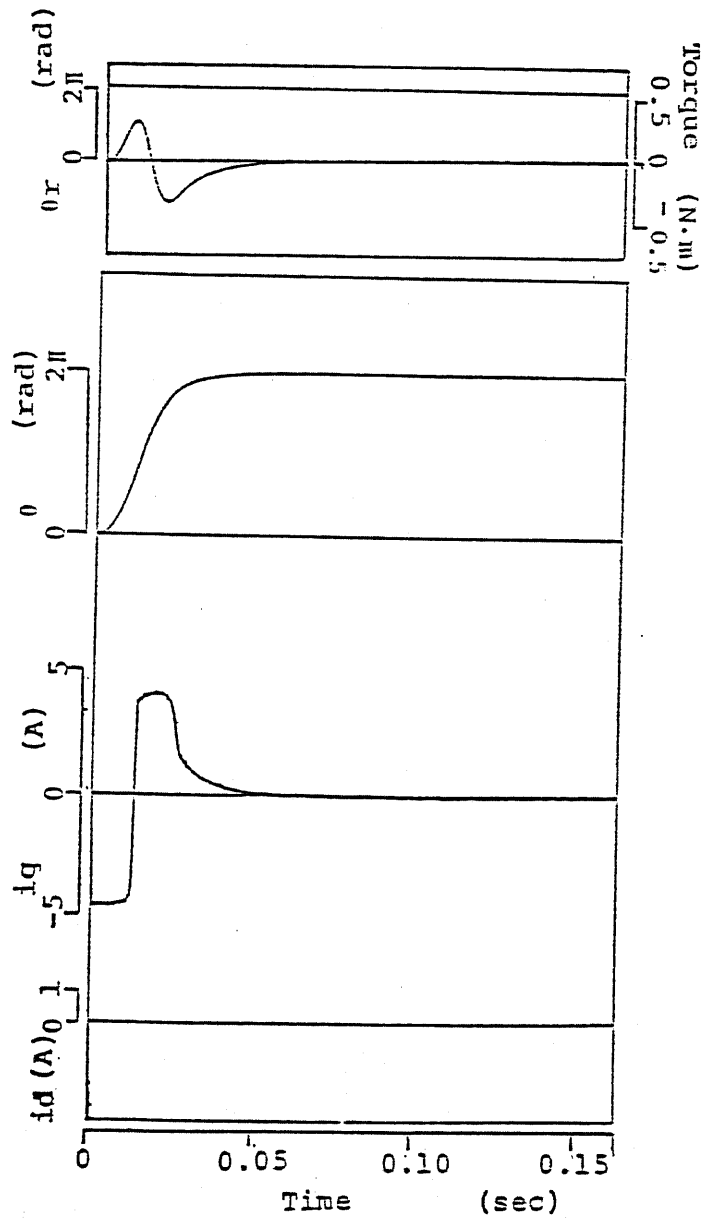


图 6-9. 時間応答 (非線形負荷)

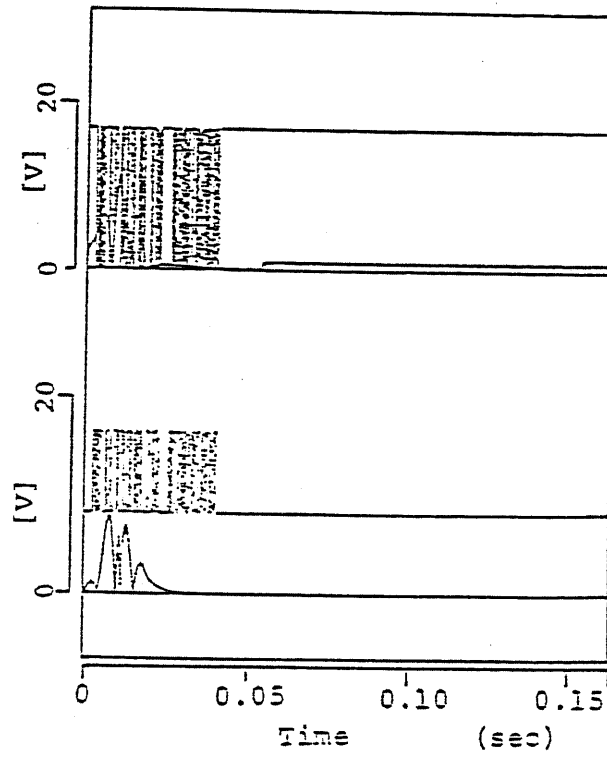


図6-10. マッピングの妥当性

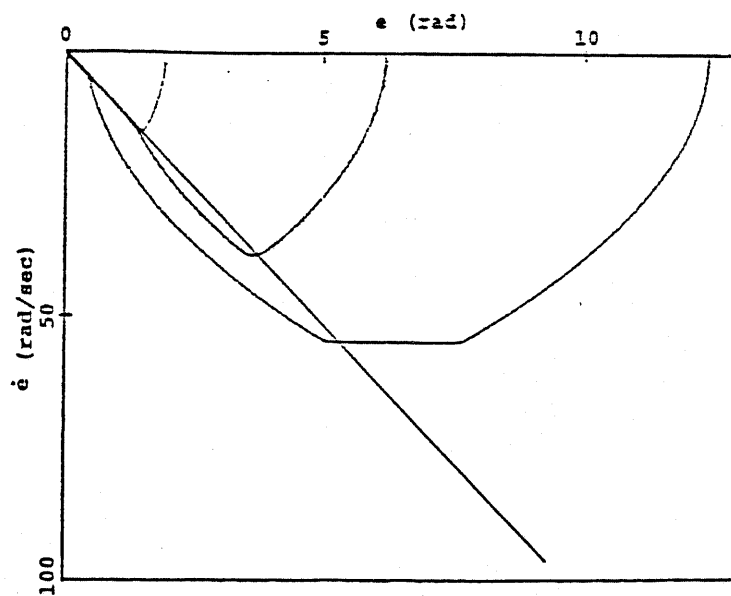


図6-11. 位相面軌跡

Space vectors	Phase Voltage				v_α	v_β
	v_0	v_a	v_b	v_c		
$V_0(0,0,0)$	0	0	0	0	0	0
$V_1(1,0,0)$	$(1/3)v_s$	$(2/3)v_s$	$(-1/3)v_s$	$(-1/3)v_s$	v_s	0
$V_2(0,1,0)$	$(1/3)v_s$	$(-1/3)v_s$	$(2/3)v_s$	$(-1/3)v_s$	$(-1/2)v_s$	$(\sqrt{3}/2)v_s$
$V_3(1,1,0)$	$(2/3)v_s$	$(1/3)v_s$	$(1/3)v_s$	$(-2/3)v_s$	$(1/2)v_s$	$(\sqrt{3}/2)v_s$
$V_4(0,0,1)$	$(1/3)v_s$	$(-1/3)v_s$	$(-1/3)v_s$	$(2/3)v_s$	$(-1/2)v_s$	$(-\sqrt{3}/2)v_s$
$V_5(1,0,1)$	$(2/3)v_s$	$(1/3)v_s$	$(-2/3)v_s$	$(1/3)v_s$	$(1/2)v_s$	$(-\sqrt{3}/2)v_s$
$V_6(0,1,1)$	$(2/3)v_s$	$(-2/3)v_s$	$(1/3)v_s$	$(1/3)v_s$	$-v_s$	0
$V_7(1,1,1)$	v_s	0	0	0	0	0

表 6-1. 空間ベクトル

$s_1 < 0, s_3 < 0$	V_1	V_5	V_4	V_6	V_2	V_3	V_1	V_5
$s_1 < 0, s_3 > 0$	V_5	V_4	V_6	V_2	V_3	V_1	V_5	V_4
$s_1 > 0, s_3 > 0$	V_6	V_2	V_3	V_1	V_5	V_4	V_6	V_2
$s_1 > 0, s_3 < 0$	V_2	V_3	V_1	V_5	V_4	V_6	V_2	V_3

表 6-2. 空間ベクトルへのマッピング

R=0.6655	(Ω)	lf=2.50 x10 ⁻⁵	(H)
L=2.51 x10 ⁻³	(H)	l=1.25 x10 ⁻⁵	(H)
J=2.25 x10 ⁻⁶	(Nm·sec ²)	$\alpha=20000$	(rad/sec ²)
D=4.10 x10 ⁻⁶	(Nm·sec)	V=150	(rad/sec)
Rf=0.700	(Ω)	Kd= 30	
Lf=5.01 x10 ⁻³	(H)	Kq=30	
M=1.110 x10 ⁻⁴	(H)	Ki=5	
Vf=50.0	(V)	p=2	
Vs=30.0	(V)	$\delta=5$ $\delta_0=5$ $\gamma=0.01$ $\xi= 50.0$	
C= 70		$\epsilon=50$	
sampling frequency=100		(KHz)	

表6-3. シミュレーション条件

第7章 可変構造系を用いた学習制御系の構成

7-1. はじめに

近年、産業用ロボットの発展には目ざましいものがある。特に、作業空間を広くとれる多関節型アームは多くの分野で使用されつつある。同時に、作業内容も物の移動といった単純なものから組立といった複雑なものへと変化してきている。その結果、複雑な動特性を有する多関節型アームの制御は著しく困難な課題となっている。

例えば、今までのロボットではスポット溶接のように三次元のある一点から別の点に手先を移動させる PTP (Point to Point) 動作 (点と点の間は任意の経路でよい) が主であった。しかし、現在では組立、アーク溶接、塗装といった作業では指定された経路に沿って手先を動かす必要がある。これは CP (Continuous Path) 動作と呼ばれ、ロボットの手先が通る経路を時間関数として指定するものである。この CP 動作をいかに精度よく高速に行うかが現在のマニピュレータ研究の中心課題である。

そこで、高精度高速 CP 動作を実現するために産業用ロボットの使用状況を考慮にいたした制御が考えられる。即ち、産業用ロボットでは同一動作を繰り返すことが多く、一試行前の偏差を利用し試行毎に偏差を減少させるといった学習的方法が考えられる。既にいくつかの報告^{[1]-[4]}があるが、いずれもアームの線形化を前提にしており非線形を対象とした報告は見られない。アームが高速化すると非線形性の影響が大きくなり線形化による方法では制御性能は著しく悪化するものと思われる。

本章では、強い非線形性を有するアームに VSS (Variable Structure System) を導入することによって線形化を行わない学習制御則を導出した。実験は一自由度のアームを用いて行い、VSS を導入した学習制御の有効性を確認した。

7-2. 学習制御系

従来のいわゆる学習制御には二つの考え方がある。一方は、試行を反復することにより望ましい応答が得られるような目標入力を生成するものであり、「学習制御^{[1][3][5]}」あるいは「反復制御^[2]」と呼ばれている。他方は、目標入力を周期関数として与え、制御を連続的に繰り返すことにより追従精度をあげるものであり、「繰り返し制御^{[4][6][7]}」と呼ばれている。

両者の違いは、前者は各試行時の初期値を一定としているのに対し、後者は一周期前の最終値が初期値となっている点であるが、安定条件は等しくなっている。以下、両者を簡単に説明する。

7-2-1. 反復制御⁽²⁾

まず、制御対象は可制御、可観測とし、 m 入力 m 出力のプロパー、可逆なシステムの伝達関数行列を $G_0(s)$ ($m \times m$) であたえられているものとする。また、 $G_0(s)$ は予め何らかのフィードバック制御によって漸近安定（以下、単に安定という）化され、さらにプロパー、安定な前置補償器 $K(s)$ ($m \times m$) によって制御されているものとする。それを

$$G(s) = G_0 K(s) \quad (7-1)$$

とおき、その $G(s)$ の入出力をそれぞれ、 $U(s)$ ($m \times 1$)、 $Y(s)$ ($m \times 1$) とする。そのときのブロック図を図 7-1 に示す。

ここで、目標入力を $R(s)$ ($m \times 1$) とすると、

$$G(s) U(s) = R(s) \quad (7-2)$$

となる $U(s)$ を求めれば、

$$Y(s) = R(s) \quad (7-3)$$

となり、高精度な制御を行うことが可能になる。そこで、 $U(s)$ の求め方が問題となる。まず考えられることは、

$$U(s) = G^{-1}(s) R(s) \quad (7-4)$$

と単純に計算することであるが、制御対象から正確な $G(s)$ を求めることは不可能に近いと思われる。

この問題に対し、

$$\begin{aligned} U_{i+1}(s) &= U_i(s) + a E_i(s) \quad (a \geq 0, i \geq 0) \\ E_i(s) &= R(s) - Y_i(s) \end{aligned} \quad (7-5)$$

と表される試行を反復することにより、(7-2) 式の $U(s)$ を求める方法が考えられる。これを実現するブロック図を図 7-2 に示す。ここで、 M は記憶システム（メモリ）である。

次に、このシステムの安定性について述べる。学習安定（偏差が試行毎に減少

すること)の規範として

$$\int_0^{\infty} e^{t_{i+1}} e_{i+1}(t) dt < \int_0^{\infty} e^{t_i} e_i(t) dt \quad (7-6)$$

を考える。ただし、 $e_i(t)$ は $E_i(s)$ の逆ラプラス変換である。(7-6)式を周波数領域での表現にする。

$$e_i(t) = 0 \quad (t \leq 0) \quad (7-7)$$

であることと、Parsevalの等式より

$$\int_0^{\infty} e^{t_i} e_i(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_i^*(j\omega)^T E_i(j\omega) d\omega \quad (7-8)$$

となる。ただし、*は共役複素数を意味する。(7-8)式は $i+1$ のときも成立するので(7-6)式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_{i+1}^*(j\omega)^T E_{i+1}(j\omega) d\omega < \int_{-\infty}^{\infty} E_i^*(j\omega)^T E_i(j\omega) d\omega \quad (7-9)$$

となる。ここで、

$$\begin{cases} E_{i+1}(s) = S(s) E_i(s) \\ S(s) = I - a G(s) \end{cases} \quad (7-10)$$

の関係により、(7-9)式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_i^*(j\omega)^T [I - S^*(j\omega)^T S(j\omega)] E_i(j\omega) d\omega > 0 \quad (7-11)$$

となり、

$$I - S^*(j\omega)^T S(j\omega) > 0 \quad \forall \omega \quad (7-12)$$

が導かれる。最後に(7-10)式と(7-12)式より、学習安定の十分条件は

$$\| I - aG(j\omega) \| < 1 \quad (7-13)$$

となる。

7-2-2. 繰り返し制御⁽⁷⁾

目標入力 $r(t)$ が図7-3のような周期関数であれば、図7-4のようなサーボ系を構成することにより、偏差を零にする制御系が実現される。

この系において、

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (7-14)$$

$$Y(s) = G(s)U(s) + Y_a(s) \quad (7-15)$$

$$U(s) = \alpha E(s) + W(s) \quad (7-16)$$

$$W(s) = e^{-Ls} [W(s) + E(s)] + W_a(s) \quad (7-17)$$

の関係が成り立つ。ただし、 $Y_a(s)$ 、 $W_a(s)$ はそれぞれ $G_a(s)$ 、 e^{-Ls} の初期応答のラプラス変換である。これらの関係を用いると、

$$E = e^{-Ls} [I + \alpha G]^{-1} [I + (\alpha - 1)G] E + [I + \alpha G]^{-1} D_0 \quad (7-18)$$

$$D_0 = (1 - e^{-Ls}) R - (1 - e^{-Ls}) Y_a - G W_a$$

となり、ブロック図に表すと図7-5の等価系が得られる。

以下、図7-5の等価系にて安定性を考える。

$$r_0(t) = L^{-1} [(1 - e^{-Ls}) R(s)] \quad (7-19)$$

と定義すると、

$$r_0(t) = 0 \quad (t \geq L) \quad (7-20)$$

であるので、 $0 \leq t < L$ で $r(t)$ が有界ならば、 $r_0(t) \in L_2$ となる。

ただし、 L_2 は

$$\|f\|_{L_2}^2 = \int_0^{\infty} f^T(t) f(t) dt < \infty \quad (7-21)$$

でノルムが定義される $f(t)$ の集合である。

ここで、 $[I - \alpha G]^{-1}$ が漸近安定であると、(7-18)式より

$$L^{-1} [(I - \alpha G)^{-1} D_0] \in L_2 \quad (7-22)$$

となる。また、

$$|e^{-j\omega L}| = 1 \quad \forall \omega \quad (7-23)$$

である。以上の事実を用いると、スモールゲイン定理⁽⁸⁾より、
(注意1)

$$\| (I + \alpha G)^{-1} [I + (\alpha - 1) G] \| < 1 \quad (7-24)$$

が成立するならば、図7-5の系は安定であり、図7-4の系も安定となる。

ここで、反復制御と繰り返し制御の等価性について述べる。(7-13)式と(7-24)式が異なっているのは、制御系の型が異なっているからである。(aは学習の収束を速めるためのもので、 α は系の安定性を増すためのものである。) $a = 1$ 、 $\alpha = 0$ とすると制御系の型が等しくなり、(7-13)式及び(7-24)式は

$$\|I + G\| < 1 \quad (7-25)$$

と等しくなる。また、反復制御の系に α を、繰り返し制御の系に a を設けることも可能である。

(注意1) スモールゲイン定理とは「閉ループ系のループゲインが1未満ならば、有界入力に対して有界出力となる」という内容の定理である。

7-3 可変構造系を用いた学習制御

ロボットのダイナミクスは一般に、

$$I(\theta) \ddot{\theta} + f(\theta, \dot{\theta}) + V\dot{\theta} + g(\theta) = u \quad (7-26)$$

と表される。ここで、 θ は関節角ベクトル、 $I(\theta)$ は慣性行列、 $V\dot{\theta}$ は摩擦項、 $f(\theta, \dot{\theta})$ はコリオリ力と遠心力項、 $g(\theta)$ は重力項を表す。(7-26)式より明らかなように、ロボットは非線形であり、線形系を対象とする従来の学習制御は直接適用できず、何らかの線形化を行う必要がある。その方法として、ハイゲインフィードバックによるものと、非線形補償によるもののが考えられるが、前者はアームの高速化に伴ってコリオリ・遠心力が大きくなり、何らかの影響が出るものと思われる。後者は正確なモデリングが不可能に近いことより、実現性に乏しいと考えられる。

そこで、VSS理論に基づくSliding mode制御を導入し、非線形系に対する学習制御を実現する。以下、VSS理論を説明し、つづいてVSSを導入した学習制御を示す。

(a) VSS理論に基づくSliding mode制御^{[9][10]}

VSS理論は非線形・非定常でも扱えるが、線形理論と比較することによって明確になるので、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x &\in R^n, u \in R^m \end{aligned} \quad (7-27)$$

を考える。線形理論では状態フィードバック

$$u = Kx \quad (7-28)$$

の行列Kが極配置、LQ制御といった手法で一意に定まる。これに対して、VSS理論ではKの角成分 k_{ij} が状態xに従い、

$$k_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & s_{ij}(x) > 0 \\ \beta_{ij} & s_{ij}(x) < 0 \end{cases} \quad (7-29)$$

(i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, m)

$\alpha_{ij} \neq \beta_{ij}$

$s_{ij}(x)$: xの関数

と切り換わる。これから、 $m \times n$ 個の関数 $s_{ij}(x)$ に対して k_{ij} はおのおの二つの値

をとるので、 K は合計 2^n 組存在する。一つの K に対応する制御系をVSSでは構造 (Structure) という。このことより、VSS理論すなわち、可変構造システム理論という。ここでの「構造」の意味は制御系を構成している要素 (Component) は同じだが、フィードバックゲインが切替わっていること (たとえば、正帰還・負帰還) をいう。

VSSでは、切換え則 $s_{ij}(x)$ を設定することにより、希望する動特性を得ることができる。また、状態 x を切換え面 $s_{ij}(x) = 0$ に束縛することにより、ロバストな制御系を構成出来る。(Sliding mode制御)

VSSは二次系で考えるとわかりやすい。そこで、不安定な二つの構造をもつ制御系

$$\ddot{x} - \xi \dot{x} + \psi x = 0 \quad \xi > 0 \quad (7-30)$$

を考える。切換え則を

$$\psi = \begin{cases} \alpha & \text{if } xs > 0 & \text{(I)} \\ -\alpha & \text{if } xs \leq 0 & \text{(II)} \end{cases} \quad (7-31)$$

$$\alpha > 0$$

$$s = cx + \dot{x}$$

$$c > -\lambda = -\frac{\xi}{2} + \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \alpha}$$

と選べば、位相面軌跡は図7-6となる。

このとき、制御対象は位相面軌跡に沿い、(I)の領域から $s = 0$ へ到達し、(II)の領域へ入ると (I)の領域へ押し戻され、 $s = 0$ の直線上で小さな振動を繰り返して原点へと向かう。この現象をSliding modeという。

