

# 円筒殻の非線型振動に関する研究

Nonlinear Flexural Vibrations of Thin Circular Cylindrical Shell

柴田 耕一\*・川股 重也\*

Koichi SHIBATA and Shigeya KAWAMATA

## 1. ま え が き

ここでは図1で示されるような円筒殻の振動解析を行った。この場合、地震動によって誘発されるような横揺れは、変位を円周方向の三角級数に展開した場合 ( $w = w_n \cos N\theta$ ) の  $N=1$  としたモードに相当する。

円筒殻の  $N=1$  の振動形は、梁の振動形に類似のものであるが、実験<sup>1,11)</sup>では、微小変位を仮定した固有値問題<sup>2-5)</sup>から得られる固有振動とは大幅に異った振動現象が観察されている。その特徴として次のことが報告<sup>1)</sup>されている。

1) 線型理論から得られる  $N=1$  の振動数に比べて  $1/2 \sim 1/3$  の振動数である。2) 円筒下部が局部座屈によりひしゃげて4本の節線が生じ振動数は上部の振動の2倍となっている。

これは円周方向変位の波数の異なる二つ以上のモードが連成した非線型振動と思われるが、ここで

1) 円筒殻が横変位 ( $N=1$ ) するたびにモーメントの大きい部分の断面は正円よりむしろ楕円形に近い形 ( $N=2$ ) になり<sup>6)</sup>、図2より  $N=2$  の振動数は  $N=1$  の振動数の倍の関係になること<sup>12)</sup>。

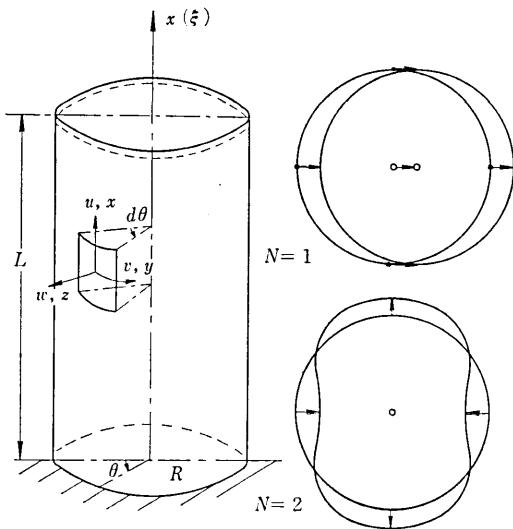


図 1

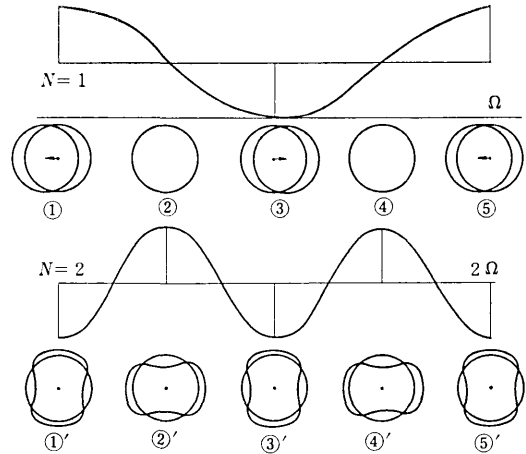


図 2

2)  $N=1$  の運動に際し  $N=2$  を誘発してお互に協調し合う運動はパラメータ励振として説明できること。等からこれらの現象を理論的に説明するために、 $N=1$  と  $N=2$  の二つの変位モードを仮定し、それが相互に影響し合う場合の非線型振動の解析を行なった。

計算例では  $N=1$  の方向に対して共振が二カ所、すなわち線型解の近辺と、その  $1/2 \sim 2/3$  の振動数の近辺で起こることがわかった。

解析方法としては、二つのモードに対し、ガラーキン法を適用して連立常微分方程式を求め、平均法により、この非線型方程式に対する近似解を求めた。

## 2. 仮 定 変 位

1) 円周方向のモードは三角級数で展開した形 (一項のみ) を用いる ( $N=1, N=2$ )。

2) 縦方向変位の仮定は質量分布に比例した水平力を静的に受ける場合の膜理論の解を用いる。

ただし、 $N=1$  では上端 Free<sup>4)</sup>、 $N=2$  では上下端 support として求める。

組合わされたモード形は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = A(\Omega t) \cdot f_x(\xi, \varphi) + B(2\Omega t) \cdot q_x(\xi, \varphi) \\ v &= v_1 + v_2 = A(\Omega t) \cdot f_y(\xi, \varphi) + B(2\Omega t) \cdot g_y(\xi, \varphi) \\ w &= w_1 + w_2 = A(\Omega t) \cdot f_z(\xi, \varphi) + B(2\Omega t) \cdot g_z(\xi, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (1-a)$$

