

曲率一次分布の平板曲げ有限要素マトリックス

Finite Elements for Plate Bending Based on Linearly Varying Moments

吉 田 裕*

Yutaka YOSHIDA

1. はじめに

先に, Hellinger-Reissner の変分原理にもとづいて, L. R. Herrmann によって誘導された平板曲げ有限要素マトリックス¹⁾とまったく同一のマトリックスが, 一般の応力分布や変位分布の基礎仮定からも誘導することができることを示し²⁾³⁾, このような事実にもとづいて, 有限要素マトリックスの定式過程に関する二, 三の考察を行なった⁴⁾.

平板曲げの有限要素において, 要素内で曲げおよび振りモーメントが一次分布するものと仮定すれば, 変位関数は直交座標 x および y に関する 3 次の多項式で表現すれば十分である. x および y に関する完全な形の 3 次の多項式は 10 項から成るが, 三角形要素の 3 つの頂点に設けた節点のそれぞれにおいて, その節点におけるたわみ w と直交する 2 方向のたわみの勾配 $w_{,x}$ および $w_{,y}$ を節点変位として設定する場合には, このような要素は合計 9 個の節点変位を有し, 多項式の項数と要素の自由度の数との不一致の故に, このような要素の剛性マトリックスの誘導は種々の困難に遭遇する.

また, このような 3 次の多項式によって与えられた変位関数から得られた剛性マトリックスから, 構造全体系の剛性マトリックスを構成する場合には, 1 つの節点を共有する各要素の, その節点における節点変位成分の連続の条件にもとづいてなされるのが普通である. この場合, 要素辺上のたわみの勾配は 2 次式で与えられ, この辺の法線方向のたわみの勾配が, この辺を挟む両端の節点変位によって一義的に決まらないために, 辺を共有する隣接する 2 つの要素間において, 法線方向のたわみの勾配の連続性が保証されない. したがって, 構造全体系の剛性マトリックスの構成における基本的条件である, 要素間における変位の連続性の保証が欠除することになり, 重要な問題点として議論されるところとなる.

前記の考察⁴⁾において述べた論点の 1 つは次のようなものであった. すなわち, もし 3 次の多項式によって与えられた剛性マトリックスが, 曲げおよび振りモーメントが一次分布することを前提として誘導されるものであるとすれば, 変位関数の設定の時点において, その裏面

に三角形要素の各頂点に設けられた節点における曲げおよび振りモーメントの値が, 変位関数の係数ベクトルの関数として設定されることになり, 要素内で一次分布するこれらの力量は, 各節点における値によって一義的に決まる. たとえば, 一次分布する辺上の曲げモーメントは, その辺を挟む 2 つの節点の曲げモーメントの値によって一義的に決まり, 節点における曲げモーメントの連続を保証することによって構造全体系のマトリックスを構成するものとすれば, 要素間の曲げモーメントの連続性が保証されることになるということである. そして, 3 次の多項式で与えた変位関数から得られる有限要素マトリックスをこのような形で理解し, 定式化することが可能であるということであった.

ここでは, このような論点の具体的例証として, 曲率一次分布の平板曲げ有限要素マトリックスの誘導を試みる.

2. 誘導過程の基礎

要素 m のポテンシャルエネルギー関数 Π_{pm} は

$$\Pi_{pm} = \frac{1}{2} \int_{A_m} \epsilon^T D \epsilon dA - \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (1)$$

と与えられる. ここに, ϵ は要素のたわみ w の曲率で

$$\epsilon^T = \{w_{,xx} \ w_{,yy} \ 2w_{,xy}\} \\ w_{,xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad w_{,yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \dots \quad (1')$$

である. また, \mathbf{u} は節点変位, \mathbf{f} は \mathbf{u} に対応する節点力で, 式(1)の $\mathbf{u}^T \mathbf{f}$ の項は仮想仕事の原理から

$$\mathbf{u}^T \mathbf{f} = \int_{A_m} p w dA + \int \mathbf{u}_B^T \mathbf{f}_B ds \quad (2)$$

である. ここに, \mathbf{u}_B は要素の周辺上的変位, \mathbf{f}_B は \mathbf{u}_B に対応する要素周辺上の力量である.