(b) VSSを導入した学習制御
入力に対し、線形な一入出力系

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + bu & x \in R^n \\ \sigma = cx & u, \sigma \in R \\ \text{(注意2)} \end{cases} \quad (7-32)$$

を考える。(一自由度のマニピュレータは $n = 2$ でこの形になる。) 理想的な Sliding mode では $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ を満足する。

$$\dot{\sigma} = c \dot{x} = c f(x) + c b u_{eq} = 0 \quad (7-33)$$

より、等価制御入力 u_{eq} は

$$u_{eq} = -[c b]^{-1} c f(x) \quad (7-34)$$

と求まる。また、現実の Sliding mode 時は

$$\dot{\sigma} = c f(x) + c b u \quad (7-35)$$

より、制御入力 u は

$$\begin{aligned} u &= -[c b]^{-1} c f(x) + [c b]^{-1} \dot{\sigma} \\ &= u_{eq} + [c b]^{-1} \dot{\sigma} \end{aligned} \quad (7-36)$$

と求まる。ここで、 σ 、 $\dot{\sigma}$ は切替遅れ、ヒステリシス等により零にはなっておらず、ある値の範囲で微小振動を繰り返している。一方 u_{eq} はおもに低周波成分で構成されるものと思われる。

この点に着目し、 u をローパスフィルタに通すことにより、必要な情報のみを取り出すことを考える。(7-36)式をラプラス変換すると、

$$U(s) = U_{eq}(s) + (c b)^{-1} \dot{\sigma}(s) \quad (7-37)$$

となり、あるローパスフィルタ $H(s) \in R$ を通すと

$$H(s) U(s) = H(s) U_{eq}(s) + (c b)^{-1} H(s) \dot{\sigma}(s) \quad (7-38)$$

となり、近似的に

$$\dot{U}_{eq}(s) \doteq H(s) U(s) \equiv \overline{U}_{eq}(s) \quad (7-39)$$

(低域通過特性)

$$H(s) \dot{\sigma}(s) \doteq 0 \quad (7-40)$$

(高域遮断特性)

となる。しかし、(7-39)式は等しくない。そこで、

$$U_{eq}(s) = \overline{U}_{eq}(s) + \Delta U_{eq}(s) \quad (7-41)$$

とおく。 $\Delta U_{eq}(s)$ は変動範囲が押さえられている未知ダイナミクスとして、従来のSliding modeの設計を適用して、制御入力を

$$U(s) = U_{eq}(s) + \Delta U(s) \quad (7-42)$$

とすることにより、制御入力の切換え幅を小さくすることができる。

この考えにより、

$$\begin{cases} \overline{U}_{eq_{i+1}}(s) = H(s) U_i(s) \\ U_i(s) = \overline{U}_{eq_i}(s) + \Delta U_i(s) \end{cases} \quad (7-43)$$

なる学習制御則が導かれる。これをブロック図に表すと図7-7となる。

文献[11]では(7-42)式の $\overline{U}_{eq}(s)$ を予め計算して求めることにより実現したが、本論文では学習的方法(7-43)式によって $\overline{U}_{eq}(s)$ を求めた。

(注意2) (a)では s とあらわしたが、ここでは σ と表す。

7-4 実験及び結果

ここでは、VSSを導入した学習制御の効果を確かめるために重力の影響(非線形)を大きく受ける一自由度のシステムにて実験を行った。

7-4-1 実験システム

本実験では多関節型ロボットの一軸を利用して、実験を行った。図7-8にそのアームの略図を示す。

アームの長さは30cmで、Payloadは2kgとした。アクチュエータ(DCサーボモーター)

タ)は80:1のハーモニックドライブを介してアームに直結されている。

また、システム構成を図7-9に示す。ドライバはMOSFETを用いたPWMチョッパで中心周波数は10kHzであり、電流指令にて動作する。位置及び速度はシャフトエンコーダより検出して、16bitマイクロプロセッサを用いて制御した。

7-4-2 制御系の設計

7-4-1に示したアームのダイナミクスをラグランジエの方程式を使って求める。ラグランジエの方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} = T \quad (7-44)$$

と表される。ただし、 θ はアームの回転角、 T はアームに加わるトルクである。また、 L はラグランジアンであり、

$$\begin{aligned} L &= K - P \\ K &= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \\ P &= (m_b l_b + m_a l_a) g \cos \theta \end{aligned} \quad (7-45)$$

となる。ただし、 K は運動エネルギー、 J は慣性モーメント、 m_b と m_a はそれぞれアームとPayloadの質量、 l_b と l_a はそれぞれアームとPayloadの重心から回転軸までの距離、 g は重力加速度である。(7-44)式は

$$\begin{aligned} J \ddot{\theta} - m l g \sin \theta &= T \\ m l &= m_b l_b + m_a l_a \end{aligned} \quad (7-46)$$

となる。摩擦を考えると(7-45)式は

$$u = J \ddot{\theta} + \phi \dot{\theta} - m l g \sin \theta \quad (7-47)$$

となる。 u は入力トルクである。以下、(7-47)式を制御対象として設計する。

$$\Delta u_i = (\psi |e_i| + \xi |\dot{e}_i| + k) \operatorname{sgn}(s_i) \quad (7-48)$$

$$s_i = \dot{e}_i + c e_i \quad c > 0$$

$$e_i = \theta_d - \theta_i \quad \theta_d: \text{目標位置}$$

とする。この Δu_i を Sliding mode 存在条件

$$s_i \dot{s}_i < 0 \quad (7-49)$$

を満足するように決める。

$$s_i \dot{s}_i = s_i [\ddot{e}_i + c \dot{e}_i]$$

$$= s_i [(JC - \phi) \dot{e}_i + m l g (\sin \theta_d - \sin \theta_i) + u_d - u_i] < 0 \quad (7-50)$$

より、各ゲインを

$$\psi > m l g \quad (\text{注意 3})$$

$$\xi > |JC - \phi| \quad (7-51)$$

$$k > |u_d - \overline{u_{e,q}}|$$

とすることにより、(7-49)式は満足される。ここで、 u_d は(7-46)式の θ に θ_d を代入したときの u であり、ここでは、

$$u_d = u_{e,q} \quad (7-52)$$

である。

次に、(7-43)式のフィルタを設計する。本実験では、三次のバターワースフィルタをデジタルフィルタで実現した。このフィルタは伝達関数表現で

$$H(s) = \frac{1}{(s/w_c)^3 + 2(s/w_c)^2 + 2(s/w_c) + 1} \quad (7-53)$$

と表される^[13]。これを双一次変換する。すなわち、

$$S = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (7-54)$$

を代入すると

$$H(z) = \frac{b_0(1+z^{-1})^3}{1-(a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3})} \quad (7-55)$$

$$a_1 = \frac{3+2r-2r^2-3r^3}{1+2r+2r^2+r^3} \quad a_2 = \frac{-3+2r+2r^2-3r^3}{1+2r+2r^2+r^3}$$

$$a_3 = \frac{1-2r+2r^2-r^3}{1+2r+2r^2+r^3} \quad b_0 = \frac{r^3}{1+2r+2r^2+r^3}$$

$$r = \frac{w_c T}{2}$$

となる。ここで、 w_c は遮断周波数、 T はサンプリングタイムである。これを実現するブロック図は図7-10である。

最後に、切換えによるchatteringを抑制するため、リレー関数 sgn の代わりに

$$\text{sgn}(s) \rightarrow \frac{s}{|s| + \delta} \quad (7-56)$$

なる連続関数を導入する^[14]。これは切換えの近傍に比例帯を設定することと等価である。当然ロバスト性は損なわれるが、chatteringを大きく抑制できるため、現実の制御系では必要な措置である。しかし、ある程度切換面（線）からはずれ（ s が大）と δ は無視でき、従来のSliding modeと等価になり、安定性は保たれる。

(注意3) $|\sin\theta_d - \sin\theta| < |\theta_d - \theta| = |e|$
 $\sin\theta = \theta$ ($\theta \doteq 0$) を考慮した。

7-4-3 実験結果

Payload 2kgのときに実測して求めたアームのダイナミクスは

$$u = 0.821\ddot{\theta} + 3.2\dot{\theta} - 7.21\sin\theta \quad (7-57)$$

となり、各定数（ゲイン）は条件(7-52)式、速度の最大値、トルクの飽和等を考慮して

$$\psi = 100, \xi = 50, k = 5, c = 20 \quad (7-58)$$

とした。サンプリング周期は1msで行った。また、目標軌道は

$$\theta_d = \frac{1}{2} (1 - \cos\omega t) \quad [\text{rad}] \quad (7-59)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad [\text{rad/s}] \quad T = 1.5 \text{ [s]}$$

なる関数の位置 θ_d 及び速度 $\dot{\theta}_d$ をオフラインで計算し、テーブルにしてオンラインで利用した。その目標位置を図7-11に示す。また、目標軌道は区間[0, 1.5]だけ与え、区間[1.5, 1.75]は $\theta_d = \dot{\theta}_d = 0$ とし、1.75[s]にて制御を打ち切り、毎回の試行の初期値は $\theta_d = \dot{\theta}_d = 0$ とした。

以下、(7-4-10)式の ω_c 及び(7-4-13)式の δ を変化させて、実験を行った。また、従来の学習制御との比較も行った。

(a) ω_c 、 δ 共に一定

$\omega_c = 20\omega$ 、 $\delta = 0.1$ にて学習効果を確認した。その結果を図7-12に示す。学習による u_{eq} を加えたことにより、偏差 e が小さくなり、chatteringも抑制された。

(b) ω_c 一定、 δ 変化

$\omega_c = 20\omega$ 、 $\delta = 0.01, 0.1, 0.5$ で実験した結果を図7-13に示す。その結果、 δ を小さくすると従来のSliding mode制御に近くなり、偏差が小さくなったが、入力にchatteringが残る。逆に、 δ を大きくすると偏差が大きくなり、chatterin

g が小さくなった。

ここでの最適な δ は0.1前後である。

(c) ω_c 変化、 δ 一定

$\omega_c = 10\omega, 20\omega, 50\omega, 100\omega, \delta = 0.1$ で実験した結果を図7-14に示す。その結果、(b)と同様に、 ω_c を小さくすると入力は滑らかになるが偏差が大きくなり、 ω_c を大きくすると偏差は小さくなっていくが入力が振動してくる。

ここでの最適な ω_c は 50ω 前後である。

(d) 従来の学習制御との比較

文献[2]を参考に従来の学習制御の実験を行った結果を図7-15に示す。その結果、従来の学習制御に対し、VSSによるものが優れていることが確認できた。

文献[2]に従い、本実験の設計手順を述べる。(7-47)式を線形近似し、 u を

$$u = -k_1 \theta - k_2 \dot{\theta} + v \quad (7-60)$$
$$k_1 = 2056, k_2 = 85$$

とし(ハイゲインフィードバック)、 v を新しい入力とする。そのとき

$$G_a(s) = \frac{1}{(s+50)^2} \quad (7-61)$$

となる。また、 $K = 1, a = 50$ として実験を行った。ただし、フィルタは(7-53)式で $\omega_c = 20\omega$ とした。

7-5 おわりに

- (1) 非線形性を有する位置自由度のアームにVSSを導入した学習制御を提案した。
- (2) 実験により最適なフィルタの遮断周波数 ω_c 及び連続関数の δ を求めた。
- (3) 本章では一自由度であったが、今後多自由度に拡張する必要がある。
- (4) 理論的な解析を進める必要がある。

参考文献

- [1] 内山：「試行による人工の手の高速運動パターンの形成」、計測自動制御学会論文集、14-6、706/712(1978)
- [2] 美多、加藤、青木：「反復制御とロボットアームの軌道制御への応用」、計測自動制御学会論文集、21-11、1223/1230(1985)
- [3] 川村、宮崎、有本：「動的システムの学習的制御法 (Betterment Process) の提案」、計測自動制御学会論文集、22-1、56/62(1986)
- [4] 小俣、増子、中野、原：「ある種の非線形系に対する繰り返し制御とそのマニピュレータへの応用」、第14回制御理論シンポジウム、227/230(1985)
- [5] 川村、宮崎、有本：「学習制御のシステム論的考察」、計測自動制御学会論文集、21-5、445/450(1985)
- [6] 井上、岩井、中野：「プレイバックサーボ系の高精度制御」、電気学会論文誌、C-101-4、89/96(1981)
- [7] 原、小俣、中野：「繰り返し制御系の安定条件と設計法」、計測自動制御学会論文集、22-1、36/42(1986)
- [8] C. A. Desor and M. Vidyasagar : " Feedback Systems : Input-Output Properties " , Academic Press (1975)
- [9] 原島、橋本：「Sliding modeとその応用—I、II、システムと制御」、29-2、4(1985)
- [10] V. I. Utkin : " Variable Structure Systems with Sliding Mode " , IEEE Trans. on AC, Vol. AC-22, 212/222(1987)
- [11] F. Harashima, K. Maruyama and H. Hashimoto : " A Microprocessor-Based Robot Manipulator Control with Sliding Mode " , Proc. IECON' 85 (1985)
- [12] R. P. Paul : " Robot Manipulator " , Programming and Control, MIT Press(1981)
- [13] 木村英紀：「デジタル信号処理と制御」、昭晃堂(1983)
- [14] G. Ambrosino, G. Celentano, F. Garofalo : " Variable Structure Model Reference Adaptive Control Systems " , Int. J. Control, 39-6, 1339/1349(1984)