\* 東京大学生産技術研究所 第5部

研究速報

ここで、

$$\xi = x/R, \quad \xi_0 = L/R \quad (1-b)$$

$$\left. \begin{aligned} f_x(\xi, \varphi) &= \{\xi^3/3 - (2\xi_0 + \beta)\xi^2/2 \\ &\quad + (\xi_0^2 + \beta\xi_0 + \nu)\xi\} \cos \varphi \\ f_y(\xi, \varphi) &= \{\xi^4/12 - (2\xi_0 + \beta)\xi^3/6 \\ &\quad + (\xi_0^2 + \beta(\xi_0 - 4 - 3\nu)\xi^2/2 \\ &\quad + 2(1 + \nu)(2\xi_0 + \beta)\xi\} \sin \varphi \\ f_z(\xi, \varphi) &= \{-\xi^4/12 + (2\xi_0 + \beta)\xi^3/6 \\ &\quad - (\xi_0^2 + \beta\xi_0 - 4 - \nu)\xi^2/2 \\ &\quad - (2 + \nu)(2\xi_0 + \beta)\xi \\ &\quad - \nu(\xi_0^2 + \beta\xi_0 - 1)\} \cos \varphi \end{aligned} \right\} (1-c)$$

$$\left. \begin{aligned} q_x(\xi, \varphi) &= \{2\xi^3/3 + \nu\xi - \xi_0\xi^2 \\ &\quad + \xi_0(\xi_0^2/3 - \nu)/2\} \cos 2\varphi \\ q_y(\xi, \varphi) &= \{\xi^4/3 - (2 + \nu)\xi^2 - 2\xi_0\xi^3/3 \\ &\quad + 2\xi((1 + \nu/2)\xi_0 + \xi_0^2/6) \\ &\quad - 1/2\} \sin 2\varphi \\ q_z(\xi, \varphi) &= \{-2\xi^4/3 + 4\xi^2 + 4\xi_0\xi^3/3 \\ &\quad - 2\xi_0\xi(2 + \xi_0^2/3)\} \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} (1-d)$$

$\beta$  は表 1 を参照。

(1-a) 式の  $A, B$  は振幅を表わす未知量で、運動方程式を解くことによって振動数  $\Omega$  に応じた値が求められる。

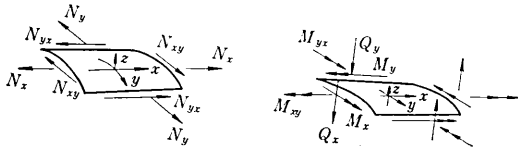


図 3

3. 円筒殻の基本式

諸量を図 3 ように定義する。

1) 歪-変位関係

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \partial_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} v \right\} \end{aligned} \right\} (2)$$

2) 釣合式

釣合式は Donnell 式に慣性項を加えたもので十分と思われるので、ここでは Donnell Type<sup>9)</sup>の式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{N_y}{R} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} N_x + \frac{\partial w}{\partial y} N_{xy} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} N_y + \frac{\partial w}{\partial x} N_{xy} \right) + q_1 &= \rho h \ddot{w} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_2 &= \rho h \ddot{v}, \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho h \ddot{u} \end{aligned} \right\} (3)$$

ただし  $\ddot{\phantom{u}} \equiv \frac{\partial}{\partial t}$

3) 応力-変位関係

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right\} \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right\} \\ N_{xy} &= Gh \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ M_x &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}, \quad M_y = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} (4)$$

