

空間周波数によって記述された広義のガウス波

Gaussian Waves in Spatial Frequency Domain

浜 崎 襄 二*

Joji HAMASAKI

波の進行方向に垂直な断面内の遠方では強度が半径の二乗に比例した変数の指数関数で減少するような波を広義のガウス波と呼ぶとき、エルミート・ガウス波とラゲール・ガウス波はその代表的なものである。空間周波数で波動方程式を記述したとき、いかにして広義のガウス波が現われるかについて記述し、このような波の一取扱い方法を示す。

1. 序

画像の形成、検知には複雑な波面を持った電磁波(光)等の波動を媒介とする場合が多い。その理由を考えてみると人間の視覚とその関連能力が記憶容量、処理速度において極めて優れたものであり、光にのせられた画像形式の情報は、直接この能力の活用対象となるからであろう。画像の延長と考えられる多次元情報の機械的処理を行なう装置においても、多数の情報の並列的処理を迅速に行なうには短波長の波動を媒介とするのが一つの優れた方法と考えられている。

複雑な波面の短波長の波動の振舞については古くから光学、音響学の分野で研究されて来たが、レーザーの出現以来コヒーレントな波動の細い解析が必要となって来た。ビーム状に伝搬する波動についても、レーザー共振器、レーザー光伝送路に関連して Kogelnik, Li¹⁾²⁾をはじめ多くの研究者によって解析が進められている。また一方複雑な波面の波動が像を形成するときこの波動は像の各点を点光源とした球面波の集合して扱われ空間周波数の概念を用いて記述されている。複雑な波動による情報処理系の限界を解析しようとするとき、たとえば散乱光源の大きさや異方性を含めることが必要な場合も漸時多くなっている。本文では、球面波や平面波に次いで簡単な Kogelnik, Li の広義のガウス波を見直してみたい。そして、この波が直角座標系あるいは円柱座標系を用いたとき、空間周波数で記述した場合の直交素波として極めて直接的に導びかれ容易に伝搬項の分離が可能であること、異ったビームパラメータの波による展開の問題、座標の変換に伴うスペクトルの変換に関する若干の問題を扱ってみる。なお本文の扱いは等方性媒体中の短波長の波動に関するもので電磁波・超音波等にあてはまるものであり、また波の伝搬にしたがって広がって行く角度も 30°~60° 程度までの波を表わすことが出来る。

2. 近軸波動の微分方程式とその一般解

像の形成、検知に用いられる波動は一般にはベクトル量あるいはテンソル量で表わされるが、本文では取扱いの簡単のため、波動の複素振幅 u なるスカラー量で近似する。この u は位置座標の関数であり、波動が一つのスカラー量から誘導される場合にはその量を u と考えればよい。また時間的には一つの調和成分を考え、時間因子を $\exp(j\omega t)$ と表わす。ここに、 $j = \sqrt{-1}$ 、 ω は時間角周波数、 t は時間である。

一様均質媒体中の波動は、周知の通り次の波動方程式を満たさねばならない。

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (1)$$

ここに、 $k = 2\pi/\lambda$ 、 λ は波長、 k は波数と呼ばれ、媒体の定数である。

さて、位置座標を直角座標系 (x, y, z) で表わすとき、複雑な波面を持った波動 $u(x, y, z)$ を構成する何れの平面波成分も $+z$ 方向に近い方向に伝搬しており、また、 u 、 $\partial u/\partial x$ 、 $\partial u/\partial y$ 、 $\partial^2 u/\partial x^2$ 、 $\partial^2 u/\partial y^2$ 、 $\partial^2 u/\partial x \partial y$ 、等は x, y について $(-\infty, +\infty)$ の範囲で積分可能であると仮定する。この仮定は、波動の x, y 方向の拡がり有限であることを意味するので近軸性の仮定と呼んでおこう。これは本文の理論の重要な仮定であるが、理論の帰結は、 $+z$ 方向からかなり大きく (30° 程度も) 離れた方向に伝搬する平面波成分を含んだ波動についても良い近似で成立する場合が多いのである。

共通な $+z$ 方向の伝搬因子 $\exp(-jkz)$ により

$$u(x, y, z) = \psi(x, y, z) \exp(-jkz)$$

として ψ を定めて式 (1) に代入し、近軸性の仮定により ψ は z に関して緩やかな変化をするはずであるから

$$|\partial^2 \psi / \partial z^2| \ll |2k \partial \psi / \partial z|$$

として $\partial^2 \psi / \partial z^2$ を無視すれば、周知の通り次の近軸波動の基本方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - j2k \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

まず、直角座標系における空間周波数平面を考えてみよう。一般に $f(x, y)$ とそのフーリエ変換 $F(\xi, \eta)$ との関係を次のように記すことにする。

* 東京大学生産技術研究所 第3部

$$\begin{aligned}
 F(\xi, \eta) &= FT_{(+)}(f(x, y)) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{j2\pi(\xi x + \eta y)} dx dy \\
 f(x, y) &= FT_{(-)}(F(\xi, \eta)) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{-j2\pi(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{3}$$