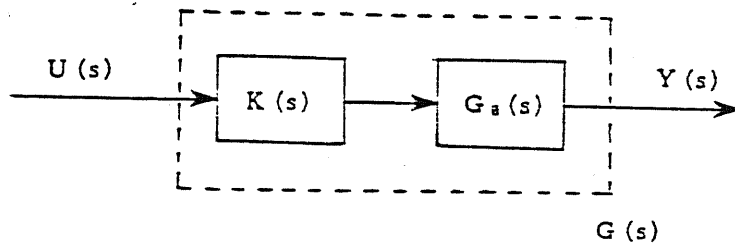


図7-1. ブロック図

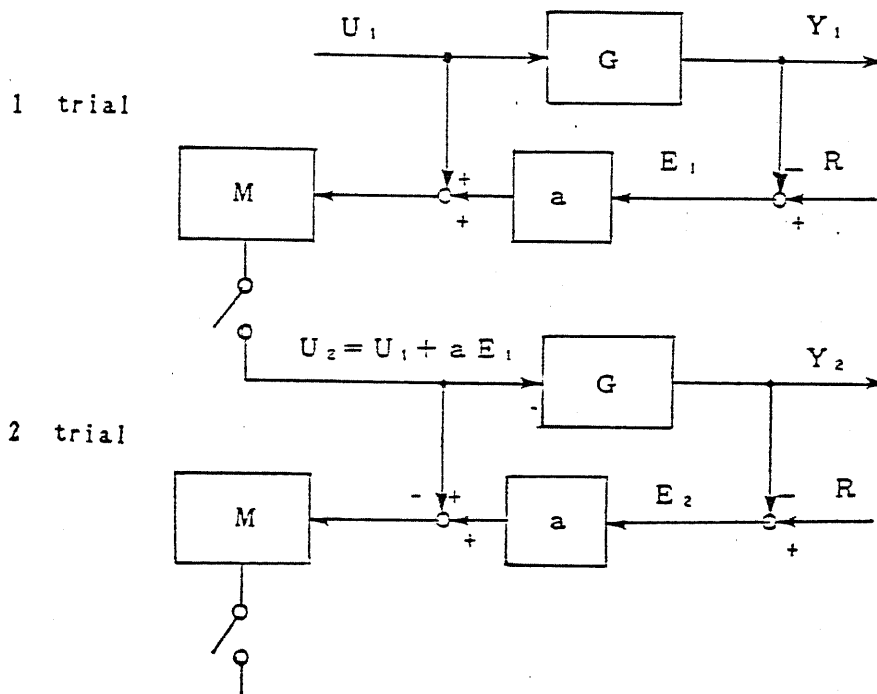


図7-2. 学習制御系

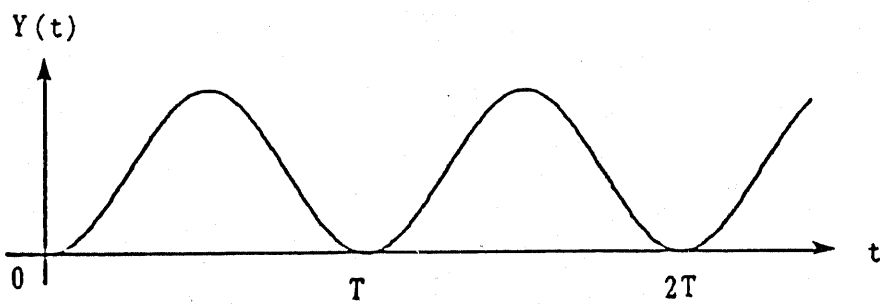


図7-3. 目標入力

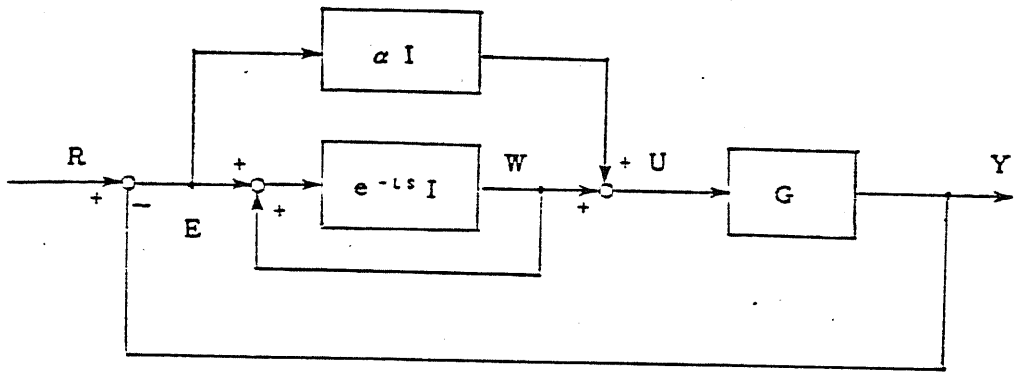


図7-4. 繰り返し制御系

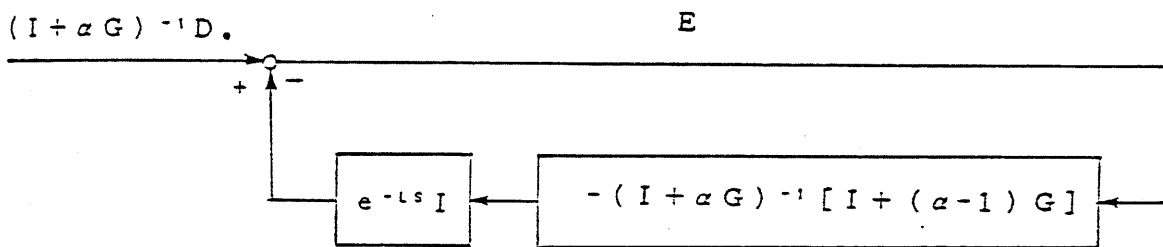


図7-5. 等価系

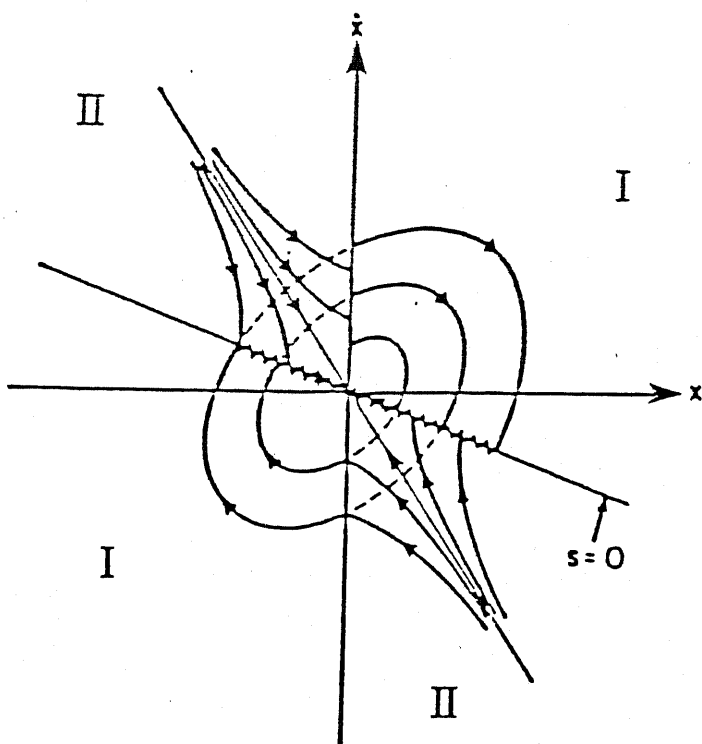


図7-6. 2次系VSS

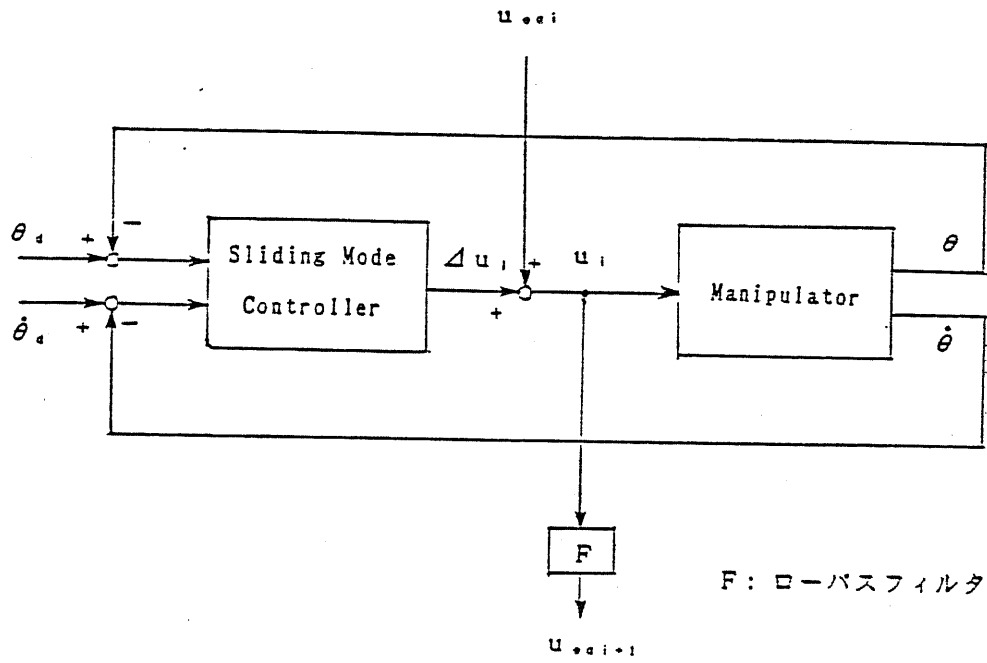


図7-7. VSSを導入した学習制御系

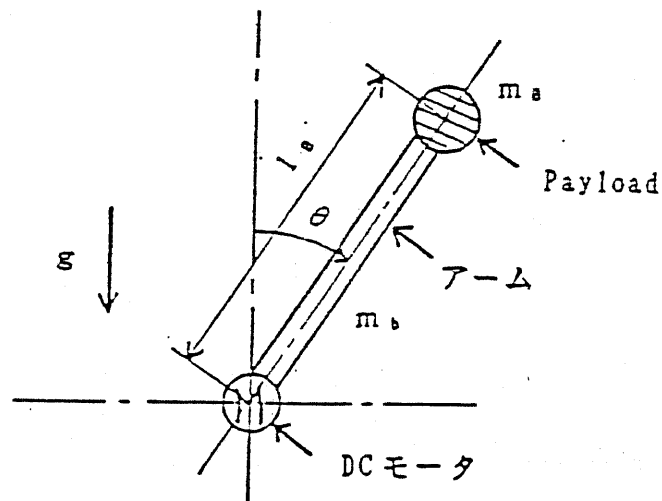


図7-8. アームの略図

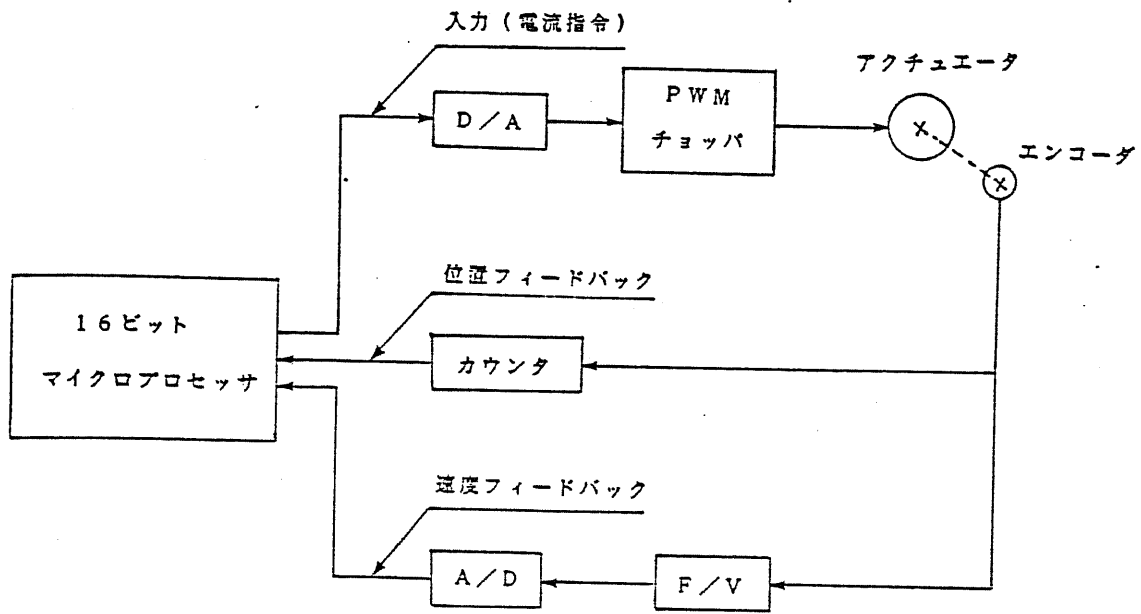


図7-9. システム構成

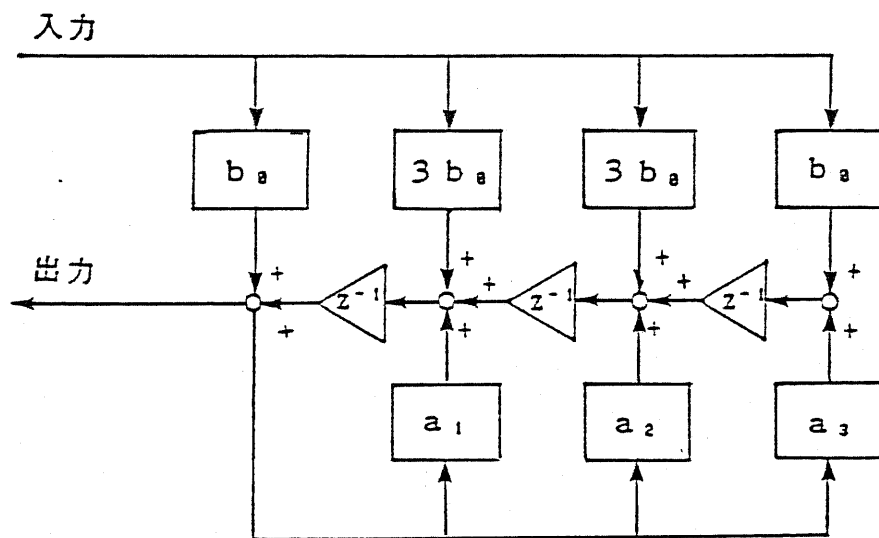


図7-10. バターワースフィルタ

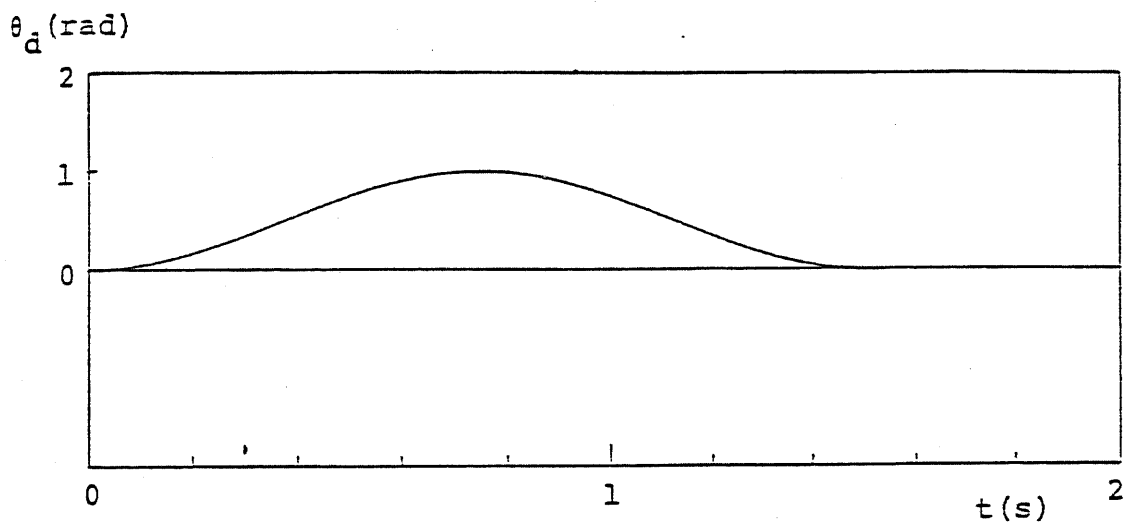


圖 7-11. 目標位置

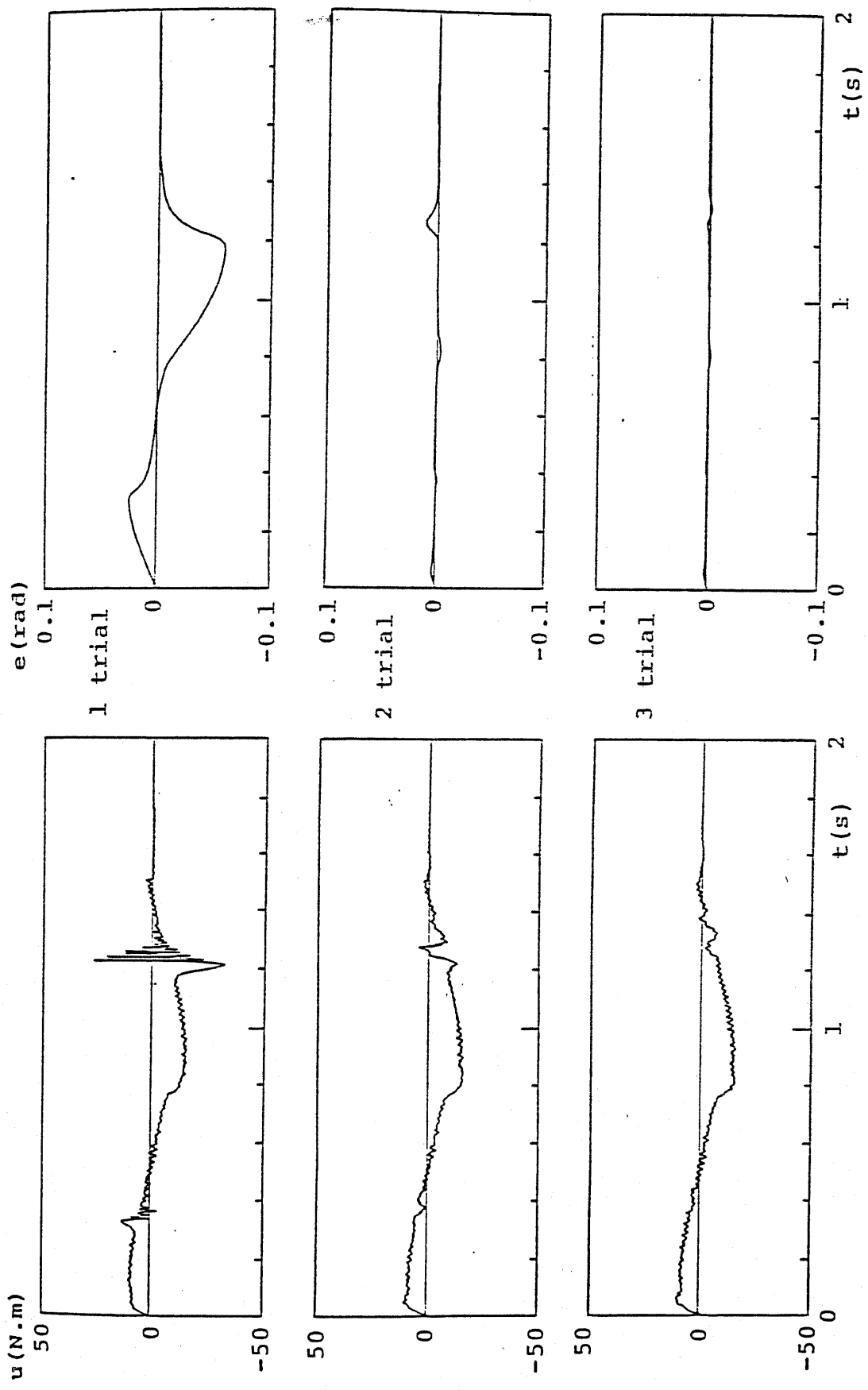


圖 7-12. 時間處符 ($\omega_c = 20\omega, \delta = 0.1$)

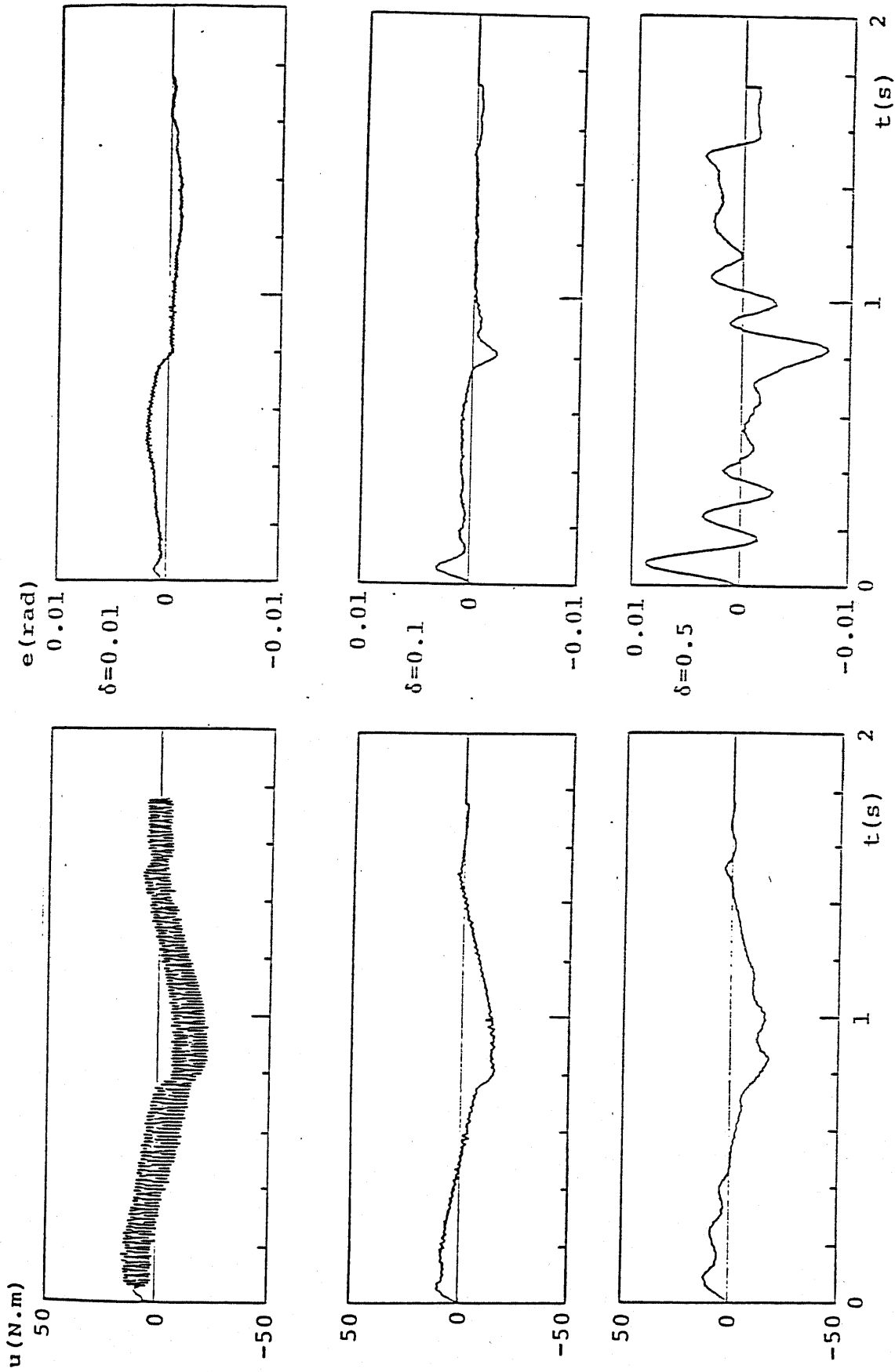


图 7-13. 时间响应 ($\omega_c = 20\omega, 10\text{trial}$)

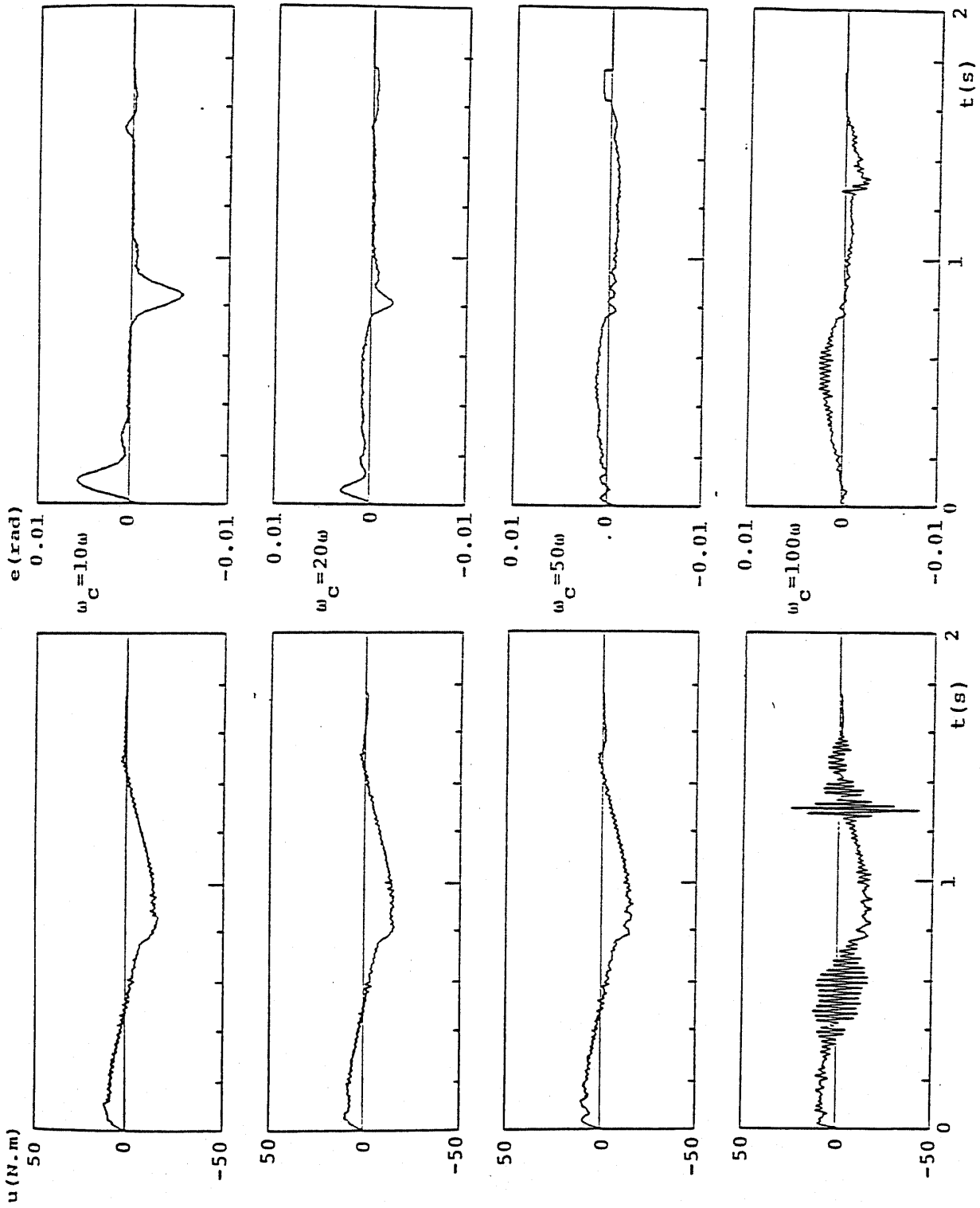


图 7-14. 時間応答 ($\delta = 0.1, 10 \text{trial}$)