4) (4) 式を(3)式に代入して釣合式を  $u, v, w$  で表現し、さらに(1)式の仮定モードをそれに代入すると、 $\xi$  と  $\varphi$  に関する三つの式を求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{R^2} (W1 \cdot \xi^{12} + W2 \cdot \xi^{11} + W3 \cdot \xi^{10} + W4 \cdot \xi^9 + W5 \cdot \xi^8 \\ + W6 \cdot \xi^7 + W7 \cdot \xi^6 + W8 \cdot \xi^5 + W9 \cdot \xi^4 \\ + W10 \cdot \xi^3 + W11 \cdot \xi^2 + W12 \cdot \xi + W13) \\ - \rho h (\dot{W}_1 \cdot \xi^4 + \dot{W}_2 \cdot \xi^3 + \dot{W}_3 \cdot \xi^2 + \dot{W}_4 \cdot \xi \\ + \dot{W}_5) + q_1 = 0 \\ \frac{1}{R} \frac{Eh}{1+\nu} (V1 \cdot \xi^8 + V2 \cdot \xi^7 + V3 \cdot \xi^6 + V4 \cdot \xi^5 + V5 \cdot \xi^4 \\ + V6 \cdot \xi^3 + V7 \cdot \xi^2 + V8 \cdot \xi + V9) \\ - \rho h (\dot{V}_1 \cdot \xi^4 + \dot{V}_2 \cdot \xi^3 + \dot{V}_3 \cdot \xi^2 + \dot{V}_4 \cdot \xi \\ + \dot{V}_5) + q_2 = 0 \\ \frac{1}{R} \frac{Eh}{1+\nu} (U1 \cdot \xi^7 + U2 \cdot \xi^6 + U3 \cdot \xi^5 + U4 \cdot \xi^4 + U5 \cdot \xi^3 \\ + U6 \cdot \xi^2 + U7 \cdot \xi + U8) - \rho h (\dot{U}_1 \cdot \xi^3 \\ + \dot{U}_2 \cdot \xi^2 + \dot{U}_3 \cdot \xi + \dot{U}_4) = 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

$U1 \sim U8, V1 \sim V9, W1 \sim W13, U1 \sim U4, V1 \sim V5, W1 \sim W5$  は  $\varphi, A, B$  の関数であるが紙数の関係で省略する。

5)  $A, B$  を未知数とする運動方程式

(5) 式に Galerkin 法を適用すると、 $\delta A(Q_t), \delta B(2Q_t)$  に関する項として次の二式が求まる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{A} + k_1 A^3 + k_2 A B^2 + k_3 A B + k_4 A^2 + k_5 A + k_6 = 0 \\ \ddot{B} + k_1' B^3 + k_2' A^2 B + k_3' A^2 + k_4' B = 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

$k_1 \sim k_6, k_1' \sim k_4'$  は  $L, R, h, \nu, E, \rho, D, q$  の関数であるがここでは紙数の関係で省略する。 $k_6$  は外力に関する項で、外力は  $q_1 = 0, q_2 = f_y(\xi, \varphi) \cdot F \cdot \cos \Omega t$  として

v 方向に加えている。

4. 平均法<sup>9),10)</sup>

(6)式に平均法を適用する。

$$\left. \begin{aligned} (k_5 - \Omega^2)\bar{A} + \frac{1}{2}k_3\bar{A}\bar{B} + \frac{1}{2}k_2\bar{A}\bar{B}^2 \\ + \frac{3}{4}k_1\bar{A}^3 + k_6 = 0 \end{aligned} \right\} (7-1)$$

$$\left. \begin{aligned} (k_4' - 4\Omega^2)\bar{B} + \frac{1}{2}k_3'\bar{A}^2 + \frac{1}{2}k_2'\bar{A}^2\bar{B} \\ + \frac{3}{4}k_1'\bar{B}^3 = 0 \end{aligned} \right\} (7-2)$$

ただし、近似解として  $A(\Omega t) = A \cos \Omega t$ ,  $B(2\Omega t) = B \cos 2\Omega t$  とする。

これが求める連立方程式であるが、(7-2)式の3次の項を neglect すると (ここでは、 $\bar{A}$  の傾向を見るために  $\bar{A}$  を主体として計算を進めたが、(7)式は  $\bar{B}$  に関する9次方程式なり  $\bar{A}$  と  $\bar{B}$  を計算することも出来る)

$$(k_4' - 4\Omega^2)\bar{B} + \frac{1}{2}k_3'\bar{A}^2 = 0 \quad (8-1)$$

これを(7-1)式に代入して  $\bar{A}$  に関する式を求める。 $\bar{A}\bar{B}^2$  は5次の項になるので、あらかじめ neglect しておく、

$$(k_5 - \Omega^2)\bar{A} + \frac{1}{2}k_3\bar{A}\bar{B} + \frac{3}{4}k_1\bar{A}^3 + k_6 = 0 \quad (8-2)$$