要素の変位形 w を節点における変位成分の値 \mathbf{u}_n の関数として

$$w = \phi_n^T \mathbf{u}_n \quad (3)$$

のように与えると, 曲率 ϵ は変位関数の微分によって, \mathbf{u}_n の関数として

$$\epsilon = \mathbf{P}_n \mathbf{u}_n \quad (4)$$

のように得られる. ここに

$$\mathbf{P}_n^T = \{\phi_{n,xx}^T \ \phi_{n,yy}^T \ 2\phi_{n,xy}^T\} \quad (4')$$

* 東京大学生産技術研究所 第 5 部

である。

いま、節点変位 u を u_n と等しく

$$u = u_n \tag{5}$$

とおけば、式(1)の停留条件より

$$f = ku \tag{6}$$

$$k = \int_{A_m} P_u^T DP_u dA \tag{7}$$

が得られる。

要素の変位形が u_n の関数として与えられるのであるから、要素周辺における変位 u_B

$$u_B^T = \{u_{B1}^T u_{B2}^T u_{B3}^T\}, u_{Bi}^T = \{w_{w,i} w_{,n}\}_i$$

も u_n の関数として

$$u_B = L_i u_n \tag{8}$$

と与えられる。式(3)および式(8)を式(2)に代入すれば、式(6)の節点力 f の意義が

$$f = \int_{A_m} p \phi_u dA + \int L_i^T f_B ds \tag{9}$$

のように示されることが分る。

いま、板の曲げの問題のように、応力-ひずみ関係式などの基礎方程式が既に知られている場合には、要素周辺の変位 u_B に対応する力量 f_B は、たとえば

$$M_n = -D(w_{,nn} + \nu w_{,ss})$$

のように与えられるから、変位関数が与えられると f_B

$$f_B^T = \{f_{B1}^T f_{B2}^T f_{B3}^T\}, f_{Bi}^T = \{Q_n - M_{n,i} - M_{n,i}\}_i$$

は u_n の関数として

$$f_B = Q_i u_n \tag{10}$$

と与えられる。

ここで、変位関数 $w(x, y)$ が x および y の3次の多項式で与えられるものとするれば

$$w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = 0 \tag{11}$$

となる。したがって、式(2)の右辺第2項に式(8)および式(10)を代入して得られる次式

$$\int u_B^T f_B ds = u_n^T \int L_i^T Q_i ds u_n \tag{12}$$

から、式(7)の剛性マトリックス k が

$$k = \int L_i^T Q_i ds \tag{13}$$

としても全く同じ内容として得られることは、基礎理論から必然の帰結である。

したがって、変位関数が式(11)を満足するように与えられるかぎりにおいては、式(9)の節点力 f の意義は

$$f = \int L_i^T f_B ds \tag{14}$$

であると理解し、 $\int_{A_m} p \phi_u dA$ の項は、作用外力 p の要素周辺の力量 f_B と等価な力量への変換ないしは式(14)で与えられる節点力と等価な力量への変換として認識す

るのが妥当である。

次に、以上の考察にもとづいて、具体的な要素マトリックスの誘導を試みる。

3. 3 次 の 多 項 式 に も と り つ い た 要 素 マ ト リ ッ ク ス

基礎仮定として、要素の変位形を次のように完全な3次の多項式で仮定する。

$$w(x, y) = \langle 1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \rangle \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{10} \end{Bmatrix} = \phi_q^T q \tag{15}$$

式(15)のように要素の変位形を仮定すると、要素の曲率 ϵ は

$$\epsilon = P_q q$$

$$P_q = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

と得られる。また、要素周辺の変位 u_B は

$$\left. \begin{aligned} w_{,si} &= -s_i w_{,x} + c_i w_{,y} \\ w_{,ni} &= c_i w_{,x} + s_i w_{,y} \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

$$\left. \begin{aligned} c_i &= \cos \alpha_i = \frac{y_j - y_i}{a_i}, \quad s_i = \sin \alpha_i = -\frac{x_j - x_i}{a_i} \\ (i \ j) &= (1 \ 2) (2 \ 3) (3 \ 1) \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