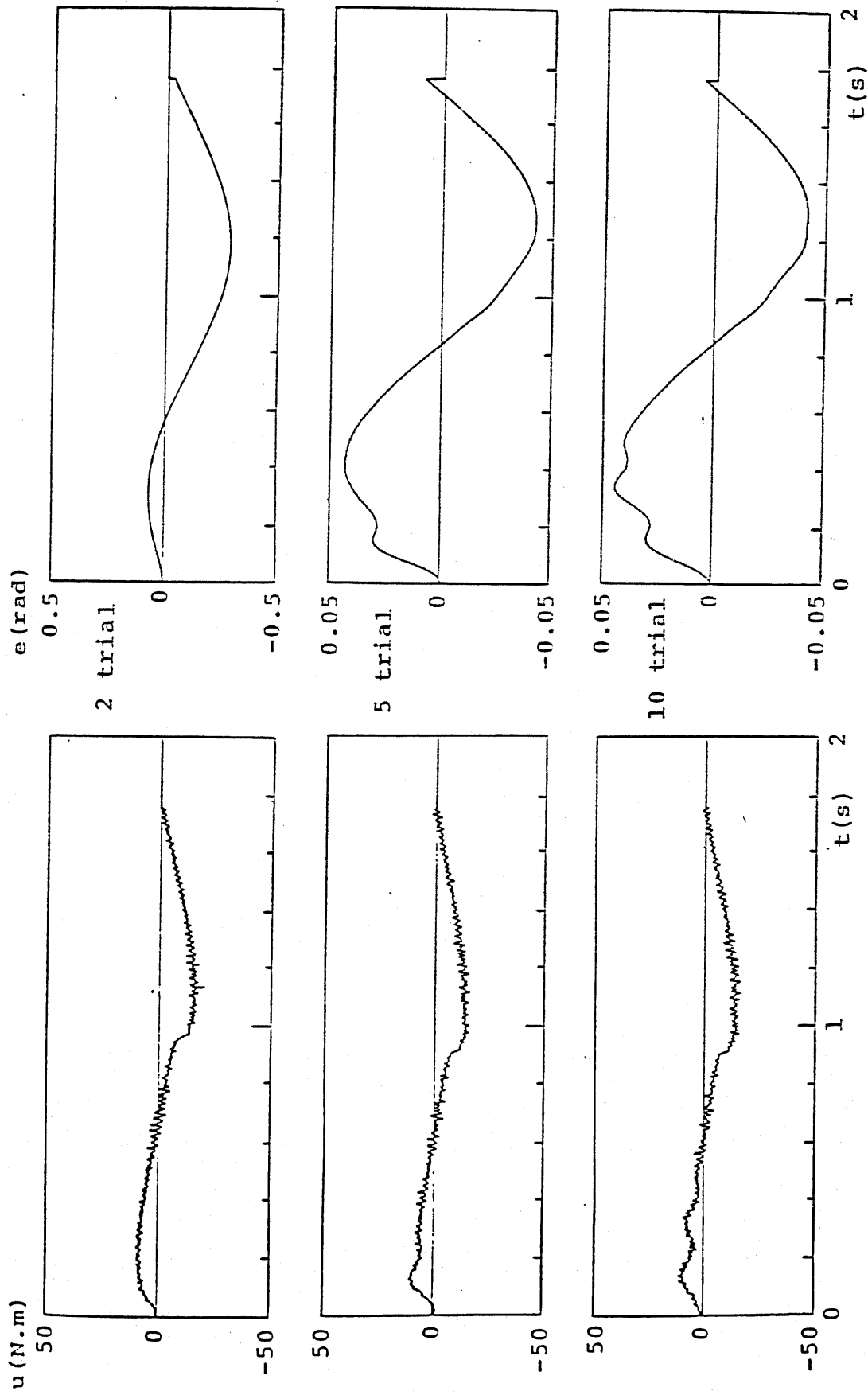


圖 7-15. 時間磨管 ($\omega_c = 20\omega$)

第8章 可変構造系の多入力系への適用

本章では、可変構造系の多入力系への適用を述べる。第2章で論じた可変構造系の理論がこの章では前提になっている。

8-1. はじめに

第2章の「可変構造系の理論」で示したように1入力系での可変構造系 (Variable Structure System) は直観的に理解できる。即ち可変構造系に基づく *Sliding Mode* は、全ての運動軌跡が切り換え超平面 (この場合一つである) に吸収されると理解すればよい。特に、1入力2次系の *Sliding Mode* は横軸を位置、縦軸を速度とした位相面を考えることによって物理的・幾何学的な理解が容易である。しかし、多入力系になると切り換え超平面が複数になり多様体としての定式化が必要で、*Sliding Mode* 自体をどのように定義するか等の設計指針が明確になっていない。本来、この問題は1970年代に入って V.I.Utkin によって研究課題として扱われ始めた。当初は応用の課題もなくそれ以降の注目すべき研究は見あたらなかったが、最近になり多入力系であるロボットアームが制御対象となったので再び多入力系への拡張が注目されきている。

本章では、多入力系 VSS の設計指針を与えるとともに、多入力系に対する *Sliding Mode* 存在条件に関して検討を行なう。

8-2. 多入力系 VSS の記述

8-2-1. 制御系

一般的な制御対象 (但し、与えられる微分方程式が入力に関して線形であるとする—この条件は付録 A に示す条件を満たせば入力に関して非線形な関係でもよい) を考える。一般的な対象を考えると得られる成果はかなり限定されるが、この様な取り扱いが最近の制御系では多くなってきている。また、線形時不変な場合は線形制御理論で得られた成果を直接適用できるので節を改めて述べる。

m入力 n次元系の状態方程式で記述される制御系

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u$$

(8-1)

$$\begin{aligned} x \in R^n \quad u \in R^m \quad (n \geq m) \\ \text{rank}[B(x,t)] = m \quad \forall t, \forall x \end{aligned}$$

を考える。ここで $f(x,t)$, $B(x,t)$ は既知とする。このときの制御入力 u は可変構造系形式の

$$u_i(x,t) = \begin{cases} u_i^+(x,t) & \text{if } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x,t) & \text{if } s_i(x) < 0 \end{cases} \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (8-2)$$

$$\begin{aligned} s = (s_1, s_2, \dots, s_m)^t : s_i \text{ 切り換え超平面 (注意 1)} \\ u_i \in U \quad U: \text{有界閉集合 } U = \{u \in R^m : \|u\| \leq \delta, \delta > 0\} \end{aligned}$$

であるとする。このとき、 $s_i(x)=0$ では制御入力 $u_i(x,t)$ を定義していないが、次の様にしてもよい。

$$u_i(x,t) = \begin{cases} u_i^+(x,t) & \text{if } s_i(x) > 0 \\ u_i^0 & \text{if } s_i(x) = 0 \\ u_i^-(x,t) & \text{if } s_i(x) < 0 \end{cases} \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (8-3)$$

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_m)^t : s_i \text{ 切り換え超平面}$$

$$u_i^\pm \in U \quad U: \text{有界閉集合 } U = \{u \in R^m : \|u\| \leq \delta, \delta > 0\}$$

$$u_i^0 : \text{不定、但し } u_i^0 \in U$$

$f(x,t)$, $B(x,t)u$ は $s_i(x)=0$ 以外の全ての定義域 (x,t) でリプシッツ(Lipschitz)条件を満足するものとする。即ち、

$$\begin{aligned} \exists L_1 > 0 : \forall (x_1,t), \forall (x_2,t) \in D \\ \|f(x_1,t) - f(x_2,t)\| \leq L_1 \|x_1 - x_2\| \end{aligned} \quad (8-4)$$

$$\exists L_2 > 0 : \forall (x_1, t), \forall (x_2, t) \in D$$

$$\|B(x_1, t)u(x_1, t) - B(x_2, t)u(x_2, t)\| \leq L_2 \|x_1 - x_2\| \quad (8-5)$$

の条件を満足する。ここで、定義域 D は

$$D = \{(x, t) : \forall i \quad s_i(x) \neq 0 \quad i = (1, 2, \dots, m)\} \quad (8-6)$$

である。リアッツ条件を満足している時リアッツ連続であるといい、このときの L_1, L_2 をリアッツ定数という。

$s = (s_1, s_2, \dots, s_m) = 0$ は切り換え超平面を要素とする空間を表す。このとき s_i が t を陽に含むと Tracking 問題への適用が可能となる (注意 2)。(8-2) で得られる制御入力 u は $s_i = 0$ では定義されず不連続になるため、“リアブノフの直接法”の適用の妥当性を考える必要がある。しかし、ここでは(8-1)式がカラテオドリ型微分方程式を形成すると仮定して、特に不連続性に関する議論は行なわない (付録 B を参照)。

次に、ロバスト性を考えるためにパラメータ変動・外乱・曖昧さや不確かさを(8-1)式に導入する。

$$\dot{x} = f(x, t) + \Delta f(x, t, v) + B(x, t)u + \Delta B(x, t, v)u + D(x, t)\omega \quad (8-7)$$

$$u \in U \quad (v, \nu, \omega) \in \Omega \quad \Omega : \text{有界閉集合}$$

$$x, f, \Delta f \in R^n \quad B, \Delta B \in R^{n \times m} \quad D \in R^{n \times r}$$

$$\Delta f, \Delta B, D : \text{定義域 } (x, t) \subset D \text{ で連続}$$

これらの項に対して次の仮定を置く。

[仮定 1]

$$\Delta f(x, t, v) = B(x, t)h(x, t, v)$$

$$\Delta B(x, t, \nu) = B(x, t)E(x, t, \nu) \quad (8-8)$$

$$D(x, t) = B(x, t)G(x, t)$$

を満たす連続関数 $h(x, t, v) \in R^m$ 、連続行列関数 $E(x, t, \nu) \in R^{m \times n}$ 、 $G(x, t) \in R^{m \times r}$ が $(x, t) \subset D$ で存在する。■

また、この仮定は次と同値である。

[仮定1']

$\forall (x,t) \in D$ に対して

$$\begin{aligned} \text{rank}[B, \Delta f] &= \text{rank}[B] \\ \text{rank}[B, \Delta B] &= \text{rank}[B] \\ \text{rank}[B, D] &= \text{rank}[B] \end{aligned} \tag{8-9}$$

である。■

[仮定1] [仮定1'] は "Matching Condition" (付録C参照) として知られている。従って (8-7) は、パラメータ変動、未知外乱等の曖昧さを表すものを一つのベクトルで表すと

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)(u + \eta) \tag{8-10}$$

$$\text{ここで、} \eta = h(x,t, v) + E(x,t, v)u + G(x,t)\omega \tag{8-11}$$

となる。 $f(x,t)$ は構造及び各パラメータまで既知な非線形ダイナミクスであり、 η は未知の変動部分を表現する。この η に関して次の仮定を置く。

[仮定2]

$$\eta \in V \quad V = \{ \eta \in R^m : \| \eta \| \leq \rho(x,t), 0 < \rho \} \tag{8-12}$$

■
 η に関する情報としては、全ての変動に対してそのノルムの上限が押さえられるだけである。以上から、多入力系 VSS の表現として

[多入力系 VSS の表現]

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)(u + \eta) \quad (8-13)$$

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{if } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{if } s_i(x) < 0 \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (8-14)$$

$s = (s_1, s_2, \dots, s_m)^t$: s_i 切り換え超平面

$u_i \in U$ U : 有界閉集合 $U = \{u \in R^m : \|u\| \leq \delta, \delta > 0\}$

$\eta \in V$ $V = \{\eta \in R^m : \|\eta\| \leq \rho(x, t), 0 < \rho\}$

$x \in R^n$ $u \in R^m$ ($n \geq m$)

$\text{rank}[B(x, t)] = m \quad \forall (x, t) \in D$

$D = \{(x, t) : \forall i s_i(x) \neq 0 \quad i = (1, 2, \dots, m)\}$

が与えられる。

(注意1) 超平面: n 次元アフィン空間 E_n の $n-1$ 次元線形部分集合である。

あるいは、 f を E_n 上の零でない線形汎関数とすると集合 $\{x \mid f(x) = c\}$ は E_n の超平面である。

・本論で対象とする空間では

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b = 0$$

$$a_i, b \in K \quad (K = R \text{ or } C)$$

が超平面になる。また $a_1 \sim a_n$ の内少なくとも1個が0でなければ特異点は存在しない(即ち滑らかになる)。

$$\text{※特異点} : \quad \forall i \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

(注意2) 超平面 s を誤差空間で構成する。即ち、

$$s = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

であるから、 $e_i := x_i - x_{id}$ と $x_{id} = x_{id}(t)$ を用いて、

$$s = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{i=1}^n c_i x_{id}(t) = 0$$

が得られる。これは目標軌道 x_{id} へ追従する *Tracking* 問題になる。

8-2-2. 多入力系の *Sliding Mode* (滑り状態)

Sliding Mode が生じると、制御対象は *Sliding Manifold* $s=0$ に拘束される。このとき、*Sliding Manifold* は滑り状態領域 (*Domain of a Sliding Mode*) と共に次の様に定義される。

[定義1: 滑り状態領域 (*Domain of a Sliding Mode*)]

$$S(x,t) = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \mid s_i(x) = 0 \ (i=1, \dots, m) \} \quad (8-15)$$

が次の条件を満たすとき滑り状態領域という。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して $S(x,t)$ の δ 近傍から差した状態が $S(x,t)$ の ε 近傍から出るのは ε 近傍の境界を通るときだけである。(図8-1参照) ■

同値な定義として

[定義2]

任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して、多様体 $s=0$ の領域 $S(x,t)$ の δ 近傍にある状態は ε 近傍内に留まる。■

[定義3]

$(n-m)$ 次元多様体 $S(x,t)$ は、区間 $I: I \subset [0, +\infty)$ で、

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in I, \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0:$$

$$\forall x_0 \in S_\delta, \forall t \geq t_0 \quad x(t; t_0, x_0) \in S_\varepsilon \quad (8-16)$$

ならば、滑り状態領域である。

ただし、

$$S_\delta = \{ x \in R^n : \| S(x, t) \| < \delta \}$$

$$S_\varepsilon = \{ x \in R^n : \| S(x, t) \| < \varepsilon \}$$

■
[定義4]

(s_1, \dots, s_m) 空間で考えると、区間 $I: I \subset [0, +\infty)$ で、

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in I, \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0:$$

$$\forall s_0 \in B_\delta, \forall t \geq t_0 \quad \| s(t; t_0, x_0) \| < \varepsilon \quad (8-17)$$

ならば、 $s=0$ は滑り状態領域である。

ただし、

$$B_\delta = \{ s \in R^m : \| s \| < \delta \}$$

■
が考えられるが、いずれにしても、 $s=(s_1, \dots, s_m)^t=0$ の安定性を論じている。これらの定義はリアプノフの意味での安定性の定義と同じである。特に、定義3と定義4は x -空間での定義か s -空間での定義かという違いのみである。

次に、リアプノフよりも強い収束性を考えた定義として次の有限時間到達安定性が考えられる。

[定義5：有限時間到達安定性]

状態 x は、有限時間で $s=0$ に到達し、以後その状態を保つ。即ち、
区間 $I: I \subset [0, +\infty)$ で、

$$\forall t_0 \in I, \exists T = T(t_0) > t_0, \exists \delta > 0:$$

$$\forall x_0 \in S_\delta, \forall t \geq T \quad \| s(t; t_0, x_0) \| = 0 \quad (8-18)$$

ならば、 $S(x, t)$ は滑り状態領域である。

ただし、

$$S_\delta = \{ x \in R^n : \| S(x, t) \| < \delta \}$$

この定義5のような有限時間での到達は通常の制御系では考えられず可変構造系の一つの特徴である。リアプノフの安定論では時間無限大での到達しか保証できず、連続制御系ではどのようなことを施しても有限時間内での到達（停留点への到達）は無理である（図8-2参照）。連続系では、極が左半平面にある限り指数的な安定しか得られないからである。

但し、有限時間内に到達して停留点($s=0$)に留まるには制御入力切り換えに遅れ等がなくてはならないので現実には有り得ない。Z平面で原点に極を配置する有限整定の場合は除く。

8-2-3. Sliding Mode 存在条件

多入力系 Sliding Mode の存在条件を考える。リアプノフの手法（直接法）と同様な考え方で求める。通常の安定論と同じでリアプノフ関数（特に、これからはリアプノフ関数とは呼ばない）が得られないからといって Sliding Mode が存在しないとは言えない。即ち、これから求めるのは十分条件である。

[定理1: Sliding Mode 存在条件]

$S(x,t)$ が滑り状態領域であるための十分条件は、次の条件を満足する連続微分可能な関数 $v(x,s,t)$ が存在することである。

1. v は s に関して正定である。

$$v(s,x,t) > 0 (s \neq 0), v(0,x,t) \equiv 0$$

$$\inf_{\|s\|=R} [v] = h_R, \quad \sup_{\|s\|=R} [v] = H_R, \quad R \neq 0 \quad (8-19)$$

h_R, H_R は R のみに依存

2. v の時間微分

$$\dot{v} = \text{grad}_s v(Gf + GBu) + \text{grad}_x v(f + Bu) + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (8-20)$$

$$\text{grad}_s v = \left(\frac{\partial v}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial s_m} \right)$$

$$\text{grad}_x v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)$$

が、 \dot{v} を定義できない不連続面を除いて負である。また、不連続点を除いた $\|s\| = R$ の球面上で次の関係

$$\sup_{\|s\|=R} [\dot{v}] = -m_R, \quad m_R = \text{const.} \quad m_R > 0 \quad (8-21)$$

が成立する。■

[証明]

この定理は、V.I.Utkin によって与えられた。証明は文献[1]に示す。■

8-3. 多入力系 *Sliding Mode* の特徴

8-3-1. 多入力系 *Sliding Mode* の分類

多入力系 *Sliding Mode* は [定義] [定理: *Sliding Mode* 存在条件] で分かるように $s = (s_1, \dots, s_m)^t = 0$ への収束性を指している。収束性は確保されるが、収束の仕方に関しては言及していない。定義によれば、解軌道 (x の軌跡) は $s=0$ の ε 開球内に存在するとしか言っていない。

収束に関して検討を進めると、次の4つの収束の仕方が考えられる。

- ① 各超平面 (切り換え面) $s_i=0$ で *Sliding Mode* が生じず $s=0$ へ収束する。(図 8-3)
- ② ある超平面 $s_i=0$ で *Sliding Mode* が生じて $s=0$ へ収束する。(図 8-4)
- ③ 超平面 $s_i=0$ が共通集合を持たず、各超平面で *Sliding Mode* が生じる。(図 8-5)
- ④ $s=0$ が上記①②③の組合せからなる場合。

次に各場合の例を示す。

①の場合

(例1) 次の2入力 n 次系を考える。

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u$$

$$u = (\text{sign}(s_1), \text{sign}(s_2))^t \quad x \in R^n, \quad B \in R^{n \times 2} \quad (8-22)$$

このとき、

$$G = \frac{\partial s}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial s_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial s_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial s_2}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (8-23)$$

として、

$$Gf = 0 \quad GB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (8-24)$$

であるとする。状態 x の (s_1, s_2) 面への投影を図 8-6 に示す。 $s_1=0, s_2=0$ の各切り換え面上に *Sliding Mode* は生じず、 $s=(s_1, s_2)^t=0$ へ収束し、そこで *Sliding Mode* が生じる。 ■

②の場合

(例 2)

$$GB = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} \quad (8-25)$$

であれば、状態 x は $s_1=0$ か $s_2=0$ の超平面上で *Sliding Mode* を生じて $s=(s_1, s_2)^t=0$ へ収束する (図 8-7)。 ■

③の場合

(例 3)

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 \\ s_2 &= x_3 + x_4 \end{aligned} \quad (8-26)$$

とすれば、 $s_1=0$ と $s_2=0$ との共通集合はなく、各超平面での *Sliding Mode* を考えればよい。 ■

次に考えることは状態 x の安定性である。滑り状態領域の定義からは、状態 x の安定性に関しては何も言っていない。単に $s=0$ が確保されただけであり、これは出力零化問題と見ることが出来る。一般的な超平面からなる空間 $s=(s_1, \dots, s_m)^t=0$ に関しては、 $s(x,t)=0$ を解いて x の挙動を調べればよい。状態 x が n 次元であり $n > m$ とすれば m 個の状態変数が残り $(n-m)$ 個の状態変数によって表される（但し、陰関数定理の条件を満足している必要がある： $\text{rank}[\partial s/\partial x]=m$ 付録参照）。

特に、 s と x が

$$s=cx \quad c \in R^{m \times n} \quad (n \geq m) \quad (8-27)$$

の関係であるとき、 $\text{rank}[c]=m$ ならば $\exists U \in R^{m \times m}$ が存在して

$$Us = \begin{bmatrix} I_m & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \in R^{m \times (n-m)} \quad x_1 \in R^m, x_2 \in R^{n-m}$$