よって(8-1), (8-2)式より、

$$\begin{aligned} \bar{A}^3 + 4(k_5 - \Omega^2) / \{k_3 \cdot k_3' / (4\Omega^2 - k_4') + k_1 \cdot 3\} \times \bar{A} \\ + 4k_6 / \{k_3 \cdot k_3' / (4\Omega^2 - k_4') + k_1 \cdot 3\} = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

(9)式と(8-1)式より  $\Omega$  と  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  の関係を求めることができる。(7-1)式で  $\bar{B} = 0$  とすれば  $\bar{A}$  のみの ( $N=1$  のモードのみを仮定した) 場合の非線型解が得られる。

また  $\Omega^2 = k_5$  とすれば線型の固有値が求まる。

5. 計算例

ここでは表1の諸元をもつ2種の円筒殻について計算

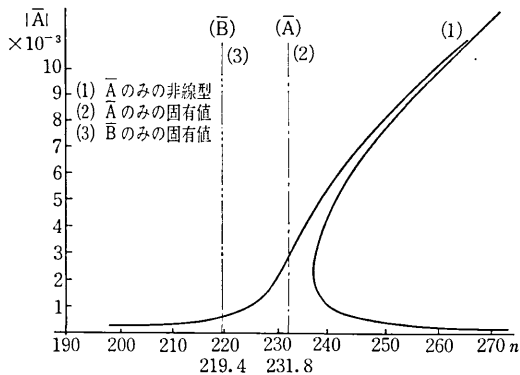


図 4

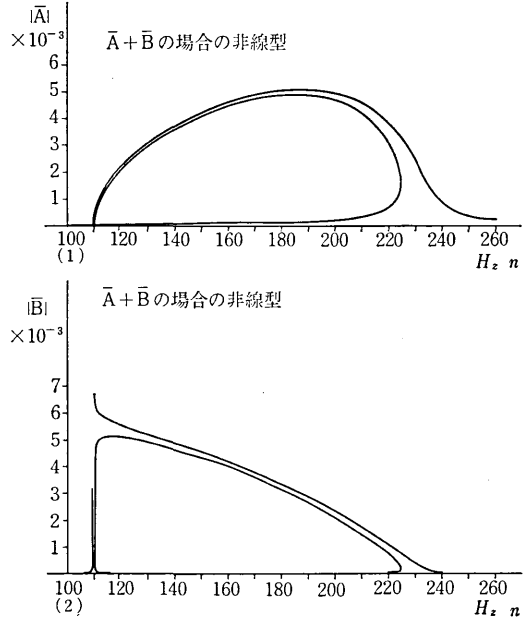


図 5

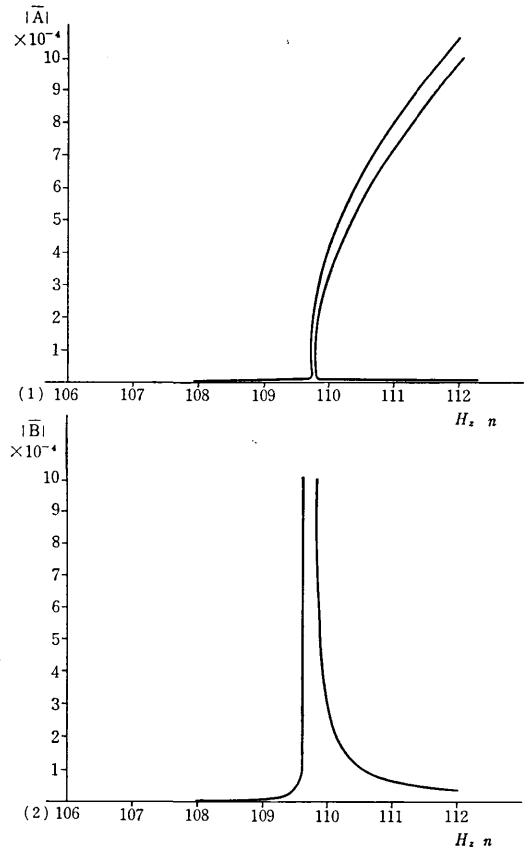


図 6 図 6-(1)は図 5(1)の詳細  
図 6-(2)は図 5(2)の詳細

研 究 速 報

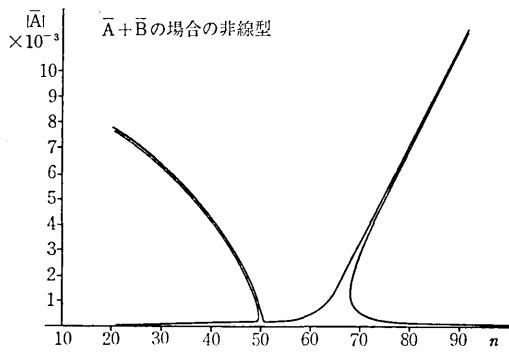


図 7

を行なった. 図 4~6 は例 1 の計算結果であり, 図 7 は例 2 の計算結果である.