より、たとえば、

$$\left. \begin{aligned} (w_{,s})_{Bi} &= \langle 0 \ -s_i \ c_i \ -2s_i \bar{x}_i \ c_i \bar{x}_i - s_i \bar{y}_i \\ &\quad 2c_i \bar{y}_i \ -3s_i \bar{x}_i^2 \ c_i \bar{x}_i^2 - 2s_i \bar{x}_i \bar{y}_i \\ &\quad 2c_i \bar{x}_i \bar{y}_i - s_i \bar{y}_i^2 \ 3c_i \bar{y}_i^2 \rangle q \\ \bar{x}_i &= x_i + (x_j - x_i) \frac{s}{a_i}, \quad \bar{y}_i = y_i + (y_j - y_i) \frac{s}{a_i} \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

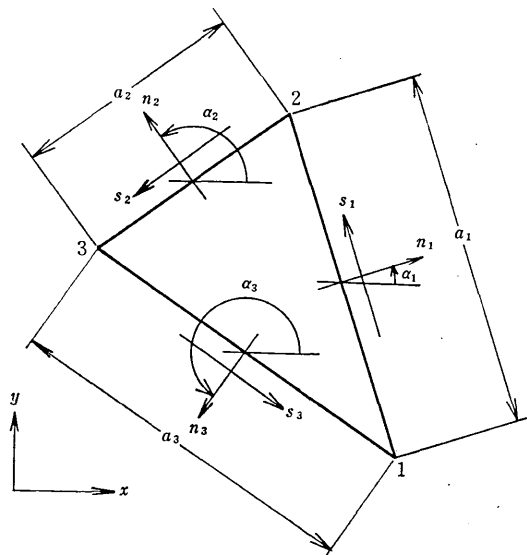


Fig. 1 Angle notation

研 究 速 報
 のように得られるから、 u_B は要素周辺に沿った座標系 s の関数である L_q によって

$$u_B = L_q q \quad (20)$$

と得られる。ここに、 (x_i, y_i) は節点の座標、 a_i は要素の辺長、 α_i は要素の辺の法線の x 軸となす角度である (Fig. 1)。

次に、要素内で曲げおよび振りモーメントが線形分布するものと仮定し、節点におけるこれらの力量の値 m_n

$$m_n^T = \{m_{n1}^T \ m_{n2}^T \ m_{n3}^T\}, \quad m_{ni}^T = \{M_x \ M_y \ M_{xy}\}_i$$

の関数として表現する。要素内の力量の分布がこのように線形分布として仮定されると、要素周辺上の力量 f_B のうち M_n および M_{ns} は

$$\left. \begin{aligned} -M_{ni} &= -c_i^2 \bar{M}_{xi} - s_i^2 \bar{M}_{yi} - 2s_i c_i \bar{M}_{xyi} \\ -M_{nsi} &= s_i c_i \bar{M}_{xi} - s_i c_i \bar{M}_{yi} - (c_i^2 - s_i^2) \bar{M}_{xyi} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

と表わされる。ここに $\bar{M}_{xi}, \bar{M}_{yi}, \bar{M}_{xyi}$ は要素周辺上の曲げおよび振りモーメントで、辺を挟む両端の節点における力量によって、たとえば

$$\bar{M}_{xi} = M_{xi} + (M_{xj} - M_{xi}) \frac{s}{a_i}$$

のように与えられる。また、辺上のせん断力 Q_n は辺上で一定値をとり

$$\left. \begin{aligned} Q_{ni} &= \frac{1}{4(1+\nu) a_i A_m} \{ \beta_i (M_{xi} + M_{yi}) \\ &\quad + \beta_k (M_{xj} + M_{yj}) - 2a_i^2 (M_{xk} + M_{yk}) \} \\ \beta_i &= a_i^2 + a_j^2 - a_k^2 \\ (i \ j \ k) &= (1 \ 2 \ 3) (2 \ 3 \ 1) (3 \ 1 \ 2) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

のように与えられるから、節点における力量 m_n の関数として

$$f_B = R_m m_n \quad (23)$$

と表わすことができる。

したがって、要素のポテンシャルエネルギー関数 Π_{pm} は

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{pm} &= \frac{1}{2} \int_{A_m} \epsilon^T D \epsilon dA - \int u_B^T f_B ds \\ &= \frac{1}{2} q^T H_q q - q^T T_{qm} m_n \\ H_q &= \int_{A_m} P_q^T D P_q dA \\ T_{qm} &= \int L_q^T R_m ds \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