から、

$$x_1 + c_1 x_2 = 0 \quad (8-28)$$

となる。

また、 $m=n$ ならば

$$s=cx \quad c \in R^{n \times n} \quad (8-29)$$

から、 c が正則であれば $x=0$ である。

8-3-2. 等価制御入力法による連続化

制御系 (8-13)(8-14) は制御入力 u が不連続であるため、良く知られた（常）微分方程式の解の存在と一意性の定理を直接適用することが出来ない。さらに、現実の制御入力切り換えには、遅れ、ヒステリシス等の曖昧さ（不確かさ）が伴う。したがって、この曖昧さに対応しただけの解 (*Sliding Mode*) が存在する。そこで、もし曖昧さを取り除いた *Sliding Mode* が同一の方程式（理想 *Sliding Mode*）で表されるならば、設計上及び解析上有益なことである。

ここでは、理想 *Sliding Mode* の方程式を求めるために、等価制御入力

u_{eq} を導入する。(8-13)(8-14)のシステムが理想 *Sliding Mode* にある時は、制御入力 u の切り換え周波数は無限大で遅れがないので、状態 x は切り換え面に完全に拘束される。即ち、 $s=0, \dot{s}=0$ となる。このとき、

$$G = \frac{\partial s}{\partial x} \quad (8-30)$$

とおくと、

$$\dot{s} = G \dot{x} = Gf + GB(u_{eq} + \eta) = 0 \quad (8-31)$$

であるから、 $\det[GB] \neq 0$ であれば、等価制御入力 u_{eq} は

$$u_{eq} = -(GB)^{-1}Gf - \eta \quad (8-32)$$

と求まる。(8-13)に代入して、理想 *Sliding Mode* の解軌道 x^* は

$$\begin{aligned} x^* &= f - B(GB)^{-1}Gf \\ &= [I - B(GB)^{-1}G]f \end{aligned} \quad (8-33)$$

と得られる。

一方、現実の *Sliding Mode* は遅れ、ヒステリシス等によって $s=0$ そのものではなく、その Δ 近傍に解軌道 $x(t)$ が存在することになる。即ち、 $\|s\| \leq \Delta$ では、

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)(\tilde{u}_{eq} + \eta) \quad \text{if } \|s\| \leq \Delta \quad (8-34)$$

を満足する連続制御入力 \tilde{u}_{eq} を考えることが出来る。また、 $\|s\| \leq \Delta$ では

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)(u + \eta)$$

$$u_i(x,t) = \begin{cases} u_i^+ & \text{if } s_i > \Delta_i \\ u_i^- & \text{if } s_i < -\Delta_i \end{cases} \quad (8-35)$$

である。

等価制御入力による連続化の有効性は、次の定理が保証する。

[定理 2 : 理想 *Sliding Mode* と現実の *Sliding Mode*]

次の条件

[1] 現実の *Sliding Mode* (8-34) の解 $x(t)$ が $s(x)=0$ の Δ 近傍に有限時間の間存在する。即ち、有限時間 $[0, T]$ で $\|s(x)\| \leq \Delta$ を満足する T が存在する。

[2] 理想 *Sliding Mode* の解を $x^*(t)$ としたとき、

$$\dot{x}^* = f(x^*, t) - B(x^*, t)[G(x^*)B(x^*, t)]^{-1}G(x^*)f(x^*, t) \quad (8-36)$$

はリブシッツ条件を満足する。

[3]

$B(x, t)[G(x)B(x, t)]^{-1}$ の偏導関数が存在して有界である

[4] 現実の *Sliding Mode* (8-34) の右辺 $f(x, t) + B(x, t)\tilde{u}_{eq}$ に対して、

$$\|f(x, t) + B(x, t)\tilde{u}_{eq}\| \leq M + N \|x\| \quad (8-37)$$

を満足する正数 M, N が存在する。

を満足しているとする。理想 *Sliding Mode* と現実の *Sliding Mode* の解軌道が

$$\|x(0) - x^*(0)\| \leq P\Delta \quad (8-38)$$

の初期条件を満足すれば、

$$\|x(t) - x^*(t)\| \leq H\Delta \quad t \in [0, T] \quad (8-39)$$

を満たす正数 H が存在する。■

[証明] 文献[1]にある。

この定理から次の定理が言える。

[定理 3 : 理想 *Sliding Mode*]

現実の *Sliding Mode* (8-34) の解 $x(t)$ は、制御入力切り換えに伴う曖昧さ

を取り除く ($\Delta \rightarrow 0$) と、

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} x(t) = x^*(t) \quad t \in [0, T] \quad (8-40)$$

となり、理想 *Sliding Mode* (8-33) の解 $x^*(t)$ に一致する。■

[証明] 先の定理の言い替えにすぎない。

上記の2つの定理はいずれも有限時間内での話である。次に、有限時間 $[0, T]$ を $[0, \infty)$ に拡張する。これは、「定理：理想 *Sliding Mode* と現実の *Sliding Mode*」の証明過程に理想 *Sliding Mode* の解 $x^*(t)$ が平衡点 x_∞ に指数安定であることを仮定して証明できる。

[定理4：理想 *Sliding Mode* の大域的性質]

[定理2] の条件に加えて理想 *Sliding Mode* が指数安定であれば、現実の *Sliding Mode* の解 $x(t)$ は、制御入力における切り換えの曖昧さ等を取り除くと、

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} x(t) = x^*(t) \quad t \in [0, \infty) \quad (8-41)$$

となり、理想 *Sliding Mode* (8-33) の解 $x^*(t)$ に一致する。■

[証明] 文献[1]にある。

8-4. VSSの設計I (未知ダイナミックスの処理)

ここでは、多入力VSSの設計を未知ダイナミックスの処理として位置付ける。多くの非線形対象を取り扱う場合、全く何も分からないという場合は希であり、かなりの部分が事前情報として既知である。あるいはコストの都合上、未知ダイナミックスとして処理しなければならない部分が生じると言った具合である。

この未知ダイナミックスを *Sliding Mode* によって打ち消す (外乱抑圧) のが目的である。

8-4-1. 制御系

8-2節で定式化した多入力系VSSの表現を再記する。

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)(u + \eta) \quad (8-42)$$

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{if } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{if } s_i(x) < 0 \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (8-43)$$

$s = (s_1, s_2, \dots, s_m)^t$: s_i 切り換え超平面

$u_i \in U$ U : 有界閉集合 $U = \{u \in R^m : \|u\| \leq \delta, \delta > 0\}$

$\eta \in V$ $V = \{\eta \in R^m : \|\eta\| \leq \rho(x, t), 0 < \rho\}$

$x \in R^n$ $u \in R^m$ ($n \geq m$)

$\text{rank}[B(x, t)] = m \quad \forall (x, t) \in D$

$D = \{(x, t) : \forall i s_i(x) \neq 0 \quad i=(1, 2, \dots, m)\}$

8-4-2. 既知ダイナミクスに対する安定性

(8-42)の既知ダイナミクス $f(x, t)$ に関する安定性を考える。制御入力 u を (8-43) ではなく

$$u = u_0 + \Delta u \quad (8-44)$$

とおく。 u_0 は既知ダイナミクス $f(x, t)$ に関するフィードバック項で、 Δu は未知ダイナミクスに対する *Sliding Mode* 制御入力とする。このとき、(8-42) は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x, t) + B(x, t)(\Delta + \eta) \\ \text{但し、} f_0(x, t) &= f(x, t) + B(x, t)u_0 \end{aligned} \quad (8-45)$$

と表される。 f_0 を安定化する u_0 の構成は、一般の $f(x, t)$ に対しては導出不可能であるから、ここでは次の安定性原理を導入して正定値行列 P を得る。

[定理5 : 安定性原理]

$\dot{x} = f_0(x, t)$ で $f_0(0, t) = 0 (\forall t \geq 0)$ 及びヤコビアン $f_{0x} = \partial f_0 / \partial x$ が連続であるとする。

$$M(y,t) := Pf_{0x}(y,t) + f_{0x}^t(y,t)P \quad (8-46)$$

で定義される $M(y,t)$ の最大固有値を $\mu(y,t)$ とするとき、

$$\mu(y,t) \leq -\mu < 0 \quad \text{for } (y,t) \in R^n \times R_+^1, \mu > 0 \quad (8-47)$$

なる正定値行列 $P (\in R^{n \times n})$ が存在するなら $f_0(x,t)$ の零解は大域的に漸近安定である。■

[証明] リアプノフ関数を

$$v(x) = x^t P x \quad (8-48)$$

とおく。 P を正定値行列とすると、

$$\lambda_{\min}[P]x^t x \leq v(x) \leq \lambda_{\max}[P]x^t x \quad (8-49)$$

$\lambda_{\min}[P]$: P の固有値の最小のもの

$\lambda_{\max}[P]$: P の固有値の最大のもの

が得られる。次に v を時間微分する。

$$\dot{v} = \dot{x}^t P x + x^t P \dot{x} = f_0^t P x + x^t P f_0 \quad (8-50)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} f_0(\delta x, t) &= \frac{\partial f_0}{\partial \delta x} \cdot \frac{\partial \delta x}{d\delta} \\ &= f_{0x}(\delta x, t)x \end{aligned} \quad (8-51)$$

の恒等式を利用して

$$f_0(x,t) = \int_0^1 f_{0x}(\delta x, t) d\delta \cdot x \quad [0 \leq \delta \leq 1, f_0(0,t) = 0] \quad (8-52)$$

を得る。この関係を用いて

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= x^t \left[\left(\int_0^1 f_{0x}(\delta x, t) d\delta \right)^t P + P \int_0^1 f_{0x}(\delta x, t) d\delta \right] x \\
 &= x^t \int_0^1 M(\delta x, t) d\delta x \\
 &= \int_0^1 x^t M(\delta x, t) x d\delta
 \end{aligned} \tag{8-53}$$

定理の条件から

$$\dot{v} = \int_0^1 x^t M(\delta x, t) x d\delta \leq \int_0^1 \mu(\delta x, t) x^t x d\delta < - \int_0^1 \mu \|x\|^2 d\delta = -\mu \|x\|^2 \tag{8-54}$$

である。(8-49)(8-54)はリアプノフの定理を満足し零解は大域的に漸近安定となる。■

8-4-3. 未知ダイナミクスに対する *Sliding Mode*

既知ダイナミクスを安定化する正定値行列 P が得られたとする。未知ダイナミクス η を処理するのが *Sliding Mode* の働きである。リアプノフ関数を

$$v_s(x) = x^t P x \tag{8-55}$$

とおく。(8-45)の解に沿って時間微分を行う。

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_s &= \frac{\partial v_s}{\partial x} (f_0(x, t) + B(x, t)(\Delta u + \eta)) \\
 &= \dot{v} + 2x_t^t P B(x, t)(\Delta u + \eta)
 \end{aligned} \tag{8-56}$$

(8-56)の第2項が

$$x^t P B(x,t)(\Delta u + \eta) \leq 0 \quad (8-57)$$

であれば、 $\dot{v}_s \leq \dot{v} \leq -\mu \|x\|^2$ となる。このとき (8-45) は大域的一様漸近安定となる。

[定理 6 : Sliding Mode 制御則]

[仮定 1] [仮定 2] が成立しているとする。(8-45)の自由系 $\dot{x} = f_0(x,t)$ に対して、定理 1 から正定値行列 P が得られているとする。

Δu を次のように選ぶと (8-45) の零解は大域一様漸近安定となる。

$$\Delta u = \begin{cases} -\rho(x,t) \text{sign}(B^t(x,t)Px) & \text{if } (x,t) \in N \\ \Delta u & \text{if } (x,t) \in N^c \end{cases}$$

$$N = \{ (x,t) \mid B^t(x,t)Px = 0 \} \quad (8-58)$$

■

[証明]

$(x,t) \in N$ のとき $\text{sign}(B^t Px) = B^t Px / \|B^t Px\|$ を用いて

$$\begin{aligned} x^t P B(x,t)(\Delta u + \eta) &= -\rho(x,t) \|B^t Px\| + x^t P B \eta \\ &\leq -\rho(x,t) \|B^t Px\| + \|x^t P B\| \|\eta\| \\ &\leq \|B^t Px\| \{-\rho(x,t) + \rho(x,t)\} = 0 \end{aligned} \quad (8-59)$$

$(x,t) \in N$ のとき

$x^t P B(x,t)(\Delta u + \eta) = 0$ であるから、 Δu はコントローラに許される有界な任意の値を取れる。

以上より (8-58) で示される制御則によって (8-57) が満足されるので、(8-45) の零解は大域的一様漸近安定になる。■

8-4-4. Practical 安定

現実の制御系では、(8-58) の様に切り換えを行うのは困難である。データプロセッシングあるいはセンサ分解能等によって、実際の制御則は、

$$\Delta u = \begin{cases} -\rho(x,t)\text{sign}(B^t(x,t)Px) & \text{if } (x,t) \notin N_\varepsilon \\ \Delta u & \text{if } (x,t) \in N_\varepsilon \end{cases}$$

$$N_\varepsilon = \{ (x,t) \mid \|B^t(x,t)Px\| \leq \varepsilon \} \quad (8-60)$$

となる。 $\|\Delta u\| \leq \rho(x,t)$ [if $(x,t) \in N_\varepsilon$] は Δu_i が $+\rho(x,t)$ と $-\rho(x,t)$ の2値の切り換えであるため、切り換えの瞬間に相当する $(x,t) \in N_\varepsilon$ では $+\rho$ と $-\rho$ の間の任意の値を取るものとする。このとき制御系が *Practical* 安定であることを示す。

[定義6 : *Practical* 安定]

$$\dot{x} = f(x,t) \quad [f(0,t) = 0 \quad t \geq 0] \quad (8-61)$$

であるとき、(8-61)の振動系

$$\dot{x} = f(x,t) + P(x,t) \quad t \geq 0 \quad (8-62)$$

に於て、数 δ と2つの集合 Q と Q_0 を考える。 Q は原点を含む閉かつ有界な集合、そして Q_0 は Q の部分集合である。 $x^*(t, x^0, t_0)$ は $x^*(t_0, x^0, t_0) = x^0$ を満たす (8-62) の解とする。 P は全ての $t \geq 0$ と全ての x に対し $\|p(x,t)\| \leq \delta$ を満たす全ての振動 p の集合とする。 P の各 p 、 Q_0 の各 x_0 、そして各 $t_0 \geq 0$ に対して全ての $t \geq 0$ について $x^*(t, x^0, t_0)$ が Q に入るならば、原点は *Practical* 安定であるという。最初に Q_0 の中から出発する解はその後ずっと Q の中に留まる (図8-8)。 ■

[定理7 : *Sliding Mode* の *Practical* 安定性]

次のシステム

$$\dot{x} = f_0(x,t) + B(x,t)(\Delta + \eta)$$

但し、 $f_0(x,t) = f(x,t) + B(x,t)u_0$

$$(8-63)$$

$$\Delta u = \begin{cases} -\rho(x,t)\text{sign}(B^t(x,t)Px) & \text{if } (x,t) \notin N_\varepsilon \\ \Delta u & \text{if } (x,t) \in N_\varepsilon \end{cases}$$

$$N_\varepsilon = \{ (x,t) \mid \|B^t(x,t)Px\| \leq \varepsilon \}$$
(8-64)

は Practical 安定である。■

[証明]

$(x,t) \notin N_\varepsilon$ では $v_s = x^t Px$ に対して、

$$\dot{v} < 0$$

である。

$(x,t) \in N_\varepsilon$ では、

$$\begin{aligned} x^t PB(x,t)(\Delta + \eta) &\leq \|x^t PB\| (\|\Delta u\| + \|\eta\|) \\ &\leq \varepsilon \cdot 2\rho \end{aligned}$$
(8-65)

であるから、

$$\begin{aligned} \dot{v}_s &= \dot{v} + 2x^t PB(x,t)(\Delta u + \eta) \\ &\leq \dot{v} + 2\varepsilon \cdot 2\rho \\ &\leq -\mu \|x\|^2 + 4\varepsilon\rho \end{aligned}$$
(8-66)

となる。 $\dot{v}_s \geq 0$ になる範囲は、最悪のケースで

$$\|x\|^2 \leq \frac{4\varepsilon\rho}{\mu}$$
(8-67)

である。即ち最悪のケースでは、解は $\|x\|^2 \leq 4\varepsilon\rho/\mu$ の領域に存在し得ない。従って

$$Q_0 = \{ x \mid \|x\|^2 \leq \frac{4\varepsilon\rho}{\mu} \}$$
(8-68)

とおく。これ以外の点では必ず $\dot{v}_s < 0$ になるから

$$Q = \{ x \mid x^t P x \leq v_{smax} \mid v_{smax} = \max_{x \in Q_0} [x^t P x] \} \quad (8-69)$$

とすると、(8-45)(8-60)のシステムは *Practical* 安定である。■

8-5. VSS の設計 II

前節では、既知ダイナミクスを安定化する正定値行列 P を用いて切り換え面を構成した。これに対して、本節ではその様な正定値行列 P を求めることなく制御系を安定させることを考える。

8-5-1. 設計の手順

Sliding Mode が生じると、制御対象は *Sliding Manifold* $s=0$ に拘束される。理想的な *Sliding Mode* であれば $\dot{s}=0$ も同時に満足するので

$$\begin{aligned} \dot{s} = G \dot{x} = Gf + GB(u_{eq} + \eta) &= 0 \\ (G = \partial s / \partial x) \end{aligned} \quad (8-70)$$

から、等価制御入力 u_{eq} を求めて

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [I - B(GB)^{-1}G]f \\ (\det(GB) &\neq 0) \end{aligned} \quad (8-71)$$

を得る。 $\text{rank}[I - B(GB)^{-1}G] = n - m$ である。*Sliding Mode* にある VSS は低次元化された(8-69)と *Sliding Manifold* $s=0$ で記述される。

以上から、VSS の設計は

- (I) $\dot{x} = [I - B(GB)^{-1}G]f$ の設計 (極配置等)
 - G の設計
- (II) $s=0$ の安定性の確保
 - u の設定

の2つの Step に分かれる。多くのメカニカルシステムでは、 $m=n$ なので (II) だけとなる。このときは、エラーに対して原点の安定性を確保する問題に

帰着する。注目すべき応用は $n > m$ で $s(0)=0$ を安定点としない拘束運動の場合で、出力零化問題になる。

曖昧さ η は (II) の安定性を得る段階で打ち消され (I) へは影響を及ぼさない。Sliding Mode にある状態はロバストである。(I) の設計は (II) の $s=0$ から $x_2 = \varphi(x_1)$ ($x_1 \in R^{n-m}, x_2 \in R^m$) なる関係を用いて $\dot{x}_1 = h(x_1, t)$ の $n-m$ 次元の方程式を G によって設計する。

Sliding Mode

1 入力系 VSS であれば、 $s_i(x)=0$ 即ち切り換え超平面が 1 つなので、Sliding Mode は全ての軌跡がひとつの超平面に集中する現象として考えられる (図 8-8)。これに対して多入力系 VSS での Sliding Mode は次の 3 つの場合が考えられる。

① 各超平面 $s_i=0$ ($i=1, \dots, m$) で Sliding Mode 存在条件

$$\lim_{s_i \rightarrow 0} s_i \dot{s}_i < 0 \quad (8-72)$$

を満足する (図 8-9 (a))。

② $s=0$ に収束することに注目して、Sliding Mode 存在条件

$$\frac{d}{dt} s^t s < -\gamma (\|s\|) \quad (8-73)$$

$\gamma(0)=0$ $\gamma(\cdot)$: 狭義単調増加関数

を満足する (図 8-9 (b))。

③ ②をさらに一般化する

$$\frac{d}{dt} s^t R s < -\gamma (\|s\|) \quad R > 0 \quad (8-74)$$

例えば

$$R = \text{diag} \left[\frac{1}{|s_1|}, \dots, \frac{1}{|s_m|} \right]$$

($s_i=0$ の点は除く)

とおくと (図 8-9 (c)) の場合を得ることができる。

上記の(8-72)(8-73)(8-74)は十分条件である。①は多入力系を 1 入力系へ分解する

ことに相当する。また、①は②の特別な場合である。③はより一般的であるが実用的ではない。従って、本報告では①と②を多入力系 *Sliding Mode* として扱う。なお、②③は”リアブノフの直接法”による。

8-5-2. 多入力系 VSS の設計

(8-42)式のフリーシステムが漸近安定で、 η を打ち消すのに *Sliding Mode* を用いる場合に関しては報告を行なった。本報告では設計手順 (I) による切り換え面 s の設計が加わる。[$I-B(GB)^{-1}G$] は R^n から R^{n-m} ($s \in R^m$ の直交補空間) への写像である。この点に注目して設計を行なう。線形時不変システムでは

$$TB = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \end{bmatrix} \quad \text{rank}[\bar{B}] = m \quad \bar{B} \in R^{m \times m} \quad (8-75)$$