表 1

	$\beta$	厚さ fcm	全長 Lcm	半径 Rcm	ヤング率 Ekg/cm <sup>2</sup>	ポアソン比 $\nu$	密度 $\rho$ kg/cm <sup>3</sup>
例 1	0.0	0.445	135.	25.	$2.1 \times 10^8$	0.3	$7.9 \times 10^{-6}$
例 2	4.16	0.31	121.	29.8	$3.125 \times 10^8$	0.3765	$1.192 \times 10^{-6}$

$\beta$  = 上蓋の単位表面積重量/円筒の単位表面積重量

図 4 は  $\bar{A}$  のみの場合の  $n-\bar{A}$  曲線であるがこれは Hardening Type である.  $n$  軸に直角な破線は  $\bar{A}, \bar{B}$  単独の場合の固有値である.

図 5 は  $\bar{A}, \bar{B}$  を考慮した場合の  $n-\bar{A}, \bar{B}$  関係である. ちょうど図 4 の先端が逆向きに先細りになってもう一度  $n$  軸に向って入りこんだ形である.

$\bar{A}$  の固有値近辺の立ちあがりの範囲にくらべて, もう一つの方は非常に狭い範囲で急に立ちあがっている. 図 6 はその詳細を示している.

横軸はどの図も外力 ( $v$  方向  $N=1$ ) の振動数  $n$  ( $= \Omega/2\pi$ ) をとっているのだから  $\bar{B}$  に関しては, 仮定から, 外力の振動数  $n$  の 2 倍 (横軸の値の 2 倍) で振動している. また, 常に図 5 のように上の方が連結するとはかぎ

らず, 例 2 では図 7 のような結果が得られた. これは円筒殻の特性に基づくものと思われる.

一方, このような方法で別の  $N$  との組み合わせも可能である.

謝 辞

多くの実験資料を提供くださいました柴田碧教授および円筒殻の基本式について, 貴重なご意見をいただきました中村輝男氏 (現日大講師) に深く感謝申し上げます. また計算に当り, 研究室の塩屋繁松氏, 遠藤彰氏, 半谷裕彦助手, には有益な助言をいただきました, 心からお礼申し上げます.

(1971 年 6 月 24 日受理)

参 考 文 献

- 1) 奥村敦史, 柴田碧, 重田達也: 「模型振動実験」, 原子炉容器および配管系の耐震設計法に関する試験研究成果報告書 日本機械学会 44.3.10
- 2) 奥村敦史, 山田真, 藤田宏: 「殻体振動解析プログラム」 同上 44.3.10
- 3) 川股重也, 柴田耕一: 「2 自由度系としての回転殻の固有振動解析」, 同上報告書別冊, 44.3.G-192
- 4) 川股重也, 柴田耕一: 「Rayleigh Ritz 法による円筒殻の固有振動解析」 1969.10 生産研究 21 巻 10 号
- 5) 柴田耕一, 川股重也: 「Rayleigh の商と緩和法による殻体の固有振動解析」, 日本建築学会大会 45.9
- 6) L. G. Bragier. B. Sc [On the Flexure of thin Cylindrical Shells and other "Thin" Sections] 1927.5.23
- 7) 戸田盛和: 「振動論」, 新物理学シリーズ 3 培風館 1968
- 8) Donell. L. H., [A New Theory for the Buckling of Thin Cylinders under Axial Compression and Bending] Trans. ASME. Vol. 56, P 795, 1934
- 9) David A Evensen [Nonlinear Flexural Vibrations of Thin Walled Circular Cylinders] NASA TN D-4090 29 PP (Aug. 1967)
- 10) Bogoliubov. N. N. and Mitropolsky Y. A. [Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations] Gardon & Breach Sci, Publ. Inc 1961
- 11) 小野宏治, 鳥海勲: 「容器型円筒シェル模型の振動破壊実験」 日本建築学会大会 昭和 44 年 8 月
- 12) 柴田耕一 「円筒シェルの非線形振動について」 高湯ゼミレポート, 1970, 8