と与えられる。式(24)の停留条件より

$$H_q q = T_{qm} m_n \quad (25)$$

したがって、

$$\int u_B^T f_B ds = m_n^T T_{qm}^T H_q^{-1} T_{qm} m_n \quad (26)$$

となり、 m_n に対応する変位を u_m とすれば

$$\left. \begin{aligned} u_m &= a m_n \\ a &= T_{qm}^T H_q^{-1} T_{qm} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

と得られる。

いま、仮定された曲げおよび振りモーメント分布が節点における力量 m_n の関数として表現され、これに対応して、節点力 f

$$f^T = \{f_1^T \ f_2^T \ f_3^T\}, \quad f_i^T = \{P \ M_x \ M_y\}_i$$

が m_n の関数として

$$f = S m_n \quad (28)$$

のように表わされるものとする。式(28)の変換マトリックス S は、たとえば次のような関係式から得られる。

$$\begin{aligned} (P)_i &= \frac{1}{2} \{ Q_{ni} a_i + Q_{nk} a_k + (M_{nsi})_j - (M_{nsi})_i \\ &\quad + (M_{nsk})_i - (M_{nsk})_k \} + (M_{nsi})_i - (M_{nsk})_i \\ &= \frac{1}{2} \{ Q_{ni} a_i + Q_{nk} a_k + (M_{nsi})_j + (M_{nsi})_i \\ &\quad - (M_{nsk})_i - (M_{nsk})_k \} \end{aligned} \quad (29)$$

ここに、 $(M_{nsi})_j$ は節点 j における辺 i に関する振りモーメントを意味し

$$(M_{nsi})_j = -s_i c_i M_{xj} + s_i c_i M_{yj} + (c_i^2 - s_i^2) M_{xyj}$$

と与えられる。また、

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_i &= \frac{1}{3} y_{ji} M_{xi} + \frac{1}{6} y_{ji} M_{xj} + \frac{1}{3} y_{ik} M_{xi} \\ &\quad + \frac{1}{6} y_{ik} M_{xk} \\ &= -\frac{1}{3} y_{kj} M_{xi} + \frac{1}{6} y_{ji} M_{xj} + \frac{1}{6} y_{ik} M_{xk} \\ (M_y)_i &= -\frac{1}{3} x_{kj} M_{yi} + \frac{1}{6} x_{ji} M_{yj} + \frac{1}{6} x_{ik} M_{yk} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ここに、

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j$$

である。式(28)の関係式が仮定されると、節点力 f に対応する節点変位 u は

$$(\delta m_n)^T u_m = (\delta f)^T u = (\delta m_n)^T S^T u \quad (31)$$

より

$$S^T u = u_m = a m_n \quad (32)$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} f &= k u \\ k &= S a^{-1} S^T \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

のように剛性マトリックス k が得られる。式(33)に得られた剛性マトリックスは、式(29)および(30)に示したように、節点力を評価する際に、要素周辺上に分布する力量と等価な力量を節点において集合して代表させるという平均値の意味での力量による平衡条件を満たしているだけで、要素周辺における変位の連続性に関する配慮はなされていない。

4. 異なった過程

次に、異なった過程として次のような可能性を考える

ことができる。すなわち、式(15)のように要素の変位形が仮定されると要素内の曲率の分布が式(16)のように得られる。式(16)および3次の微分形に要素周辺の座標を代入し力量に変換することによって、要素周辺上の力量 f_B が係数ベクトル q の関数として

$$f_B = Q_q q \tag{34}$$

と表わすことができる。いま、要素周辺上の f_B に対応する変位 u_B を節点変位 u の関数として

$$u_B = L_s u \tag{35}$$

のように仮定すると、要素のポテンシャルエネルギー関数 Π_{pm} は

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{pm} &= \frac{1}{2} q^T H_q q - u^T T_{uq} q \\ H_q &= \int_{A_m} P_q^T D P_q dA \\ T_{uq} &= \oint L_s^T Q_q ds \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

のように与えられる。式(36)の停留条件より

$$T_{uq}^T u = H_q q \tag{37}$$

が得られる。したがって

$$\oint u_B^T f_B ds = u^T T_{uq} H_q^{-1} T_{uq}^T u \tag{38}$$

となり、節点変位 u に対応する節点力を f とすれば

$$\left. \begin{aligned} f &= k u \\ k &= T_{uq} H_q^{-1} T_{uq}^T \end{aligned} \right\} \tag{39}$$