の座標変換行列 T を用いてシステムを分割して極配置・LQ等の手法で G の設計を行なうことになる(例題参照)。(8-42)式のシステムでは一般論が扱えないので、ここでは、 G が決められたとして設計手順 (II) の $s=0 \quad \dot{s}=0$ を得るための制御入力を設計する。(8-42)(8-43)より

$$\dot{s} = G \dot{z} = Gf + GB(u + \eta) \quad (8-76)$$

を得る。*Sliding Mode* 存在条件としては実用的な(8-73)式を考える。制御入力を

$$u = -u_f + \Delta u \quad (8-77)$$

とする。 Gf を未知ダイナミックスとして扱うこともできるが、推定可能なものはできるだけ取り除くのがあいまいさに対する基本的な方針なので、 $-u_f$ で取り除くことにする。(8-76)は

$$\begin{aligned} \dot{s} &= r + GB(\Delta u + \eta) \\ r &= G(f - Bu_f) \quad \|r\| \leq r \end{aligned} \quad (8-78)$$

になる。未知ダイナミックス r に対してはノルムの上限が押さえられているものとする。 Δu は不連続入力である。現実に使われる入力はスイッチング素子

等が考えられるので

$$\Delta u = -\rho M \text{sign}(s) \quad (8-79)$$

$$\begin{cases} \rho: \text{正数} \\ \text{sign}(s) = (\text{sign}(s_1), \dots, \text{sign}(s_m))^t \end{cases}$$

とおく。 M は入力をプラントへ加える際の変換行列である。 $\text{sign}(s)$ は $s=0$ では定義されないので Δu は

$$(x, t) \in \{ (R^n - N) \times R_+^1 \} \quad N = \{ x \in R^n : s(x) = 0 \} \quad (8-80)$$

で定義されることとする。(8-79)を更に

$$\Delta u = -\rho M \Gamma \frac{s}{\|s\|} \quad (8-81)$$

$$\text{但し、 } \Gamma = \text{diag} \left[\frac{\|s\|}{|s_1|}, \dots, \frac{\|s\|}{|s_m|} \right]$$

と記述する。このとき

$$\frac{d}{dt} s^t s = 2s^t \left[r + (GB)\eta \right] - \frac{\rho}{\|s\|} s^t \{ (GB)M\Gamma + \Gamma^t M^t (GB)^t \} s \quad (8-82)$$

である。 $\{ \}$ 内が正定値行列であれば *Sliding Mode* 存在条件(8-73)式を満足させることが可能である。 M の取り方には任意性があるが次の2つが有用である。

$$\textcircled{1} \quad M = (GB)^{-1}$$

$$\textcircled{2} \quad M = (GB)^t$$

①の場合：(8-82)は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s^t s &= 2s^t \left[r + (GB)\eta \right] - \frac{2\rho}{\|s\|} s^t \Gamma s \\ &\leq 2\|s\| \{ \|r + (GB)\eta\| - \rho \lambda_{\min}[\Gamma] \} \end{aligned} \quad (8-83)$$

未知ダイナミクスに対して

$$\begin{aligned} \|\tau+(GB)\eta\| &\leq \|\tau\| + \|(GB)\eta\| \\ &\leq r + \|GB\|\eta \end{aligned} \quad (8-84)$$

であるから

$$\rho > \frac{r + \|GB\|\eta}{\lambda_{\min}[\Gamma]} \quad (8-85)$$

であれば *Sliding Mode* 存在条件(8-73)を満足する。

②の場合： $(GB)^{-1}$ を計算するのは通常時間がかかるので $(GB)^t$ を用いるのが現実的である。(8-82)は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}s^t s = s^t [\tau+(GB)\eta] - \frac{\rho}{\|s\|} s^t s \\ \text{但し、} P = \{(GB)(GB)^t \Gamma + \Gamma^t (GB)(GB)^t\} \end{aligned} \quad (8-86)$$

となり、 P が正定値であるかどうかをチェックすればよい。

ここで、②に関する定理を示す。

[定理7：スイッチングによる安定化]

$\Delta u = -\rho M \text{sign}(s)$ で、

$$M = (GB)^t \Lambda \quad \Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_m] \quad (\lambda_i > 0) \quad (8-87)$$

としたとき、

$$\rho > \frac{\|\Lambda[\tau+(GB)\eta]\|}{\sqrt{m} \lambda_{\min}[\Gamma(GB)(GB)^t \Gamma]} \quad (8-88)$$

ならば、 $s=0$ になる。(Γ は入力間の比を表す) ■

[証明] テスト関数を次のようにおく。

$$\begin{aligned}
v &= s^t \Gamma \text{sign}(s) \\
&= \sum_{i=1}^m \Gamma_i |s_i|
\end{aligned}
\tag{8-89}$$

時間微分を行う。 $s \neq 0$ で $(d/dt)\text{sign}(s)=0$ と $[\Gamma(GB)(GB)^t \Gamma]$ が正定であることを用いて、

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= \dot{s}^t \Gamma \text{sign}(s) + s^t \Gamma \frac{d}{dt} \text{sign}(s) \\
&= \dot{s}^t \Gamma \text{sign}(s) \\
&= (\text{sign}(s))^t \Gamma [(\tau + GB \eta) + GB \Delta u] \\
&= (\text{sign}(s))^t \Gamma [(\tau + GB \eta) - \rho (GB)(GB)^t \Gamma \text{sign}(s)] \\
&= (\text{sign}(s))^t \Gamma (\tau + GB \eta) - \rho (\text{sign}(s))^t \Gamma (GB)(GB)^t \Gamma \text{sign}(s) \\
&\leq \| \text{sign}(s) \| \| \Gamma (\tau + GB \eta) \| - \rho \lambda_{\min} [\Gamma (GB)(GB)^t \Gamma] \| \text{sign}(s) \|^2
\end{aligned}
\tag{8-90}$$

を得る。ここで、 $\| \text{sign}(s) \| = \sqrt{m}$ であるから、

$$\rho > \frac{\| \Gamma [\tau + (GB) \eta] \|}{\sqrt{m} \lambda_{\min} [\Gamma (GB)(GB)^t \Gamma]}
\tag{8-91}$$

であれば、

$$v \dot{v} < -\rho |v| \quad (\rho > 0)
\tag{8-92}$$

となり、 $s=0$ になる。■

8-5-3. 例題

[1] 線形時不変系の設計を示す。

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu & x \in R^n, u \in R^m \\
s &= cx & (c \text{ は設計者が選ぶ})
\end{aligned}
\tag{8-93}$$

Step 1. [低次元化した式から c を定める]

$$TB = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \end{bmatrix} \quad |B| \neq 0 \quad \bar{B} \in R^{m \times m} \quad (8-94)$$

の座標変換行列 $T (z=Tx)$ を求める。この変換によって

$$\begin{aligned} \dot{z} &= TAT^{-1} + TBU \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \end{bmatrix} u \quad z_1 \in R^{n-m}, z_2 \in R^m \end{aligned} \quad (8-95)$$

を得る。これは、*Sliding Mode* が生じていれば

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A_{11}z_1 + A_{12}z_2 \\ s &= cT^{-1}z = c_1z_1 + c_2z_2 = 0 \quad (cT^{-1} = [c_1 \ c_2]) \end{aligned} \quad (8-96)$$

$s=0$ から $z_2 = -c_2^{-1}c_1z_1$ を得ると、低次元化した式は

$$\dot{z} = [A_{11} - A_{12}c_2^{-1}c_1]z_1 \quad (8-97)$$

となる。この式に極配置・LQ制御等を用いて c を定める。

Step 2. [$s=0$ の保証]

Step 1 で定められた c に対して $s=0$ を得るための制御入力 u を求める。本報告で示した

$$u = -\rho (CB)^t \text{sign}(s) \quad (8-98)$$

を用いて $s=0$ を保証する。

・数値例

$n=3$ $m=2$ として (8-91) の系を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (8-99)$$

とする。

Step 1. 座標変換行列を

$$T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (8-100)$$

と求める。制御系は

$$\dot{z} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -23 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (8-101)$$

$$s = [c_1 \ I_2] [z_1 \ z_2 \ z_3]^t \quad (c_2 = I_2 \text{とおく})$$

と変換される。これから低次元化された式は

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{5} [3 - (-23, -1)c_1] z_1 \quad (8-102)$$

と得られる。 $\dot{z}_1 = z_1$ と設計すると、ひとつの解として

$$c_1 = [0 \ 2]^t$$

が求まる。 $c = [c_1 \ I_2]T$ の関係を用いて

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad (8-103)$$

と定められる。

Step 2. 制御入力を

$$u = -\rho (CB)^t \text{sign}(s) = -\rho \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sign}(s_1) \\ \text{sign}(s_2) \end{bmatrix} \quad (8-104)$$

とする。とする。(8-86)の P は

$$P = \|s\| \begin{bmatrix} \frac{10}{|s_1|} & 0 \\ 0 & \frac{10}{|s_2|} \end{bmatrix} \quad (8-105)$$

であるから、

$$\begin{aligned} s_1 > s_2 &\rightarrow \lambda_{\min}[P] = 10 \\ s_2 > s_1 &\rightarrow \lambda_{\min}[P] = 10 \\ s_1 = s_2 &\rightarrow \lambda_{\min}[P] = 10\sqrt{2} \end{aligned} \quad (8-106)$$

を得る。これから

$$\inf[\lambda_{\min}] = 10 \quad (8-107)$$

となる。また、 $x_1, x_2, x_3 < \alpha$ において

$$\|cAx\| < \sqrt{260}\alpha \quad (8-108)$$

である。よって

$$\rho > 3.22\alpha \quad (8-109)$$

であれば良い。 $\rho = 100$ としたときの制御系の挙動を図8-10に示す。

[2] *Sliding Mode* の項で㊸番目のタイプ [(8-74)式] を示す。

[1]と同じ制御系で、制御入力を

$$u = \rho \operatorname{sign}(s)$$

(8-110)

とおいたときの挙動を図 8-11 に示す ($\rho = 100$)。

8-6. 線形系 VSS の性質

線形系に於ける VSS は線形作用素として優れた性質を持つ。この節ではロバスト性に限ってその優れた性質を示す。

8-6-1. 出力零化

Sliding Mode が生じると状態は $s(x)=0$ に拘束されいわゆる出力零化 (zeroing) 問題を解いたことになる。考える対象を次に示す線形時不変系とする。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (8-111)$$

また、切り換え面を

$$s = Cz = 0 \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (8-112)$$

とする。これから等価制御入力 u_{eq} を求める。 $|CB| \neq 0$ であれば

$$\dot{s} = C \dot{x} = CAx + CBu_{eq} = 0 \quad (8-113)$$

を解いて等価制御入力を

$$u_{eq} = -(CB)^{-1} CAx \quad (8-114)$$

と得る。このとき元の系(8-111)は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - B(CB)^{-1} CAx \\ &= [I - B(CB)^{-1} C] Ax \end{aligned} \quad (8-115)$$

に低次元化されている。このときの s を考える。

(8-115)をラプラス変換して

$$\{ pI - [I - B(CB)^{-1}CA] \} x(p) = x(+0) \quad p: \text{微分演算子} \quad (8-116)$$

から

$$\begin{aligned} x(p) &= \{ pI - [I - B(CB)^{-1}CA] \}^{-1} x(+0) \\ &= \left\{ \frac{I}{p} + \frac{[I - B(CB)^{-1}CA]}{p^2} + \frac{\{[I - B(CB)^{-1}CA]\}^2}{p^3} + \dots \right\} x(+0) \end{aligned} \quad (8-117)$$

を得る。これから(8-112)のラプラス変換は

$$\begin{aligned} s(p) = Cx(p) &= C \left\{ \frac{I}{p} + \frac{[I - B(CB)^{-1}CA]}{p^2} + \frac{\{[I - B(CB)^{-1}CA]\}^2}{p^3} + \dots \right\} x(+0) \\ &= \frac{C}{p} x(+0) \end{aligned} \quad (8-118)$$

となる。これは、 $C[I - B(CB)^{-1}CA] = 0$ から導ける。時間領域で考えると

$$s(t) = Cx(+0) \quad (8-119)$$

であり、 $Cx(+0) \in N(C)$ なら $s(t) = 0 (\forall t > 0)$ になる。言い換えると、*Sliding Mode* が生じている時、システム(8-111)の不可観測空間(零空間)が

$$N(C) = \{ x \mid Cx = 0 \} \quad (8-120)$$

になっている。このときの零空間の次元は

$$\dim N(C) = \dim v - \dim R(A) = n - m \quad v: \text{全空間} \quad (8-121)$$

である。これから分かるように、VSSは等価制御入力によって極零相殺を行っているといえる。

8-6-2. 線形作用素としてのVSS

この節では、 $[I-B(CB)^{-1}C]$ を線形作用素として考察を行う。最初に、 $B(CB)^{-1}C$ が射影行列であることを示す。

[補題1： $B(CB)^{-1}C$ の性質]

$B(CB)^{-1}C$ は $N(C)$ に沿った $R(B)$ への射影行列である。■

[証明] $B(CB)^{-1}C$ は

$$[B(CB)^{-1}C]^2 = B(CB)^{-1}C \quad (8-122)$$

を満たすから、 $N(B(CB)^{-1}C)$ に沿った $R(B(CB)^{-1}C)$ への射影行列である。

次に、 $N(B(CB)^{-1}C) = N(C)$ を示す。 $x \in N(C)$ なら $x \in N(B(CB)^{-1}C)$ であるから $N(C) \subset N(B(CB)^{-1}C)$ となる。逆に、 $x \in N(B(CB)^{-1}C)$ なら $x \in N(C)$ であるから $N(B(CB)^{-1}C) \subset N(C)$ となる。これは、 $B(CB)^{-1}C$ に左から C をかけ $Cx=0$ からわかる。以上から $N(B(CB)^{-1}C) = N(C)$ がいえる(注意1)。

続いて、 $R(B) = R(B(CB)^{-1}C)$ を示す。 $R(B) \supset R(B(CB)^{-1}C)$ は明かである。逆に、 $y = Bx (y \in R(B))$ としたとき $z = Bx$ を考えると、 $y = B(CB)^{-1}Cz = Bx$ より $R(B) \subset R(B(CB)^{-1}C)$ である。以上より、 $R(B) = R(B(CB)^{-1}C)$ がいえる(注意2)。

これで補題は証明された。■

次に、 $[I-B(CB)^{-1}C]$ が射影行列であることを示す。

[補題2： $[I-B(CB)^{-1}C]$ の性質]

$[I-B(CB)^{-1}C]$ は $R(B)$ に沿った $N(C)$ への射影行列である。■

[証明]

$$[I-B(CB)^{-1}C]^2 = I-B(CB)^{-1}C \quad (8-123)$$

であるから、 $[I-B(CB)^{-1}C]$ は $N([I-B(CB)^{-1}C])$ に沿った $R([I-B(CB)^{-1}C])$ への射影行列である。

次に、 $N([I-B(CB)^{-1}C]) = R(B)$ を示す。 $[I-B(CB)^{-1}C]x=0$ から $x = B(CB)^{-1}Cx$ がいえるので、

$$N([I-B(CB)^{-1}C])=R(B(CB)^{-1}C)$$

(8-124)

となる。補題 2 の証明から、 $R([B(CB)^{-1}C])=R(B)$ であるから $N([I-B(CB)^{-1}C])=R(B)$ がいえる。

続いて、 $R([I-B(CB)^{-1}C])=N(C)$ を示す。 $R([I-B(CB)^{-1}C])=N(B(CB)^{-1}C)$ である (注意 3)。これと補題 1 の証明にある $N(B(CB)^{-1}C)=N(C)$ を用いて $R([I-B(CB)^{-1}C])=N(C)$ がいえる。

以上から $[I-B(CB)^{-1}C]$ は $R(B)$ に沿った $N(C)$ への射影行列である。■
(注意 1) 一般的には、 $N(KC)=N(C)$ は K の左逆行列 K_L^{-1} が存在すれば、

$$Cx=0 \rightarrow KCx=0 \text{ より } N(C) \subset N(KC)$$

$$KCx=0 \rightarrow K_L^{-1}KCx=0 \rightarrow Cx=0 \text{ より } N(C) \supset N(KC)$$

からいえる。

(注意 2) $R(BK)=R(B)$ は K の左逆行列 K_L^{-1} が存在すれば次のように示される。

$$y=BKz \rightarrow y=Bx(x=Kz) \text{ から } R(BK) \subset R(B)$$

$$y=Bx \rightarrow z=K_L^{-1}x \text{ とおけば } x=Kz \text{ から } y=BKz \text{ 即ち } R(B) \subset R(BK)$$

よって、 $R(BK)=R(B)$ がいえる。

(注意 3) $N(P)=R(I_n-P)$ の証明

$$Px=0 \rightarrow x=(I_n-P)x \rightarrow N(P) \subset R(I_n-P)$$

$$P(I_n-P)=0 \rightarrow R(I_n-P) \subset N(P)$$

よって、 $N(P)=R(I_n-P)$ がいえる。

8-6-3. ロバスト性

前節で示した VSS の射影行列の性質を用いてロバスト性を示す。

[定理 8 : VSS のロバスト性]

$$\dot{x}=Ax+Bu+Df$$

(8-125)

$$s=CX \quad (8-126)$$

のシステムで *Sliding Mode* が生じていれば次の条件のもとで外乱 f の影響は押さえられる。

$$\text{col}(D) \in R(B(CB)^{-1}C) \quad (8-127)$$

$$\text{col}(D) \in R(B(CB)^g C) \quad |CB| = 0 \text{ のとき}$$

g : *generalized inverse matrix* (8-128)

■

[証明] *Sliding Mode* が生じているとき等価制御入力法を用いるとシステムは $|CB| \neq 0$ であれば、

$$\dot{z} = [I - B(CB)^{-1}C]Ax + [I - B(CB)^{-1}C]Df \quad (8-129)$$

となる。もし、

$$\text{col}(D) \in R(B(CB)^{-1}C) \quad (8-130)$$

ならば、 $R(B(CB)^{-1}C) = R(B)$ から $\text{col}(D) \in R(B)$ である。 $I - B(CB)^{-1}C$ を考えると $\text{col}(D)$ は $N(C)$ へ射影される。即ち、

$$[I - B(CB)^{-1}C]D = 0 \quad (8-131)$$

である。外乱 f の影響は押さえられる。

次に、 $|CB| = 0$ の場合を考える。

$$\dot{s} = CAx + CBu_{eq} + CDf = 0 \quad (8-132)$$

から CB の左一般化逆行列を $(CB)^g$ とすると

$$u_{eq} = -(CB)^g CAx - (CB)^g CDf \quad (8-134)$$

が得られる。元のシステム (8-125) に代入して

$$\dot{x}=[I-B(CB)^gC]Ax+[I-B(CB)^gC]Df \quad (8-135)$$

を得る。もし、

$$\text{col}(D) \in R(B(CB)^gC) \quad (8-136)$$

ならば先ほどと同様にして

$$[I-B(CB)^gC]D=0 \quad (8-137)$$

となる。■ 8-7. おわりに

VSSの多入力系への適用の際の *Sliding Mode* 設計を示した。*Sliding Mode* を $s=0$ の *Sliding Manifold* への収束としてスイッチング入力を用いて制御系を構成した。本手法は電気エネルギーのようにスイッチングに基づくエネルギー変換を伴う制御系に有効である。

参考文献

- [1]V.I.Utkin ; *Sliding modes and their application in variable structure systems* ; Moscow, Mir, 1978.
- [2]V.I.Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Modes," *IEEE Trans. on AC*, Vol. AC-22, pp. 212-222 , 1977.
- [3]V.I.Utkin, "Variable Structure Systems, Present and Future," *Automat. and Remote Control*, 3, 5. 1983.
- [4]原島・橋本, "Sliding Modeとその応用-I," システムと制御、Vol.29, No.2 pp. 94-103 , 1985. [5]原島・橋本, "Sliding Modeとその応用-II," システムと制御、Vol.29, No.4 pp. 242-250 , 1985. [6]原島・橋本, "Sliding Modeによる制御系設計" 第14回制御理論シンポジウム資料 pp.55-58 , 1985.
- [7]V.I.Utkin and K.D.Young, "Methods for Construction for Discontinuity Planes in Multidimensional Variable Structure Systems," *Automat. and Remote Control*, Vol.26, pp.1466-1470 , 1980.

[8] J. Ackermann (Edited); *Uncertainty and Control; Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol.70, Springer-Verlag, 1985.*

[9] 児玉・須田：システム制御のためのマトリクス理論：計測自動制御学会、1978.