振幅 $\phi(x, y, z)$ の x, y に関するフーリエ変換をスペクトルと呼び $\Psi(\xi, \eta; z)$ で表わす。式 (2) のフーリエ変換を求め近軸性の仮定により部分積分を用いて整理すれば次の方程式が得られる。

$$2\pi^2(\xi^2 + \eta^2)\Psi + jk\partial\Psi/\partial z = 0 \tag{4}$$

この方程式の一般解は、 $\Psi(\xi, \eta; 0)$ を ξ, η の任意関数とすると次次の通りとなる。

$$\Psi(\xi, \eta; z) = \Psi(\xi, \eta; 0) \exp\{j2\pi^2(\xi^2 + \eta^2)z/k\} \tag{5}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 \Psi(\xi, \eta; z) &= FT_{(+)}(\phi(x, y, z)) \\
 \Psi(\xi, \eta; 0) &: \xi, \eta \text{ の任意関数}
 \end{aligned}$$

$\Psi(\xi, \eta; z)$ が求まればフーリエ逆変換によって $\phi(x, y, z)$ が求められる。

次に、円柱座標系 (r, θ, z) において空間周波数を考えてみよう。振幅を $\phi'(r, \theta, z) = \phi(x, y, z)$ と表わし

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \tag{6}$$

により式 (2) を円柱座標系に変換すれば、次の通りとなる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi'}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \theta^2} - j2k \frac{\partial \phi'}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

変数分離形を仮定して $\phi'(r, \theta, z) = \phi_r(r; z) \phi_\theta(\theta)$ とおき式 (7) に代入すれば

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_r}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} \phi_r - j2k \frac{\partial \phi_r}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial \theta^2} + n^2 \phi_\theta = 0 \tag{9}$$

ここに n^2 は分離定数である。空間に特異点がないならば、式 (9) より直ちに

$$\phi_\theta = \exp(jn\theta) \quad n: \text{整数} \tag{10}$$

が得られる。

空間周波数平面も極座標形式で表わすことにして

$$\xi = \rho \cos \varphi, \quad \eta = \rho \sin \varphi \tag{11}$$

として ρ, φ を定め、この座標系におけるスペクトルを $\Psi'(\rho, \varphi; z) = \Psi(\xi, \eta; z)$ と表わすならば、

$$\begin{aligned}
 \Psi'(\rho, \varphi; z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(r, \theta, z) e^{j2\pi(\xi x + \eta y)} dx dy \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \phi_r(r, z) e^{jn\theta - 2\pi\rho r \sin(\theta - \varphi - \pi/2)} d\theta r dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\infty} \phi_r(r, z) J_n(2\pi\rho r) r dr e^{jn(\varphi + \pi/2)}
 \end{aligned}$$

最初の変形には式 (6), (11) を使い、次の変形には第一種ベッセル関数の積分表示

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi j \alpha} \int_{\alpha}^{2\pi + \alpha} e^{j(n\theta - z \sin \theta)} d\theta$$

を用いた。この $J_n(z)$ を用いたハンケル変換とその逆変換を次の形式で記すことにすると

$$\begin{aligned}
 F(\rho) &= HT[f(r)] = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_n(2\pi\rho r) r dr \\
 f(r) &= HT[F(\rho)] = 2\pi \int_0^{\infty} F(\rho) J_n(2\pi\rho r) \rho d\rho
 \end{aligned} \tag{12}$$

スペクトル $\Psi'(\rho, \varphi; z)$ は $\phi_r(r, z)$ のハンケル変換 $\Psi_H(\rho, z)$ を用いて次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 \Psi'(\rho, \varphi; z) &= \Psi_H e^{jn(\varphi + \pi/2)} \\
 \Psi_H(\rho, z) &= HT[\phi_r(r, z)]
 \end{aligned} \tag{13}$$

このように円柱座標系では、スペクトルが ϕ_r のハンケル変換によって表わされるので、式 (4) の場合と同様な考慮を払って式 (8) のハンケル変換を求めると

$$2\pi^2 \rho^2 \Psi_H + jk \partial \Psi_H / \partial z = 0 \tag{14}$$

が得られる。この変形においてはベッセルの微分方程式による関係式

$$\frac{d^2}{dz^2} J_n(z) + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} J_n(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) J_n(z) = 0$$

を用いた。式 (14) は $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ を考慮すれば式 (4) と同一形式であるが、式 (4) の Ψ は ξ, η, z の関数であるのに、式 (14) の Ψ_H は ρ, z の関数である。式 (14) の一般解は

$$\Psi_H(\rho; z) = \Psi_H(\rho; 0) \exp(j2\pi^2 \rho^2 z/k) \tag{15}$$

$$\Psi_H(\rho; 0): \rho \text{ の任意関数}$$

$\Psi_H(\rho; z)$ が求まればハンケル逆変換によって $\phi_r(r, z)$ が求まり、式 (10) の $\phi_\theta(\theta)$ との積により $\phi'(r, \theta, z)$ が求められる。

3. 平面波の重畳と空間周波数の概念

本節では、複雑な波面を持った波動を平面波の重畳として表わす手法を紹介しよう³⁾。

単一周波数の平面波の波面に垂直な (波の進行方向を向いた) ベクトルと直角座標 (x, y, z) の座標軸との成す角をそれぞれ α, β, γ とすれば、この波動は

$$a(x, y, z) \exp(j\omega t) = A \exp\{-jk(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)\} \exp(j\omega t)$$

によって表わされる。波長 λ を用いて

$$\xi = \frac{\cos \alpha}{\lambda}, \quad \eta = \frac{\cos \beta}{\lambda}, \quad \zeta = \frac{\cos \gamma}{\lambda}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \tag{16}$$

によって ξ, η, ζ, ν を定義すれば

$$a(x, y, z) \exp(j\omega t) = A \exp\{-j2\pi(\xi x + \eta y + \zeta z)\} \exp(j2\pi\nu t) \tag{17}$$