として要素の剛性マトリックスが得られる。この場合には、要素周辺上の変位 u_B を節点変位の関数として式(35)のように仮定したという意味において、要素周辺における変位の要素間の連続性に関する配慮をすることができる。

5. 応力分布仮定からの誘導

式(27)に得られた撓性マトリックス α は、基礎仮定としての変位分布仮定にもとづいて誘導されたという意味において1つの意義を有する。式(16)から明らかなように、式(15)のような完全な3次の多項式で変位形を仮定しても、振りの項 $w_{,xy}$ は $w_{,xz}$ および $w_{,yy}$ の線形分布に対して独立な線形分布ではない。

ここでは、基礎仮定として要素内の曲げおよび振りモーメントの分布を完全に独立な線形分布と仮定する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \phi_n^T m_n \\ \sigma^T &= \{M_x \ M_y \ M_{xy}\} \\ m_n^T &= \{m_{n1}^T \ m_{n2}^T \ m_{n3}^T\} \\ m_{n1}^T &= \{M_x \ M_y \ M_{xy}\}_i \\ \phi_n^T &= \left\{ \begin{array}{ccccccc} \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \tag{40}$$

ここに、 ζ_i は面積座標である。

要素内の曲げおよび振りモーメントの分布が式(40)のように仮定されると、要素のひずみエネルギー U_m は

$$U_m = -\frac{1}{2} \int_{A_m} \sigma^T \epsilon dA = \frac{1}{2} \int_{A_m} \sigma^T N \sigma dA \tag{41}$$

と表わされる。ここに

$$N = \frac{12}{E h^3} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix}$$

である。式(41)に式(40)を代入して

$$U_m = \frac{1}{2} m_n^T \int_{A_m} \phi_n N \phi_n^T dA m_n$$

より、式(27)に対応する撓性マトリックス α が

$$\alpha = \int_{A_m} \phi_n N \phi_n^T dA \tag{42}$$

と得られる。式(42)のように撓性マトリックス α が得られると、式(28)～式(33)に至る変換によって、剛性マトリックスに変換することが可能である。このような変換は、 m_n の内容と節点力 f の内容とが異なるために必要となることはもちろんであるが、特にその次元の違いに注意する必要がある。すなわち、節点力は要素周辺に分布する力量を積分した値と等価な値を節点で代表させるものとなることである。

式(27)または式(42)のように撓性マトリックスが得られると、構造全体系において曲げおよび振りモーメントが連続するように、次のようにして構造全体系のマトリックスを構成することが可能である⁵⁾⁶⁾。すなわち、要素 m のひずみエネルギー U_m が

$$U_m = \frac{1}{2} m_n^T \alpha m_n \tag{43}$$

と得られると、構造全体のひずみエネルギー U は

$$U = \sum_m U_m = \frac{1}{2} M^T A M \tag{44}$$

と表わされる。ここに、 A は構造全体系の撓性マトリックス、 M は構造全体系の曲げおよび振りモーメントのベクトルである。ベクトル M は構造全体系において平衡条件を満足するように決められなければならない。曲げおよび振りモーメントが線形分布であると仮定すれば要素辺上のせん断力は、式(22)に示したように与えられる。要素辺上のせん断力を辺を挟む両端の節点で代表させるという意味における近似的平衡条件を用いるものとするれば、節点 i で代表するせん断力 $(P)_i$ は

$$(P)_i = \frac{1}{2} \{Q_{n1} a_{i1} + Q_{n3} a_{i3}\} \tag{45}$$

のように与えられる。したがって、式(22)より $(P)_i$ は m_n の関数として表現される。節点を共有する全ての要素の節点力の和が作用外荷重と平衡するという意味にお

研究速報

いて、この関係式を加え合せることによって構成される構造全体系のマトリックスを \mathbf{E} と表わす。すなわち、平衡条件は

$$\mathbf{EM} - \mathbf{F} = 0 \quad (46)$$

と表わすことができる。ここに、 \mathbf{F} は作用鉛直外荷重のベクトルである。したがって、式(44)のエネルギー関数の極値を式(46)の付帯条件のもとで解くことになる。Lagrange の乗数 λ を導入して、エネルギー関数は次のように与えられる。