付録 A

入力に関して非線形な場合

(I) 一入力系の場合

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t, u) \\ u(x, t) &= \begin{cases} u^+(x, t) & \text{if } s(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{if } s(x) < 0 \end{cases} \\ x, f &\in R^n \quad u \in R \end{aligned} \tag{A-1}$$

に対して、次の2つの表現が可能である。

①

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f^+ + u^*(f^- - f^+) \\ u^* &= \begin{cases} 0 & \text{if } s(x) > 0 \\ 1 & \text{if } s(x) < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{A-2}$$

②

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f^0(x, t) + b(x, t)u^* \\ u^* &= \begin{cases} u^{*+}(x, t) & \text{if } s(x) > 0 \\ u^{*-}(x, t) & \text{if } s(x) < 0 \end{cases} \\ f^0 &= \frac{f(x, t, u^-)u^{*+} - f(x, t, u^+)u^{*-}}{u^{*+} - u^{*-}} \\ b &= \frac{f(x, t, u^+) - f(x, t, u^-)}{u^{*+} - u^{*-}} \end{aligned} \tag{A-3}$$

以上の表現を用いれば入力に関して線形な系と同様に論ずることが出来る。

(II) 多入力系の場合

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t, u) \\ u_i(x, t) &= \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{if } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{if } s_i(x) < 0 \end{cases} \quad (i=1, \dots, m) \\ x, f &\in R^n \quad u \in R^m \end{aligned} \tag{A-4}$$

の時、次の条件

$$\begin{aligned} f(x, t, u) &= \sum_{i=1}^m f^i(x, t, u_i) \\ (\leftrightarrow) \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \tag{A-5}$$

を満足すれば

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f^+ + F u^* \\ u_i^* &= \begin{cases} 0 & \text{if } s_i > 0 \\ 1 & \text{if } s_i < 0 \end{cases} \\ F &= | f^1(x, t, u_1^-) - f^1(x, t, u_1^+), \dots, f^m(x, t, u_m^-) - f^m(x, t, u_m^+) | \\ f^+ &= \sum_{i=1}^m f^i(x, t, u_i^+) \end{aligned} \tag{A-6}$$

となり入力に関して線形な系と見なせる。

付録 B

カラテオドリ型の微分方程式[?]

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{B-1}$$

に於て、右辺が連続関数でないときを考える。次の条件を満足するものをカラテオドリ型微分方程式という。

定義域：閉集合 $D \subset (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^n$

- (a) t を止めると、 $f(t, x)$ は x の関数と考えて連続；
- (b) x を止めると、 $f(t, x)$ は t の関数と考えて、(ルベーグ) 可測；
- (c) D の任意なコンパクト部分集合 K に対して可積分関数 $M_K(t)$ が存在して、

$$\|f(t, x)\| \leq M_K(t) \quad ((t, x) \in K). \quad (B-2)$$

付録 C

Matching Condition に関して

[定理 C-1]

連立1次方程式

$$Ax=b \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{R}^m \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (C-1)$$

が解を持つ必要十分条件は

$$\text{rank}[A|b] = \text{rank}[A] \quad (C-2)$$

である。■

[証明]

A の列ベクトルを $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 、 x を (x_1, x_2, \dots, x_n) とすると、

$$Ax = \sum_{i=1}^n x_i a_i \quad (j=1, \dots, n) \quad (C-3)$$

である。 $Ax=b$ を満足する解 x が存在すれば b は $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に一次従属になる。従って、

$$\begin{aligned} \text{rank}[A] &= \text{rank}[\{a_1, a_2, \dots, a_n\}] \\ &= \text{rank}[\{a_1, a_2, \dots, a_n, b\}] \\ &= \text{rank}[A|b] \end{aligned} \quad (C-4)$$

A_m : フルビッツ行列 (安定行列)

このとき、次に与えられる入力

$$u_p = -K_p x_p + K_m x_m + K_u u_m \quad (C-10)$$

によって、モデルフォローイングが可能であるための十分条件は

$$(I - B_p B_p^+) (A_m - A_p) = 0 \quad (C-11)$$

$$(I - B_p B_p^+) B_m = 0 \quad (C-12)$$

である。■

〔証明〕

$e = x_m - x_p$ として、(C-8) から (C-9) を引くと、

$$\dot{e} = (A_m - B_p K_m) e + [A_m - A_p + B_p (K_p - K_m)] x_p + (B_m - B_p K_u) u_m \quad (C-13)$$

モデルフォローイングを行うためには、 $\forall u_m$ に対して、 $e(t_0) = 0$ なら $e(t) = 0$ $\dot{e} = 0$ ($t \geq t_0$) でなければならぬ。従って、もしモデルフォローイングを行っている

$$\forall u_m \quad \forall x_p \\ [A_m - A_p + B_p (K_p - K_m)] x_p + (B_m - B_p K_u) u_m = 0 \quad (C-14)$$

を満足しているので、エラーシステムは

$$\dot{e} = (A_m - B_p K_m) e \quad (C-15)$$

となり $(A_m - B_p K_m)$ がフルビッツ行列であれば $\dot{e}, e \rightarrow 0$ になる。従って、モデルフォローイングの条件としては

$$A_m - A_p + B_p (K_p - K_m) = 0 \quad (C-16)$$

である。逆に、 $\text{rank}[A|b]=\text{rank}[A]$ ならば、 b が $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ に一次従属で

$$b = \sum_{j=1}^n x_j a_j \quad (C-5)$$

となる x_j が存在する。■

これから次の定理も導出できる。

[定理 C-2]

$$AX=B \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad X \in \mathbb{R}^{n \times l} \quad B \in \mathbb{R}^{m \times l} \quad (C-6)$$

が解を持つ必要十分条件は

$$\text{rank}[A|B]=\text{rank}[B] \quad (C-7)$$

である。■

[証明]

定理 C-1 の証明と同様に出来る。■

連立一次方程式に関しては文献[9]の pp.66-68. を参照せよ。

次に、この定理を用いて導ける "Perfect model following condition" を示す。この条件はモデルフォロイングを行うために良く用いられる。

[定理 C-3] *Perfect following condition*

モデル、プラントが次のように与えられる。

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m \quad (C-8)$$

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u_p \quad (C-9)$$

但し $(A_m, B_m), (A_p, B_p)$: 安定化可能

A_m : フルビッツ行列 (安定行列)

このとき、次に与えられる入力

$$u_p = -K_p x_p + K_m x_m + K_u u_m \quad (C-10)$$

によって、モデルフォローイングが可能であるための十分条件は

$$(I - B_p B_p^+) (A_m - A_p) = 0 \quad (C-11)$$

$$(I - B_p B_p^+) B_m = 0 \quad (C-12)$$

である。■

[証明]

$e = x_m - x_p$ として、(C-8) から (C-9) を引くと、

$$\dot{e} = (A_m - B_p K_m) e + [A_m - A_p + B_p (K_p - K_m)] x_p + (B_m - B_p K_u) u_m \quad (C-13)$$

- モデルフォローイングを行うためには、 $\forall u_m$ に対して、 $e(t_0) = 0$ なら $e(t) = 0$ ($t \geq t_0$) でなければならぬ。従って、もしモデルフォローイングを行っていると

$$\forall u_m \quad \forall x_p \\ [A_m - A_p + B_p (K_p - K_m)] x_p + (B_m - B_p K_u) u_m = 0 \quad (C-14)$$

を満足しているので、エラーシステムは

$$\dot{e} = (A_m - B_p K_m) e \quad (C-15)$$

となり $(A_m - B_p K_m)$ がフルビッツ行列であれば $\dot{e}, e \rightarrow 0$ になる。従って、モデルフォローイングの条件としては

$$A_m - A_p + B_p (K_p - K_m) = 0 \quad (C-16)$$

$$B_m - B_p K_u = 0 \quad (C-17)$$

あるいは、

$$B_p (K_m - K_p) = A_m - A_p \quad (C-18)$$

$$B_p K_u = B_m \quad (C-19)$$

となる。これらの条件を満足する K_u, K_p の存在を考える。[定理 C-2] から

$$\text{rank}[B_p] = \text{rank}[B_p | (A_m - A_p)] = \text{rank}[B_p, B_m] \quad (C-20)$$

のときに限って K_u, K_p が存在する。ここで B_p の左疑似逆行列 B_p^+ (注) を導入する。

$$B_p^+ = (B_p^t B_p)^{-1} B_p^t \quad (C-21)$$

この左疑似逆行列 B_p^+ と $B_p^+ B_p = I$ の性質を用いて、(C-18)(C-19) を書き換えると

$$K_m - K_p = B_p^+ (A_m - A_p) \quad (C-22)$$

$$K_u = B_p^+ B_m \quad (C-23)$$

これらを (C-13)(C-14) に代入してまとめると

$$(I - B_p B_p^+) (A_m - A_p) = 0 \quad (C-8)$$

$$(I - B_p B_p^+) B_m = 0 \quad (C-9)$$

が得られる。これはモデルフォロ잉制御の解の存在の十分条件となる。

(注) 疑似逆行列 (pseudoinverse matrix)

$$A \in R^{n \times m}$$

$$A^+ := (A^t A)^{-1} A^t$$

付録 D

[定理 D-1]

次の行列方程式を考える。

$$AX=B \tag{D-1}$$

A, B は与えられた行列で、 X を未知な行列とし、 R を乗法の単位元を持つ可換環とすると $A, B \in M(R)$ である。(D-1) を満足する $X \in M(R)$ が存在するための必要十分条件は $[A \ 0]$ と $[A \ B]$ が右同伴(right associate)であることである。■

[証明]

(十分性) $[A \ B] = [A \ 0]U$ となるユニモジューラ行列 $U \in U(R)$ が存在するとする。 U をブロック行列の形に書くと

$$[A \ B] = [A \ 0] \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \tag{D-2}$$

を得る。即ち、 $B = AU_{12}$ となり (D-1) を満足する $X = U_{12} \in U$ が得られる。

(必要性) (D-1) を満足する $X \in M(R)$ が存在すると仮定する。このとき、

$$[A \ B] = A[I \ X] = A[I \ X] \begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} = A[I \ 0] \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} = [A \ 0] \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{D-3}$$

であるから、 $[A \ B]$ と $[A \ 0]$ は右同伴である。■

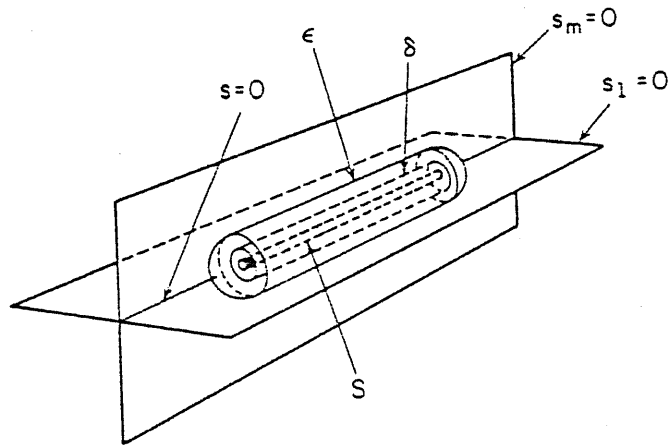


図8-1. Sliding Mode 領域

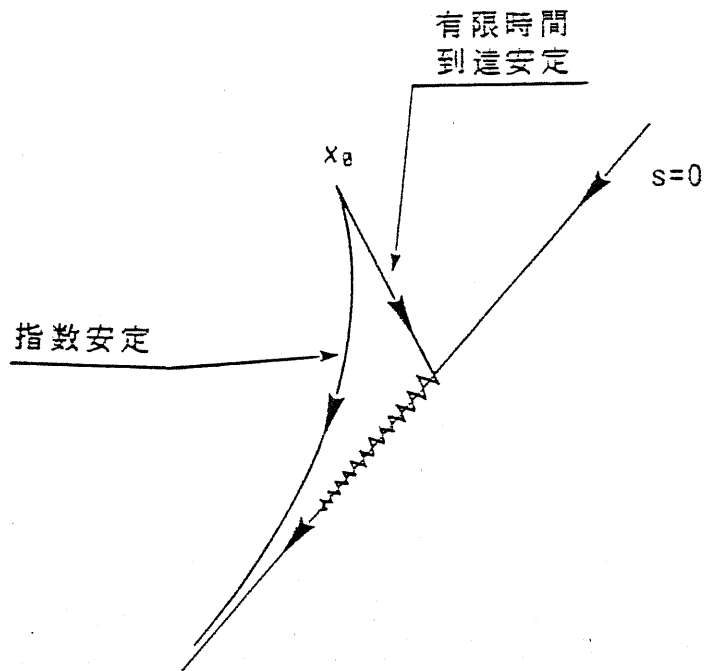


図8-2. 有限時間到達安定と指数安定

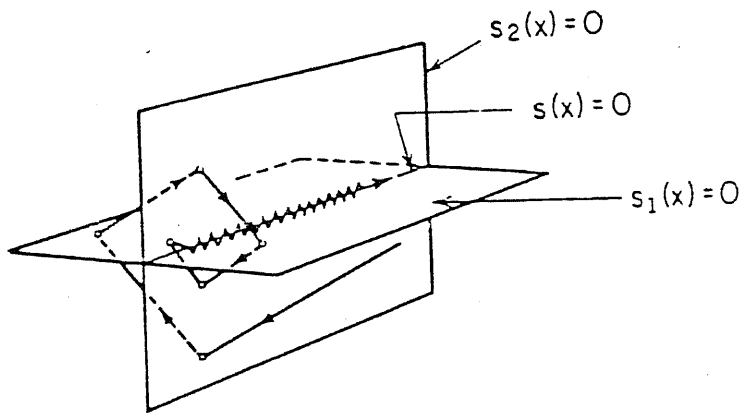


图8-3. 多入力系 Sliding Mode ①

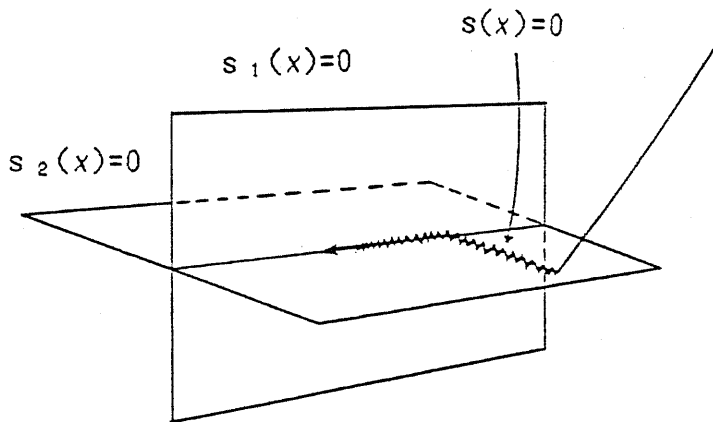


图8-4. 多入力系 Sliding Mode ②

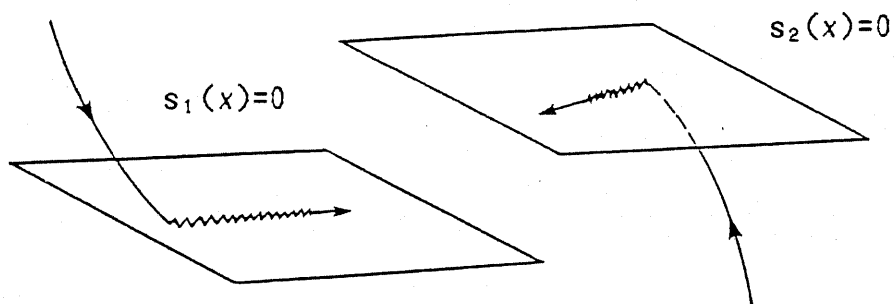


图8-5. 多入力系 Sliding Mode ③

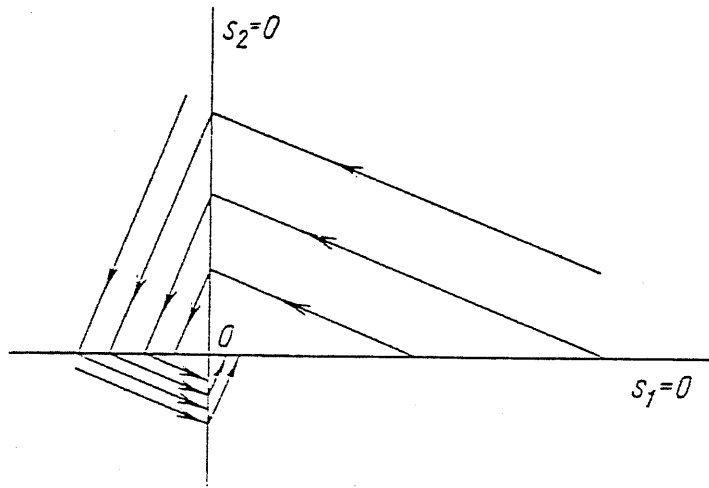


図8-6. (s_1, s_2) 面への投影 (例1)

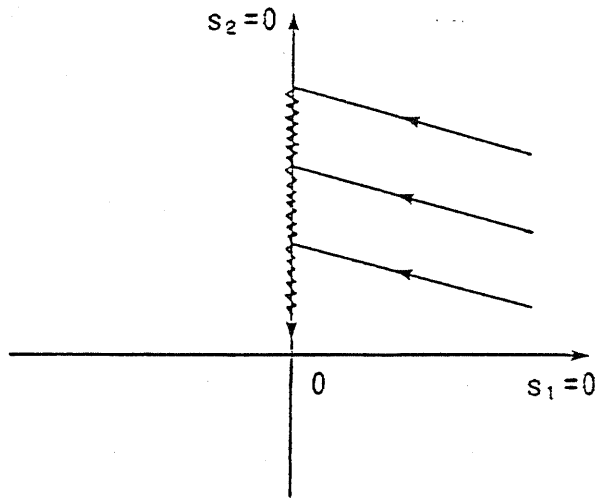


図8-7. (s_1, s_2) 面への投影 (例2)

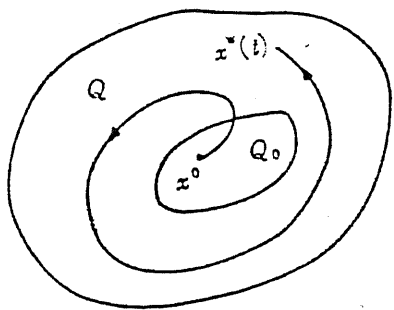


图8-8. Practical 安定

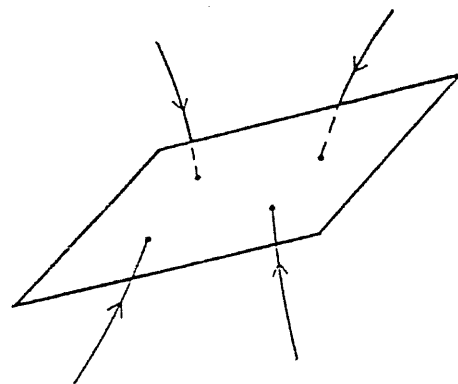
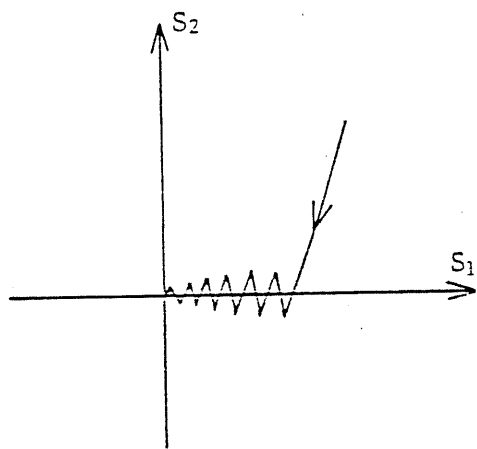
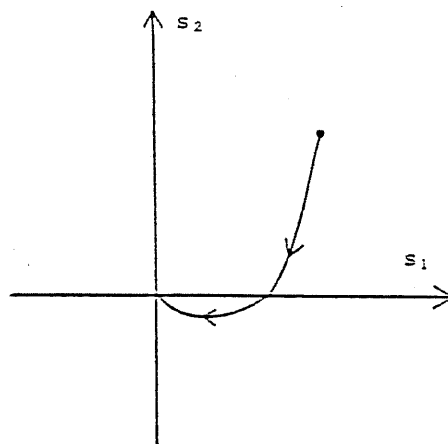


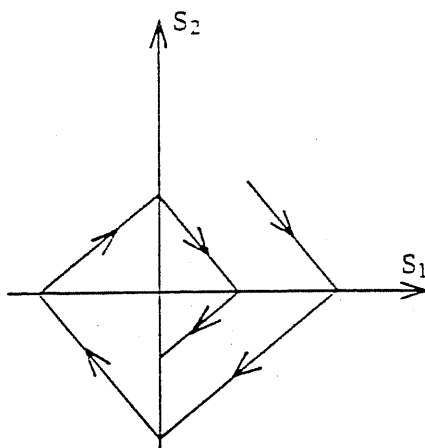
图8-9. Sliding Mode (1入力系)



(a)



(b)



(c)

图8-10. Sliding Mode (2入力系)