となる。 ν が時間周波数と呼ばれると同様に ξ, η, ζ は x, y, z にそれぞれ対応した空間周波数と呼ばれる。伝搬域にある波 (すなわち evanescent wave でない波)

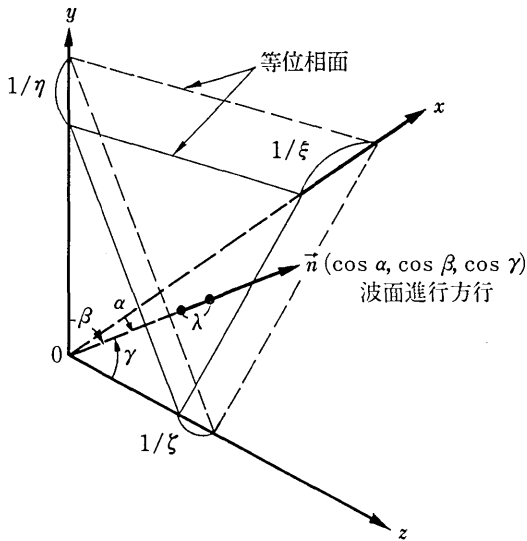


図1 平面素波と空間周波数

対しては ξ, η, ζ は何れも実数であるが、方向余弦 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ の自乗の和が1となることから

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1/\lambda^2 \tag{18}$$

の制約がある。時間周波数の場合と異り、空間周波数が負であることは座標軸の負方向に伝搬している事実を表わすものである。また、図1を参照すれば明らかなように、空間周波数とは座標軸上の単位長の中に入っている波の数を表わす。式(18)の制約より ζ または $\cos \gamma$ は ξ, η で次のように表わされる。

$$\cos \gamma = \lambda \zeta = \sqrt{1 - \lambda^2(\xi^2 + \eta^2)} \tag{19}$$

したがって式(17)より

$$a(x, y, z) = A \exp\{-j2\pi(\xi x + \eta y)\} \exp(-jkz \cos \gamma) \tag{20}$$

この A は $z=0$ において空間周波数 (ξ, η) の振幅を表わすと考えてよい。

次に連続的な空間周波数を有する場合を考え、空間周波数 (ξ, η) における平面素波の振幅分布が $z=0$ において $A(\xi, \eta; 0) d\xi d\eta$ で与えられているならば、重畳の理によって、全体の振幅は

$$\begin{aligned} a(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \eta; 0) \exp\{-j2\pi(\xi x + \eta y)\} \exp(-jkz \cos \gamma) d\xi d\eta \\ &= FT_{(+)}\{A(\xi, \eta; z)\} \end{aligned} \tag{21}$$

ただし

$$A(\xi, \eta; z) = A(\xi, \eta; 0) \exp(-jkz \cos \gamma) \tag{22}$$

であり、式(21)のフーリエ変換において関数 $A(\xi, \eta; 0)$ は式(18)の制約が満たされる範囲で零でない値をとるものである。式(21)より直ちに

$$A(\xi, \eta; z) = FT_{(+)}\{a(x, y, z)\} \tag{23}$$

式(21), (23)は前節における $\phi(x, y, z)$ と $\Psi(\xi, \eta; z)$ との関係と同一の内容を表わすものであるが、式(22)は式(5)より若干適用範囲が広い。その理由は、

$\lambda^2(\xi^2 + \eta^2) \ll 1$ として式(19)を展開して式(22)に代入すれば

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta; z) &= A(\xi, \eta; 0) \exp\{-jkz \\ &\quad + j2\pi^2(\xi^2 + \eta^2)z/k + \dots\} \end{aligned}$$

となり、{ }内の第3項以下を無視するとき式(5)と同一の関係となるからである。ここで $\exp(-jkz)$ はフーリエ変換に関係しない因子であるから $\phi(x, y, z)$ におけるように予め除いてしまってもよいことは明らかである。

次節以降においては式(5)の任意関数 $\Psi(\xi, \eta; 0)$ 及び式(15)の任意関数 $\Psi_H(\rho; 0)$ を適当な正規直交関数で展開し、フーリエ逆変換あるいはハンケル逆変換によってビーム状に伝搬する波の素波を求めてみよう。

4. エルミートの多項式とラゲール陪多項式の一性質⁴⁾

第 n 次のエルミートの多項式 $H_n(\xi)$ はその母関数 $S(\xi, s)$ により次のように定義される。

$$\begin{aligned} S(\xi, s) &= e^{\xi^2 - (s-\xi)^2} = e^{-s^2 + 2s\xi} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} s^n \end{aligned} \tag{24}$$

この定義から

$$\begin{aligned} H_n(\xi) &= \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^l 2^{n-2l} n!}{(n-2l)! l!} \xi^{n-2l} \\ &= (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \end{aligned} \tag{25}$$