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M} + \lambda^T (\mathbf{E} \mathbf{M} - \mathbf{F}) \quad (47)$$

式(47)は、次のようにマトリックス表示することができる。

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{M} \\ \lambda \end{matrix} \right\}^T \left[\begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & \cdot \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \mathbf{M} \\ \lambda \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mathbf{M} \\ \lambda \end{matrix} \right\}^T \left\{ \begin{matrix} \cdot \\ \mathbf{F} \end{matrix} \right\} \quad (48)$$

式(48)の停留条件より

$$\left[\begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & \cdot \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \mathbf{M} \\ \lambda \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \cdot \\ \mathbf{F} \end{matrix} \right\} \quad (49)$$

が得られる。

Lagrange の乗数は、鉛直方向の外荷重に対応する鉛直変位を意味するが、これは各要素周辺の鉛直変位の積分値を節点で代表する意義をもち、その次元は変位の次元に長さの次元を掛けたものとなる。式(49)にもとづいて解析を行なう場合には、境界条件として曲げおよび振りモーメントの条件に加えて Lagrange の乗数で与えられる平均値の意味を持つ鉛直変位に関する条件も考慮する必要がある。

6. おわりに

以上に、曲げおよび振りモーメントが線形分布することを基礎仮定とした平板曲げの有限要素マトリックスの誘導を題材として、有限要素マトリックスの定式過程について、具体的内容を示しながら考察を行なった。

何かひどくまわりくどい説明になり、論点があいまいになってしまったが、これは著者自身にまだ明確に整理されていない点が多くあるためである。したがって、数値計算等による具体的検討を進め、それらのデータをもとにして、さらに論点を整理したいと考えている。

作用荷重系が、たとえば等分布荷重などと確定的に与えられている場合には、有限要素法によって正しく実際

に適合した解析を行なうことが可能であるが、作用荷重の任意性に対して完全に適合しうような要素は考えられない。したがって、任意の外荷重系に適用しようという有限要素解析の使命に対しては、要素分割を細かくすればある程度の精度の解が得られるということで妥協せざるをえない。

要するに、一般の Rayleigh-Ritz 法の場合のように、仮定された変位や応力の分布型が構造全体において高次の領域まで連続で、また仮定された分布型それ自体において無限の自由度をとりうるように設定する場合、すなわち仮定した変位または応力分布型に真の分布型を内包する場合と、有限要素解析において一般にとられているように、要素内で仮定された変位や応力分布型は有限の自由度に固定し、対象を構成する要素の数を増加することによって対象全体の自由度を高め、実際の系に近づけようとする場合とでは基本的な相違がある。

すなわち、有限要素法の特長として明記しなければならないのは、有限要素法においては要素内の領域において仮定された変位または応力分布型では対応できない高次の分布形を必要とする作用荷重分布に対しては、対象全体としての系の自由度がいかに高められても、要素内の変位分布型または応力分布型自体が真の分布型に近づくことはできず、あくまでも要素周辺における要素間の高次の不連続量によって表わされる等価な平衡関係が真の分布型を評価しようように近づくことによって、収束が保証されるということである。(1971年5月4日受理)

参考文献

- 1) L. R. Herrmann: Finite Element Bending Analysis for Plates; J. of Eng. Mech., Div. ASCE, 93, EM 5, pp. 13-26 (1967)
- 2) 吉田 裕: 応力分布仮定から誘導された Herrmann の Mixed Model と同一の有限要素マトリックス; 生産研究, 23, 2 (1971)
- 3) 吉田 裕: 変位分布仮定から誘導された Herrmann の Mixed Model と同一の有限要素マトリックス, 生産研究, 23, 3 (1971)
- 4) 吉田 裕: 有限要素マトリックスの定式過程に関する一考察; 土木学会論文報告集, 第190号 (1971)
- 5) R. E. Jones: A Generalization of the Direct-Stiffness Method of Structural Analysis; AIAA Journal, 2, 5, pp. 821-826 (1964)
- 6) E. Anderheggen: Finite Element Plate Bending Equilibrium Analysis; J. of Eng. Mech., Div. ASCE, 95, EM 4, pp. 841-857 (1969)