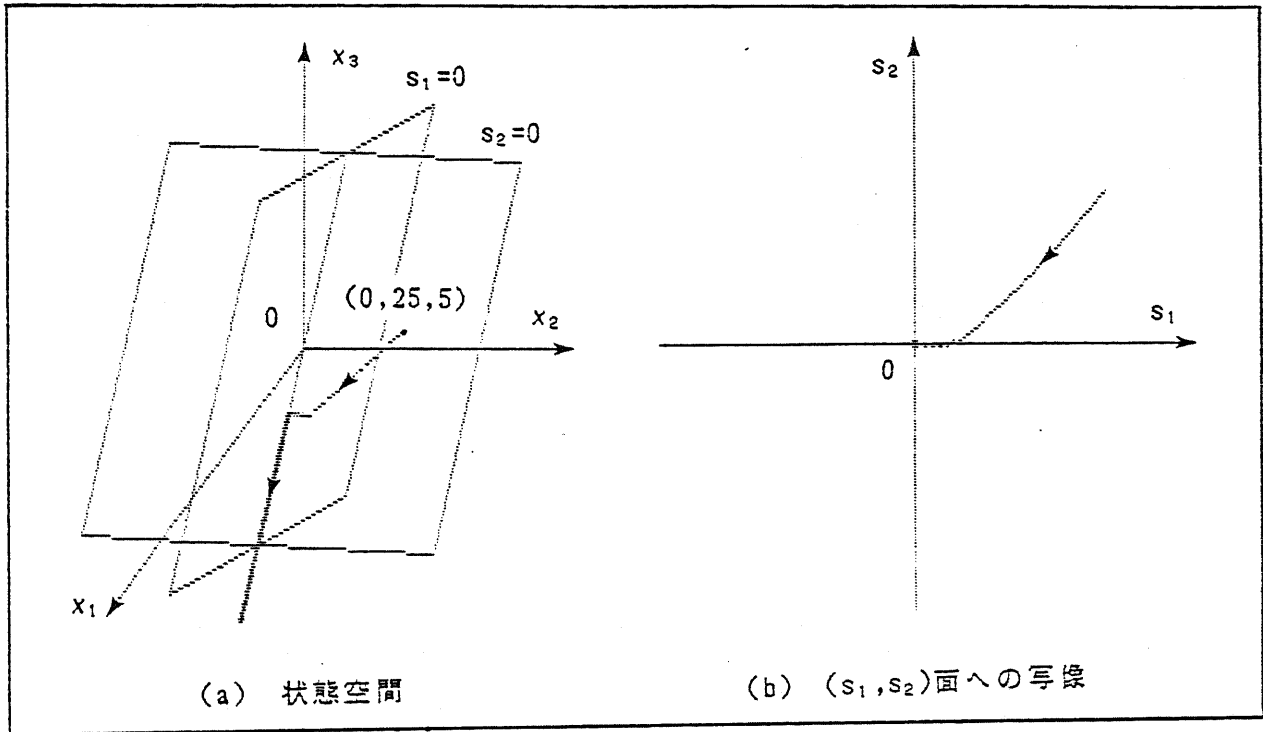


図8-11. $u = -\rho(CB)^T \text{sign}(s)$ の場合

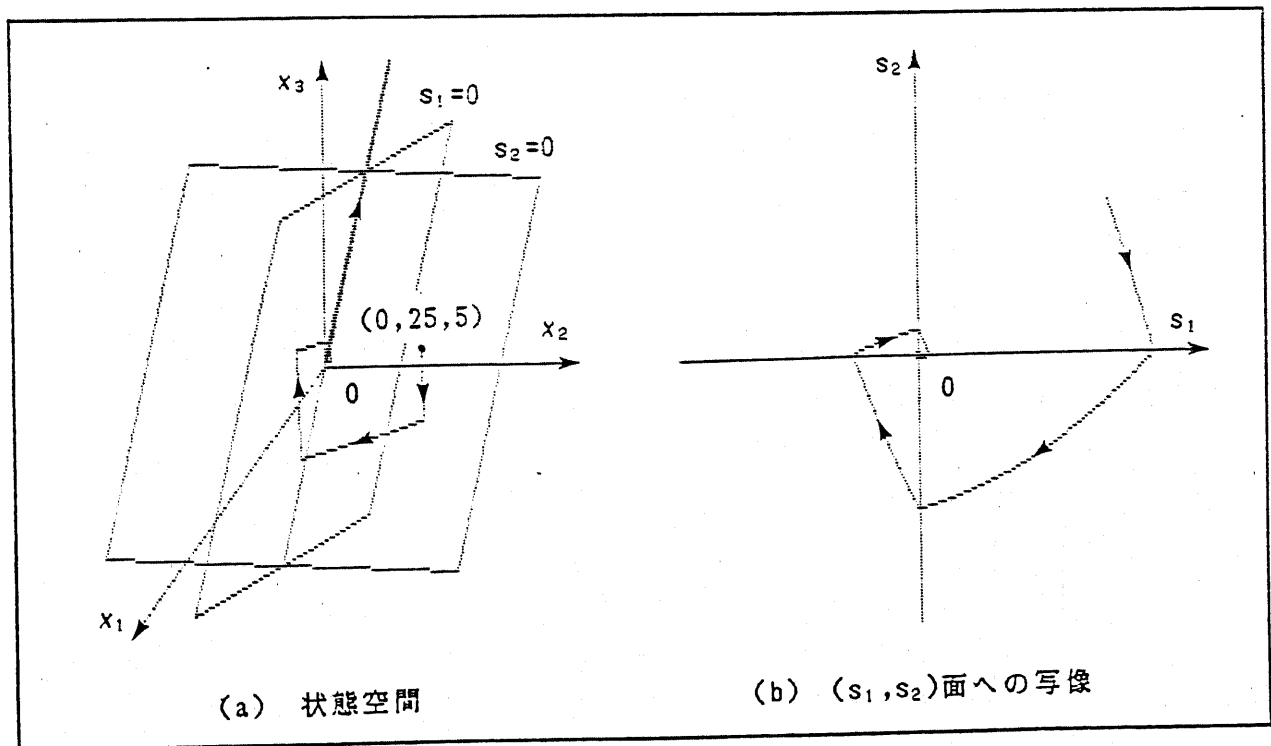


図8-12. $u = \rho \text{sign}(s)$ の場合

第9章 おわりに

本研究では可変構造系に基づく Sliding Mode を Motion Control に適用した。ロバスト性を有する Sliding mode はパラメータ変動あるいは負荷外乱（変動）が存在するシステムに対して有効であることが確認できた。

以下に、第1章を除く各章で得られた知見及び問題点をまとめる。

第2章「可変構造系の理論」では、1入力 Sliding Mode に関して良く知られている研究成果をまとめた。長い歴史を持つ理論研究によって、確定系（線形・非線形）での検討は殆ど終わったような印象を受ける。残った課題としては、実システムへ適用する際に生じる実用化に向けての問題がある。そこでは、スイッチングの速さなどが問題となり、これらの問題が本研究の動機となっている。また、設計に関しては、もっとモダンなもの即ち現代制御論的な手法の開発が望まれる。本論文には記していないが現在研究を進めている。

第3章「位置サーボ系への適用」では、可変構造系を1自由度位置サーボ系に適用した実験結果を述べた。研究当初は、可変構造系を Motion Control へ実際に適用しようと指向した研究は見あたらなかったが、この研究以降次第に増えてきている。ここで得られた知見は、可変構造系によってロバストな制御系を構成できるということである。速いスイッチングを実現して Chattering を押さえて Sliding Mode を可能にしたことが最大の成果である。なお、本研究ではスイッチングが十分速いということで連続系での設計を行ったが、離散化して（但し線形系に限られる）サンプリングの影響まで考慮した研究が最近見られる。第5章では、この点を考慮して研究を進めている。

第4章「ロボットアームへの適用」では、Motion Control の中心課題であるロボットアームの制御に可変構造系を適用した。これに関しては、1978年に K.D. Young の先駆的な研究があるがシミュレーションのみで現実系への有効性は示されていない。また、彼の導入した階層型 Sliding Mode は煩雑でありリアルタイムでの制御には向いていない。これに対して、本研究では実際に適用できる制御則という観点から分散型 Sliding Mode を提案し実システムでの検討を行っている。実システムでの検討は本研究が最初である。なお、本研究では、位置制御

のみを考えているが今後は力制御を行う必要があり、ダイレクト・ドライブ方式のアームでの有効性の確認等いくつかの課題がある。

第5章「ON OFF パターンの生成」は、現在進めている研究であり、現在、シミュレーション結果を得ているところである。可変構造系の本質に立ち戻り「離散化された制御入力」を ON と OFF の2つのパターンに限定し、パワースイッチングデバイスの能力を十分に利用する制御系の構成を目指している。制御入力切り換え周波数をどこまで引き上げることが出来るかが問題となっているが、予測型のアルゴリズムによりかなり良い結果を得た。

第6章「ブラシレスサーボモータへの適用」は、第5章と同じくパワースイッチングデバイスの能力を引き出すという問題意識に立脚している。現在のところシミュレーションによる確認を行っており、近い将来実験を行う予定である。最大の課題としてはインバータの8つのスイッチングパターンから適切な一つをどのように選ぶかであり、研究の方向をここに集中している。

第7章「可変構造系を用いた学習制御系の構成」では、試行を繰り返すことによってスイッチング部分を減少していく制御法を考案した。この方法によれば、最初から Sliding Mode が存在するので誤差が小さいまま試行毎に適切な制御入力を構成することが出来る。実験によって有効性が確認されている。今後は、学習機能の高度化を行う必要がある。

第8章「可変構造系の多入力系への適用」では、ロボットアーム等で必要になる多入力系の扱いを検討している。本研究では、幾つかの結果が得られたが、真に実用性を考えるとまだ不十分である。しかし、この問題が解決されると更に適用対象が増え、可変構造系の多くの可能性が発現すると思われる。

展望

可変構造系の一つである Sliding Mode に注目して Motion Control に適用してきたが、可変構造系の考え方はもっと普遍性を持つと思われる。例えば障害物回避のように、考えられる多くの事象（行動）の中から適切な事象（行動）を選択する問題には、離散化された集合から集合の時系列を作る可変構造系は適していると考えられる。これは、最適化の考え方と通じておりシステムの設計あるいはタスクプランニングにも有用であると思われる。

可変構造系の本質に立ち戻れば多くの応用の可能性が見いだせる。今後は、この様な捉え方で研究を進めれば、得られる成果は大きなものとなるに違いない。

謝辞

本研究をとうして、常に暖かい御指導と貴重な御助言を頂いた原島文雄教授に心からお礼を申し上げます。また原島研究室助手の近藤正示氏および稲葉博氏には大学院5年間を通して多くのことを学びました。深く感謝致します。

本研究を行う上で多くの人に助けて頂きました。ここに名前を列記することによって感謝の意を表します。

大学院学生（当時）

酒井俊彦氏 植芝俊夫氏

大学院学生

許建新氏 山本肇氏 久保田孝氏
沈貴宝氏 姜聖允氏

研究生

近藤隆之氏 市山利信氏 長谷川伸夫氏 宮田勝氏

研究室

石津健氏 丸山浩二氏 新井雄一氏

西山豊氏 柳沢重一氏 中山朝法氏

高岸寿子女史

発表論文リスト

A. 論文誌-----6編

- (1) O.Kaynak, F.Harashima, H.Hashimoto, "Variable Structure Systems Theory Applied to Sub-Time Optimal Position Control with an Invariant Trajectory," 電気学会論文誌 Part.E, Vol.104, No.3/4, pp.47-51 (1984)
- (2) F.Harashima, H.Hashimoto, S.Kondo, "MOSFET Converter-fed Position Servo System with Sliding Mode Control," IEEE Trans. on IE, vol.IE-32, no.3, pp.238-244 (1985)
- (3) F.Harashima, H.Hashimoto, K.Maruyama, "Sliding Mode Control of Manipulator with Time-Varying Switching Surfaces," 計測自動制御学会論文集 Vol.22, No.3, pp.335-342 (1986)
- (4) F.Harashima, J.x.Xu, H.Hashimoto, "Tracking Control of Robot Manipulator Using Sliding Mode," IEEE Journal of Power Electronicsに掲載決定
- (5) H.Hashimoto, K.Maruyama, F.Harashima, "A Microprocessor-Based Robot Manipulator Control with Sliding Mode," IEEE Trans. on IE, vol.IE-34, no.2 (1987)に掲載決定
- (6) H.Hashimoto, H.Yamamoto, S.Yanagisawa, F.Harashima, "Brushless Servo Motor Control Using Variable Structure System," IEEE Transactions on IAS に掲載決定

B. 論文誌投稿中-----1編

- (7) H.Hashimoto, F.Harashima, "Practical Robust Control of Robot Arm Using Variable Structure System," IEEE Journal of Robotics and Automation に掲載中

C. 解説-----3編

- (8) 原島, 橋本 "Sliding Modeとその応用-I," システムと制御, Vol.29, No.2, pp.94-103 (1985)
- (9) 原島, 橋本 "Sliding Modeとその応用-II," システムと制御, Vol.29, No.4, pp.242-250 (1985)
- (10) 原島, 橋本 "すべり状態制御 (Sliding Mode Control)," コンピュータコントロール No.13-ロバスト制御の理論と応用- pp.72-78 (1986), コロナ社

D. 国際会議-----14編

- (11) O.Kaynak, F.Harashima, H.Hashimoto, "A Variable Structure System with an Invariant Trajectory," IPEC-Tokyo, Tokyo, March (1983)
- (12) F.Harashima, H.Hashimoto, S.Kondo, "MOSFET Converter-fed Position Servo System with Sliding Mode Control," IEEE Power Electronics Special

list Conference,, Albuquerque, U.S.A. June (1983)

(13) F.Harashima, H.Hashimoto, J.X Xu, "Arbitrary Trajectory Tracking Characteristics of Sliding Mode," IEEE Power Electronics Specialist Conference,, Gaithersburg, U.S.A. June (1984)

(14) F.Harashima, H.Hashimoto, K.ishizu, "Noninteracting Control of Robotic Manipulator with Sliding Mode," IEEE Industrial Electronics Conference 1984, Keio Plaza, Shinjuku, Tokyo, October (1984)

(15) F.Harashima, J.x.Xu, H.Hashimoto,"Tracking Control of Robot Manipulator Using Sliding Mode," the 15th International Symposium on Industrial Robots, Tokyo, September (1985)

(16) F.Harashima, T.Ueshiba, H.Hashimoto, K.Maruyama, "Sliding Mode Control for Robotic Manipulator," European Power Electronics Conference, Brussels, October (1985)

(17) F.Harashima, H.Hashimoto, K.Maruyama, "A Microprocessor-Based Robot Manipulator Control with Sliding Mode,"IEEE Industrial Electronics Conference 1985, Hyatt Regency, San Francisco, U.S.A., November (1985)

(18) F.Harashima, H.Hashimoto, K.Maruyama, "Practical Robust Control of Robot Arm Using Variable Structure System," IEEE Robotics and Automation Conference, Hilton & Tower, San Francisco, U.S.A., April 7-10 (1986)

(19) F.Harashima, H.Hashimoto,"Variable Structure Strategy in Motion Control," CAMC'86 U.S.A., June (1986)

(20) H.Hashimoto, H.Yamamoto, S.Yanagisawa, F.Harashima," Brushless Servo Motor Control Using Variable Structure System," IAS Denver, U.S.A., September (1986)

(21) H.Hashimoto, K.Maruyama, Y.Arai, F.Harashima,"Practical Realization of VSS Controller for Robotic Arm," IECON86 U.S.A, September (1986)

(22) F.Harashima, H.Yamamoto, H.Hashimoto, "Obstacle Avoidance Using Visual Information for Mobile Robot," International Workshop on Industrial Applications of Machine Vision and Machine Intelligence, February 2-4, 1987 Tokyo

(23) H.Hashimoto, F.Harashima,"Variable Structure Strategy in Motion Control," 10th World Congress International Federation of Automatic Control, July 26-31, 1987 Munich

(24) H.Hashimoto, J.J.E.Slotine, Y.Arai, F.Harashima, "Practical Design of VSS Controller Using Balance Condition --- Robotics Application ---,"

IEEE International Conference on Robotics and Automation, March 30 to April 3, 1987

国際会議投稿中-----2件

(25) H.Hashimoto, Y.Dote, F.Harashima, "Adaptive Control of Manipulator Using Variable Structure Systems," The 5th Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems Theory, Yale University, May 20-22, 1987 に投稿中

(26) F.Harashima, Y.Nishiyama, H.Hashimoto, "Adaptive Control of Flexible Arm with a Variable Payload," IMACS International Symposium on MODELLING AND SIMULATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS, October 6-9, 1987 Hiroshima に投稿中

E. 研究会-----8編

(27)原島, 橋本, "VSSによる制御系設計," 電気学会 システム・制御研究会資料 SC-83-46 pp.1-10 (1983)

(28) 原島, 橋本, 丸山, "Sliding Mode による多関節アームの制御," 電気学会 システム・制御研究会資料 SC-85-1 pp.1-9 (1985)

(29) 原島, 橋本, "Sliding Mode による制御系設計," 第14回制御理論シンポジウム資料 pp.55-58 (1985)

(30) 原島, 橋本, "VSS の多入力系への適用," 第8回 Dynamical System Theory シンポジウム pp.31-34 (1985)

(31) F.Harashima, J.x.Xu, H.Hashimoto, "Parameter Identification Using VSS," 第8回 Dynamical System Theory シンポジウム pp.35-38 (1985)

(32) F.Harashima, J.x.Xu, H.Hashimoto, "Fuzzy Controller Stability with Energetic Function," 第9回 Dynamical System Theory シンポジウム (1986)

(33) 橋本、宮田、原島、"可変構造系による ON-OFF パターン発生 - DC サーボモータへの適用 -," 電気学会システム・制御研究会 (1987年3月)

(34) 橋本、柳沢、原島、"可変構造系を用いたブラシレスサーボモータの制御," 電気学会システム・制御研究会 (1987年3月)

F. 全国大会-----16編

*計測自動制御学会

(35) 原島, 橋本, 近藤, Kaynak, "Variable Structure による位置サーボ系の制御," 第21回SICE学術講演会予稿集, No.1111, (1982)

(36) 原島, 橋本, 近藤, "Variable Structure による位置サーボ系の制御 - Sliding Mode 存在領域における比較 -," 第22回SICE学術講演会予稿集, No.3101, (1983)

(37) 原島, 橋本, 丸山, "Sliding Modeによる多関節アームの分散制御 - 外乱抑

庄による分散化—,”第24回SICE学術講演会予稿集, No.3617, (1985)

(38) 原島, 許, 橋本, ”VSSによる非線形系のパラメータ同定,” 第24回SICE学術講演会予稿集, No.3619, (1985)

(39) 原島, 橋本, 丸山, 新井, ”Sliding Mode Controller の実現 — PWM Pattern の直接発生—” 第25回SICE学術講演会予稿集, No. , (1986)

*電気学会

(40) 原島, 橋本, 近藤, ”位置サーボ系の全領域 Sliding Modeによるロバスト制御,” 昭和58年電気学会全国大会講演論文集 No.523 (1983)

(41) 原島, 橋本, ”Sliding Modeのロバスト性,” 昭和59年電気学会全国大会講演論文集 No.1358 (1984)

(42) 原島, 酒井, 橋本, ”Sliding Modeによる多関節ロボットアームの非干渉化,” 昭和59年電気学会全国大会講演論文集 No.1371 (1984)

(43) 原島, 橋本, 市山, ”Sliding Modeによるロボットアームの軌道制御,” 昭和60年電気学会全国大会講演論文集 No.1494 (1985)

(44) 橋本, 宮田, 許, 原島, ”可変構造系によるON-OFFパターン発生—DCサーボモータへの応用—,” 昭和62年電気学会全国大会

(45) 橋本, 柳沢, 許, 原島, ”可変構造系を用いたブラシレスサーボモータの制御,” 昭和62年電気学会全国大会

*日本ロボット学会

(46) 原島, 橋本, 丸山, ”Sliding Modeによるマニピュレータの制御—Payload変動に対する適応性の検討—,” 第2回日本ロボット学会学術講演会予稿集, No.3109, (1984)

(47) 原島, 橋本, 丸山, ”VSSによるマニピュレータの制御,” 第3回日本ロボット学会学術講演会予稿集, No.1312, (1985)

(48) 原島, 山本, 橋本, ”視覚センサを用いた移動ロボットの障害物回避,” 第4回日本ロボット学会学術講演会予稿集, No.1107, (1986)

(49) 原島, 植芝, 橋本, ”先端位置検出器としてCCDカメラを用いた1リンクフレキシブルアームの適応制御方式,” 第4回日本ロボット学会学術講演会予稿集, No.3209, (1986)

*自動制御連合講演会

(50) 原島, 橋本, 石津, 丸山, ”Sliding Modeによる多関節ロボットアームの非干渉制御,” 第27回自動制御連合講演会前刷, No.2026, (1984)