等の表現や種々の漸化式、微分関係式、積分関係式が得られることはよく知られているところである。これらの中でも特に本文に関連したものを列挙すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = \begin{cases} \sqrt{\pi} 2^n n! & (n=m \text{ のとき}) \\ 0 & (n \neq m \text{ のとき}) \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} H_{2n}(\alpha\xi) H_{2m}(\beta\xi) e^{-\xi^2} d\xi \\ &= \sum_{l=0}^{\text{Min}(n, m)} \frac{\sqrt{\pi} (2n)! (2m)! (-1)^{n+m} (2\alpha\beta)^{2l}}{(m-l)! (n-l)!} \\ &\quad \frac{(1-\alpha^2)^{n-l} (1-\beta^2)^{m-l}}{(2l)!} \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} H_{2n+1}(\alpha\xi) H_{2m+1}(\beta\xi) e^{-\xi^2} d\xi \\ &= \sum_{l=0}^{\text{Min}(n, m)} \frac{\sqrt{\pi} (2n+1)! (2m+1)! (-1)^{n+m}}{(m-l)! (n-l)!} \\ &\quad \frac{(2\alpha\beta)^{2l+1} (1-\alpha^2)^{n-l} (1-\beta^2)^{m-l}}{(2l+1)!} \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} H_n(bx) e^{-ax^2} e^{j2\pi\xi x} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{a-b^2}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}} H_n\left(\frac{\pi b}{\sqrt{a(b^2-a)}} \xi\right) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(a\xi) H_m\{b(\xi' - \xi)\} e^{-\alpha\xi^2} e^{-\beta(\xi' - \xi)^2} d\xi$$

$$= \sqrt{\pi} (1-a^2)^{n/2} (1-b^2)^{m/2} e^{-\alpha\beta\xi'^2}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \frac{n! m!}{(n-k)! (m-k)! k!}$$

$$\left(\frac{-2ab}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}\right)^k H_{n-k}\left(\frac{a\beta\xi'}{\sqrt{1-a^2}}\right)$$

$$H_{m-k}\left(\frac{b\alpha\xi'}{\sqrt{1-b^2}}\right) \quad (30)$$

ただし $\alpha + \beta = 1$ とする。

次に第 l 次のラゲールの陪多項式 $L_l^{(n)}(x)$ はその母関数 $S^{(n)}(x, t)$ によって次の通りに定義される。

$$S^{(n)}(x, t) = \frac{1}{(1-t)^{n+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} L_l^{(n)}(x) t^l \quad (31)$$

この定義から

$$L_l^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^l (-1)^k \frac{(l+n)!}{(l-k)! (n+k)! k!} x^k$$

$$= \frac{e^x x^{-n}}{l!} \frac{d^l}{dx^l} (e^{-x} x^{l+n}) \quad (32)$$

等の表現や種々の重要な関係式が求められている。

$$\int_0^{\infty} L_l^{(n)}(x^2) L_k^{(n)}(x^2) e^{-x^2} x^{2n} x dx$$

$$= \begin{cases} \frac{(l+n)!}{2l!} & (l=k \text{ のとき}) \\ 0 & (l \neq k \text{ のとき}) \end{cases} \quad (33)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} x^n L_l^{(n)}(bx^2) J_n(\xi x) x dx$$

$$= (-1)^l \frac{(2b/a-1)^l}{a^{n+1}} e^{-\frac{1}{2a}\xi^2} \xi^n L_l^{(n)}\left(\frac{b\xi^2}{a(2b-a)}\right) \quad (34)$$

これらの関係の中、式 (26) より

$$f_n(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/4} 2^{n/2} \sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi) \quad (35)$$

が次の関係を満足する正規直交関数となること、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(\xi) f_m(\xi) d\xi = \delta_{nm} \quad (36)$$

(δ_{nm} はクロネッカのデルタ)

また、式 (29) より $f_n(\xi)$ はフーリエ変換によってその関数の形式を変えないことが判る。また、式 (33) より

$$g_l^{(n)}(x) = \frac{\sqrt{2l!}}{\sqrt{(l+n)!}} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^n L_l^{(n)}(x^2) \quad (37)$$

が

$$\int_0^{\infty} g_l^{(n)}(x) g_k^{(n)}(x) x dx = \delta_{lk} \quad (38)$$

を満たす正規直交関数となり、また、式 (34) より $g_l^{(n)}(x)$ はハンケル変換によってその関数形式を変えないことが判る。これらの性質は任意関数の展開において

特に有用な性質である。

5. 近軸波動の素波とその性質

前節で挙げた正規直交関数を用いて近軸波動の素波を求めてみる。

まず直角座標系の場合には式 (35) を用いて素波のスペクトルを次のようにおく。

$$\Psi_{nm}(\xi, \eta; 0)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi w_{x0} w_{y0}}{2^{n+m-1} n! m!}} H_n(\sqrt{2} \pi w_{x0} \xi) H_m(\sqrt{2} \pi w_{y0} \eta)$$

$$\times \exp\{-\pi^2 (w_{x0}^2 \xi^2 + w_{y0}^2 \eta^2)\}$$

$$\times \exp\left\{j \frac{2\pi^2}{k} (\xi^2 R_x q_{x0} + \eta^2 R_x q_{y0})\right\} \quad (39)$$

ここに、 w_{x0} , w_{y0} , $R_x q_{x0}$, $R_x q_{y0}$ は n , m に無関係な実定数である。更に、次の関係によってビームパラメータ q_x , q_y を定義して、

$$q_x = z + R_x q_{x0} + j k w_{x0}^2 / 2, \quad q_y = z + R_x q_{y0} + j k w_{y0}^2 / 2 \quad (40)$$

式 (5) を用いるならば

$$\Psi_{nm}(\xi, \eta; z)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi w_{x0} w_{y0}}{2^{n+m-1} n! m!}} H_n(\sqrt{2} \pi w_{x0} \xi) H_m(\sqrt{2} \pi w_{y0} \eta)$$

$$\times \exp\{j 2\pi^2 (\xi^2 q_x + \eta^2 q_y) / k\} \quad (41)$$

また、式 (35) より二つの素波 $\Psi_{nm}(\xi, \eta; z)$, $\Psi_{n'm'}(\xi, \eta; z)$ の間には次の正規直交関係がある。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{nm}(\xi, \eta; z) \{\Psi_{n'm'}(\xi, \eta; z)\}^* d\xi d\eta$$

$$= \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (42)$$

素波の複素振幅は式 (41) のフーリエ逆変換によって求められる。式 (29) を用いれば

$$\psi_{nm}(x, y, z) = \frac{(-j)^{n+m}}{\sqrt{\pi 2^{n+m-1} n! m!}}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{w_x w_y}} H_n\left(\sqrt{\frac{x}{w_x}}\right) H_m\left(\sqrt{\frac{y}{w_y}}\right)$$

$$\times \exp\left\{-j \frac{k}{2} \left(\frac{x^2}{q_x} + \frac{y^2}{q_y}\right) + j \left(\frac{1}{2} + n\right) \tan^{-1} \frac{2z_x}{k w_{x0}^2}\right.$$

$$\left. + j \left(\frac{1}{2} + m\right) \tan^{-1} \frac{2z_y}{k w_{y0}^2}\right\} \quad (43)$$

ここに

$$z_x = z + R_x q_{x0}, \quad z_y = z + R_x q_{y0} \quad (44)$$

$$\frac{1}{w_x} = \frac{k}{2} \frac{w_{x0}}{|q_x|}, \quad \frac{1}{w_y} = \frac{k}{2} \frac{w_{y0}}{|q_y|} \quad (45)$$

また、これらの関係式を用いて式 (40) を書き改めると

$$q_x = j \frac{k w_{x0} w_x}{2} \exp\left(-j \tan^{-1} \frac{2z_x}{k w_{x0}^2}\right)$$

$$q_y = j \frac{k w_{y0} w_y}{2} \exp\left(-j \tan^{-1} \frac{2z_y}{k w_{y0}^2}\right) \quad (46)$$

直交関係は、フーリエ変換におけるパースバルの定理によって直ちに次のように得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{nm}(x, y, z) \{\phi_{n'm'}(x, y, z)\}^* dx dy = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (47)$$

式 (43) に示された波動は周知のエルミート・ガウス波である。式 (45), (40) よりよく知られた関係

$$w_x^2 = w_{x0}^2 \left\{ 1 + \left(\frac{2z_x}{kw_{x0}^2} \right)^2 \right\} \quad (48)$$

が求められ、 w_x は $z_x=0$ のとき最小値 w_{x0} をとる。 w_x は z におけるスポットサイズ、 $z_x=0$ の位置はビームウエスト、 w_{x0} はビームウエストのスポットサイズと呼ばれる。また、式 (40), (45) より

$$\frac{1}{q_x} = \frac{1}{R_x} - j \frac{2}{kw_x^2}, \quad \frac{1}{R_x} = \frac{z_x}{|q_x|^2} \quad (49)$$

の形に変形したとき、 R_x は波面の曲率半径を表わし、 z_x による変化は式 (49) より直ちに

$$R_x = z_x \left\{ 1 + \left(\frac{kw_{x0}}{2z_x} \right)^2 \right\} \quad (50)$$

この R_x は $z_x = kw_{x0}^2/2$ において最小値 $R_x = kw_{x0}^2$ をとる。この値は共焦点パラメータと呼ばれる。図 2 には

x と振幅との関係を、図 3 には式 (43) に現れた z_x に関する位相 $\Phi_{nx} = (1/2+n) \tan^{-1}(2z_x/kw_{x0}^2)$ の関係を表す。 $n=0$ の場合、 w_x は振幅が中心の値の e^{-1} となる x 方向の長さである。図 4, 図 5 には z_x に関する w_x , R_x の変化を示す。以上の関係は x 方向に関するものであるが、 y 方向についても全く同様な関係が導びかれる。

次に、円柱座標系の場合を考えてみよう。式 (37) を用いて n 次回転対称性の素波のスペクトルを次のようにおく。

$$\begin{aligned} \Psi_{Hl}^{(n)}(\rho; 0) &= 2\pi w_0 \sqrt{\frac{l!}{(n+l)!}} (\sqrt{2} \pi \rho w_0)^n L_l^{(n)}(2\pi^2 \rho^2 w_0^2) \\ &\times \exp(-\pi^2 \rho^2 w_0^2) \exp\left(j \frac{2\pi^2}{k} \rho^2 R_l q_0\right) \quad (51) \end{aligned}$$

ここに w_0 , $R_l q_0$ は l に無関係な実定数である。式 (40) と同様に

$$q = z + R_l q_0 + jkw_0^2/2 \quad (52)$$

とおき式 (15) を用いるならば

$$\begin{aligned} \Psi_{Hl}^{(n)}(\rho; z) &= 2\pi w_0 \sqrt{\frac{l!}{(n+l)!}} (\sqrt{2} \pi \rho w_0)^n L_l^{(n)}(2\pi^2 \rho^2 w_0^2) \\ &\times \exp(j2\pi^2 \rho^2 q/k) \quad (53) \end{aligned}$$

素波の複素振幅は上の $\Psi_{Hl}^{(n)}$ のハンケル逆変換と式 (10) を用いて次のように求められる。まず $\phi_{rl}^{(n)}$ は

$$\phi_{rl}^{(n)}(r, z) = \frac{2}{w} \sqrt{\frac{l!}{(n+l)!}} \left(\sqrt{2} \frac{r}{w}\right)^n L_l^{(n)}\left(2 \frac{r^2}{w^2}\right)$$

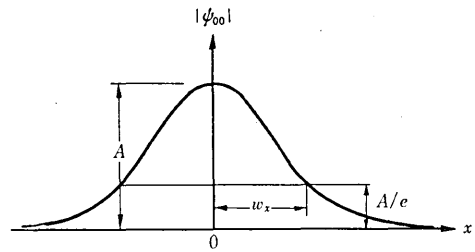


図 2 振幅 $|\phi_{00}|$ の変化

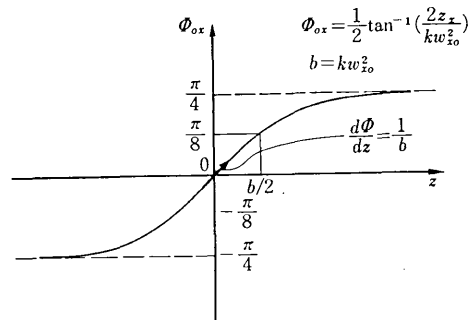


図 3 位相 ϕ_x の変化

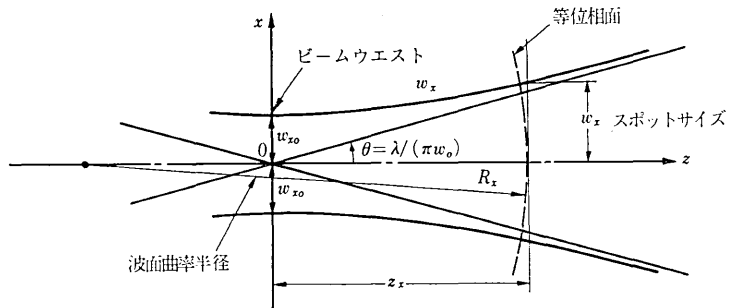


図 4 w_x と z との関係

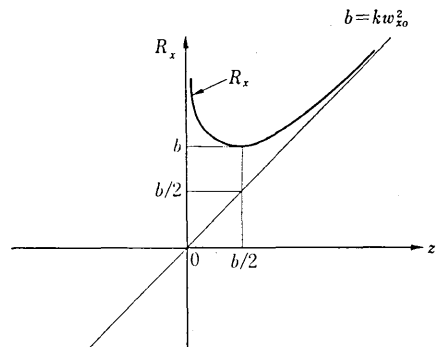


図 5 曲率半径 R_x の変化

$$\times \exp\left\{-j \frac{kr^2}{2q} + j(n+2l+1) \tan^{-1} \frac{2z_r}{kw_0^2}\right\} \quad (54)$$

ここに、 $z_r = z + R_l q_0$ であってスポットサイズ w 等につき

$$\frac{1}{w} = \frac{k}{2} \frac{w_0}{|q|}, \quad q = j \frac{kw_0 w}{2} \exp\left(-j \tan^{-1} \frac{2z_r}{kw_0^2}\right) \quad (55)$$

などの関係が成立することは直角座標の場合と同様である。式 (54), (10) を用いて素波の複素振幅は

$$\phi_i'^{(n)}(r, \theta, z) = \phi_{r_i}^{(n)}(r, z) e^{\pm jn\theta} \quad (56)$$

となる。直交関係は式 (38) より

$$\int_0^\infty \Psi_{H_1}^{(n)}(\rho; z) \{\Psi_{H_1}^{(n)}(\rho; z)\}^* \rho d\rho = \delta_{11} \quad (57)$$

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \phi_i'^{(n)}(r, \theta, z) \{\phi_i'^{(n')}\}(r, \theta, z) \cdot d\theta \rho d\rho = \delta_{11} \delta_{nn'} \quad (58)$$

式 (54) は周知のラゲール・ガウス波を表わしている。

以上の通り直角座標系及び円柱座標系において、正規直交関係を持ったスペクトル素波からよく知られたエルミート・ガウス波 $\psi_{nm}(x, y, z)$ とラゲール・ガウス波 $\phi_i'^{(n)}(r, \theta, z)$ を求めた。これらの表現とそのスペクトルの表現と比較してみると、 z に関する依存性の点においてスペクトルの表現の方が簡単である。このことから自由に伝搬出来る波動の取扱いにおいては以後においてスペクトルの表現を用いていくことにしよう。なお、複雑な波面を有する波の素波による展開はそれぞれの座標系で

$$\psi(x, y, z) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty c_{nm} \psi_{nm}(x, y, z) \quad (59)$$

$$\Psi(\xi, \eta; z) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty c_{nm} \Psi_{nm}(\xi, \eta; z) \quad (60)$$

$$\phi_i'(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty (a_l^{(n)} e^{jn\theta} + b_l^{(n)} e^{-jn\theta}) \phi_{r_i}^{(n)}(r, z) \quad (61)$$

$$\Psi'(\rho, \varphi; z) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty (a_l^{(n)} e^{jn(\varphi+n/2)} + b_l^{(n)} e^{-jn(\varphi+n/2)}) \Psi_{H_1}^{(n)}(\rho; z) \quad (62)$$

ここに c_{nm} , $a_l^{(n)}$, $b_l^{(n)}$ は何れも展開の係数である。

6. ビームパラメータの異った素波間の関係

前節から明らかなように直交関係を満たす素波を用いて複雑な波面を持った波動を表現しようとするならば、素波のビームパラメータは共通でなければならない。すなわち、 $z=0$ のビームパラメータの値が、

$$q_{x0} = R_e q_{x0} + j k w_{x0}^2 / 2 \quad (\text{直交座標の場合各 } x, y \text{ について})$$

$$q_0 = R_e q_0 + j k w_0^2 / 2$$

(円柱座標の場合各 n の値について)

が一定の値をとることが必要である。レーザー共振器の場合のように波面の曲率半径が反射鏡のそれにより制約される場合には、座標原点を定めると $z=0$ のビームパラメータの値は定まってしまうが、像を形成するような複雑な波面の波動では q_0 を定める上記のような制約はない。したがって q_0 はある程度任意に定められるわけで、それに伴ってビームパラメータが異なる素波間の交換の関係が必要になる。レーザー共振器と外来のビーム状の波との整合の問題も、外来ビーム波動をレーザー共振器のビームパラメータを有する素波の和として表わした

ときその係数の絶対値を 1 に近づける問題に帰着する。

直交座標系の場合、式 (41) が q_x , q_y の値によってきまるという意味で左辺を $\Psi_{nm}(\xi, \eta; q_x, q_y)$ と表わしておこう。すると q_x , q_y , n , m が変化して ' のついた値となったとき式 (27), (28) の関係式を用いて次の積分が得られる。

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \Psi_{nm}(\xi, \eta; q_x, q_y) \{\Psi_{n'm'}(\xi, \eta; q_x', q_y')\}^* d\xi d\eta = C_{nn'}(q_x, q_x') C_{mm'}(q_y, q_y') \quad (63)$$

ここに

$$C_{2n, 2m}(q, q') = (1 - |\Gamma|^2)^{1/4} e^{j\frac{1}{2}\Phi} (-2)^{-n-m} \sqrt{(2n)!(2m)!} \Gamma_\alpha^n \Gamma_\beta^m \times \sum_{l=0}^{\text{Min}(n, m)} \frac{(2j\sqrt{1-|\Gamma|^2-1})^{2l}}{(n-l)!(m-l)!(2l)!} \quad (64)$$

$$C_{2n+1, 2m+1}(q, q') = (1 - |\Gamma|^2)^{3/4} e^{j\frac{3}{2}\Phi} (-2)^{-n-m} \times \sqrt{(2n+1)!(2m+1)!} \Gamma_\alpha^n \Gamma_\beta^m \times \sum_{l=0}^{\text{Min}(n, m)} \frac{(2j\sqrt{1-|\Gamma|^2-1})^{2l}}{(n-l)!(m-l)!(2l+1)!} \quad (65)$$

$$C_{2n, 2m+1}(q, q') = C_{2n+1, 2m}(q, q') = 0$$

$$\Gamma_\alpha = \frac{(-jq')^* - (-jq)^*}{-jq + (-jq')^*}, \quad \Gamma_\beta = \frac{-jq - (-jq')}{-jq + (-jq')^*} \quad (66)$$

$$|\Gamma|^2 = |\Gamma_\alpha|^2 = |\Gamma_\beta|^2 \quad (67)$$

$$\Phi = \tan^{-1} \frac{R_e q_0 - R_e q_0'}{k(w_0^2 + w_0'^2)/2} \quad (68)$$

$$q = z + R_e q_0 + k w_0^2 / 2, \quad q' = z + R_e q_0' + k w_0'^2 / 2$$

したがって $\Psi_{n,m}(\xi, \eta; q_x, q_y)$ なる素波は異ったビームパラメータ q_x' , q_y' を有する素波 $\Psi_{n',m'}(\xi, \eta; q_x', q_y')$ によって次のように展開される。

$$\Psi_{nm}(\xi, \eta; q_x, q_y) = \sum_{n'=0}^\infty \sum_{m'=0}^\infty C_{nn'}(q_x, q_x') C_{mm'}(q_y, q_y') \times \Psi_{n',m'}(\xi, \eta; q_x', q_y') \quad (69)$$

特に $n=m=0$, $q_x=q_y=q$, $q_x'=q_y'=q'$ のときには

$$\Psi_{00}(\xi, \eta; q, q) = (1 - |\Gamma|^2)^{1/2} e^{j\Phi} \times \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^{n+m} \sqrt{(2n)!(2m)!} \Gamma_\beta^{n+m}}{2^{n+m} n! m!} \times \Psi_{2n, 2m}(\xi, \eta; q', q') \quad (70)$$

この関係は x 方向と y 方向とが等方的な Ψ_{00} 波で励振された場合に有用な関係式である。この関係から単位電力を有する $\Psi_{00}(\xi, \eta; q, q)$ で励振したとき $\Psi_{00}(\xi, \eta; q', q')$ の波の電力すなわち電力変換係数はよく知られているように $1 - |\Gamma|^2$ となることは明らかであろう。

7. 座標の変換とスペクトルとの関係

直角座標系において座標の回転を考えてみよう。図 6 の直角座標系において y 軸を中心として θ だけ回転し

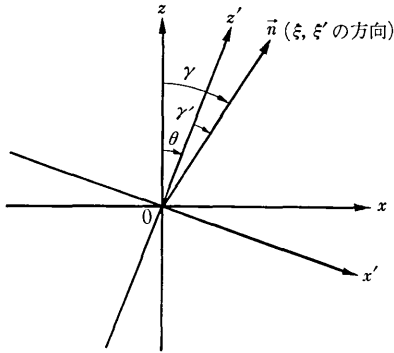


図6 座標の回転に伴った平面素波の進行方向 \vec{n} と座標軸との関係

たとき、古い座標系 (x, y, z) における $z=0$ の平面のスペクトルを $A(\xi, \eta; z=0)$ 、新しい座標系 (x', y', z') の $z'=0$ の平面のスペクトルを $A'(\xi', \eta'; z'=0)$ とする。この座標変換によって η は影響を受けないので $\eta'=\eta$ であるが、 ξ は ξ' に $\xi+d\xi$ は $\xi'+d\xi'$ に変化する。古い座標系の空間周波数 ξ, η を有する平面素波の伝搬方向を $z-x$ 平面に投影したとき z 軸となす角を γ 、 z' 軸となす角を γ' とすれば、空間周波数の定義から

$$\lambda\xi = \sin \gamma, \lambda\xi' = \sin \gamma' \tag{71}$$

また図6より γ と γ' の関係は明らかに

$$\gamma - \theta = \gamma' \tag{72}$$

いま、 ξ, η 方向の平面素波成分 $A(\xi, \eta; z=0) d\xi d\eta$ は新しい座標系では $A'(\xi', \eta'; z'=0) d\xi' d\eta'$ となっているはずであるから

$$A(\xi, \eta; z=0) d\xi d\eta = A'(\xi', \eta'; z'=0) d\xi' d\eta' \tag{73}$$

回転に伴う空間周波数 ξ_0 を $\lambda\xi_0 = \sin \theta$ により定義すれば式 (71), (72) より

$$\xi' = \xi \cos \theta - \varepsilon \sqrt{\xi_0^2 - \xi^2 \sin^2 \theta} \tag{74}$$

$$\frac{d\xi'}{d\xi} = \frac{\cos \gamma'}{\cos \gamma} = \cos \theta + \frac{\varepsilon \xi \sin^2 \theta}{\sqrt{\xi_0^2 - \xi^2 \sin^2 \theta}} \tag{75}$$

ここに ε は $\xi_0 > 0$ のとき $+1$ 、 $\xi_0 < 0$ のとき -1 となる定数である。また $\xi - \xi_0$ が小さいとして展開すれば

$$\xi' = \frac{\xi - \xi_0}{\cos \theta} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\xi - \xi_0}{\xi_0} \tan^2 \theta \left\{ 1 + \frac{\xi - \xi_0}{\xi_0} \tan^2 \theta + \dots \right\} \right] \tag{74'}$$

$$\frac{d\xi'}{d\xi} = \frac{1}{\cos \theta} \left[1 + \frac{\xi - \xi_0}{\xi_0} \tan^2 \theta + \frac{3}{2} \left(\frac{\xi - \xi_0}{\xi_0} \tan^2 \theta \right)^2 + \dots \right] \tag{75'}$$

これらの展開の初項のみをとると、図6の座標の回転のスペクトルに対する効果は ξ の原点移動と係数 $1/\cos \theta$ により表わされる。

また、図7の x, y 面内での平行移動においては、移

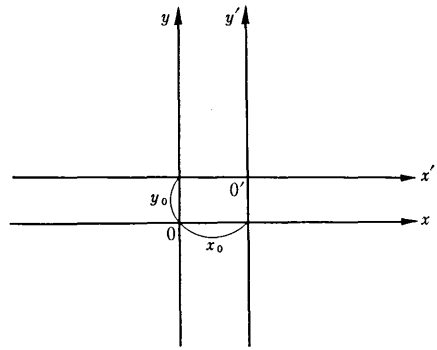


図7 座標の平行移動

動前の座標におけるスペクトル $A(\xi, \eta; z)$ は移動後の座標におけるスペクトル $A'(\xi', \eta'; z)$ によって次の通りに表わされる。

$$A(\xi, \eta; z) = A'(\xi', \eta'; z) e^{j2\pi(\xi x_0 + \eta y_0)} \tag{76}$$

この結果はフーリエ変換の定理と $x = x_0 + x'$ 、 $y = y_0 + y'$ の関係によって容易に得られる。

また $y-z$ 面内方向の電力は各平面素波について $AA^* \cos \gamma d\xi d\eta$ となるから全平面素波の全体のこの面内方向の電力は

$$P_{yz} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \eta; z=0) \{ A(\xi, \eta; z=0) \}^* \cos \gamma d\xi d\eta \tag{77}$$

図6の座標回転後においては

$$P_{y'z'} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A'(\xi', \eta'; z'=0) \{ A'(\xi', \eta'; z'=0) \}^* \cos \gamma' d\xi' d\eta' \tag{78}$$

式 (75) の関係を用いると $P_{yz} = P_{y'z'}$ となる。

8. 結 び

以上、空間周波数を用いた波動方程式から出発して、いかにして広義のガウス波が導びかれるかについて筆者が理解しているところを解説し、二、三の関連した問題について述べた。本文の扱い方が諸賢の多少とも御参考となれば幸いである。

おわりに、御指導、御検討いただいた本所齊藤成文教授、藤井陽一助教授、藤倉電線(株)中村二郎氏に深謝する。
(1972年2月23日受理)

文 献

- 1) H. Kogelnik and T. Li "Laser Beams and Resonators" Proc. IEEE, 54 p. 1312, 1966
- 2) A. G. Fox and T. Li "Resonant Modes in a Laser Interferometer" BSTJ, 40 p. 453, 1961
- 3) C. B. Burckhardt 私信 1966
- 4) 森口繁一, 他 "数学公式集Ⅲ" 岩波書店 1964
本文の式(27), (28), (29), (31), (34) は公式集に明示されていない。