研究速報

UDC 62-503

# バナッハ空間における最適制御問題の近似解法

An Approximate Method for Solving Optimal Control Problems in Banach Space

小林幹夫*
Mikio KOBAYASHI

## 1. 緒言

最大原理あるいは無限次元空間に拡張された Kuhn-Tucker の定理等を用いて最適制御問題を解くという方法は解析解が得られるような問題に対しては特に有力である．しかし，状態変数あるいは制御変数に制限のある分布定数系等の問題においては，上述の方法によって解析解を得るのは一般に大変困難である．したがって，このような問題に対して近似解を求めるということが一つの課題となる．この種の問題を近似的に解く一つの有力な方法は，重み関数を導入して拘束のない問題をつくり，それを逐次解くことにより最適解に接近するという方法である．以下においてはこの方法を重み関数法とよぶことにする．

一般に近似計算法において特に重要な問題点の一つは近似解が真の解に収束するか否かということである．本研究の目的は，重み関数法における近似解がある条件のもとで最適解に収束（強あるいは弱収束）することを示すことである．ここで扱うのはバナッハ空間で定義され等式および不等式拘束条件を有する問題である．拘束条件は従来ユークリッド空間あるいは $L^\infty$ 等かなり限定された空間で扱われているが，ここではもっと一般的な空間（たとえば $L^p$, $1 \leqq p \leqq \infty$ 等も含めた空間）において扱うことにする．

## 2. 最適制御問題の記述

各変数の定義域を $[T, \Omega]$ で表わし，バナッハ空間を $Bi$ で表わす．制御変数，状態変数をそれぞれ $u, z$ で表わし，$u \in B_1$, $z \in B_2$ とする．$z = z(u)$; $B_1 \to B_2$ は連続な関数であり，定数項を除いて $u$ に関して線形であるものとする．評価関数は

$$f(z, u) \qquad f \in R^1 \qquad (1)$$

で与えられる．$R^{(\ )}$は（ ）次元ユークリッド空間を表わす．拘束条件は

$$g(z, u) \leqq o,\ h(z, u) = o,\ g \in B_3,\ h \in B_4 \qquad (2)$$

で与えられる．つぎの問題を考える．

〔問題 $A$〕（2）式で与えられる拘束条件を満足し，（1）式で与えられる $f(u, z)$ を最小にする $u_0 \in B_1$ を求めよ．

* 東京大学生産技術研究所 第2部 大島研究室

## 3. 拘束条件

以下で扱う拘束条件をつぎに述べるように二つの case に分類しておく．

〔$C$—1〕（2）式で表わされる条件が有限個の点 $\{\varDelta i\} \in [T, \Omega] \times R^{(\ )}$ の上で与えられている場合．

〔$C$—2〕（2）式で表わされる条件が有限個の区間（点と異る）$\{\varDelta i\} \in [T, \Omega]$ の上で与えられている場合．

$C$—1に属するものとしては，終端時刻，途中の時刻あるいは $\Omega$ 内の点等における拘束があり，$C$—2に属するものとしては，全時間区間あるいは $\Omega$ 全体等における拘束がある．前者は静的な性質をもっており，後者は動的な性質をもっている．

## 4. 重み関数法の概念

問題 $A$ に対応して新しくはん関数

$$I(u, n) = I(f, g, h, n),\ n = 1, 2 \cdots\cdots,\ I \in R^1 \qquad (3)$$

を導入する．つぎの問題を考える．

〔問題 $B$〕$n$ が与えられたとき，（3）式で与えられる $I(u, n)$ を最小にする $u_n \in B_1$ を求めよ．

問題 $A$ を解くかわりに，各 $n$ に対して問題 $B$ を解き $u_0$ に接近しようとするのが重み関数法の基本的な考え方である．$I(u, n)$ は従来多くの文献で

$$I(u, n) = f(z, u) + \Phi(g, h, n) \qquad (4)$$

のような形にとられており，$\Phi$ は penalty function とよばれている．本稿では $I(u, n)$ として（4）式で表わされる形のものを用い，$\Phi$ のことを重み関数とよぶことにする．

## 5. 設定条件と問題 $A, B$ の解の存在性および近似解の収束性

$f(z, u)$, $g(z, u)$, $h(z, u)$ は $u$ に関するはん関数と考えることができるので，以下では $f(u), g(u), h(u)$ と表わすことにする．はじめに問題 $A$ の解の存在性について述べる．つぎの条件が成立しているものとする．

〔$A$—1〕$B_1$ は回帰的なバナッハ空間であり，$f(u)$, および $g(u)$ は $u$ に関する連続凸はん関数である．$h(u)$ は定数項を除いて $u$ に関して線形である。

〔$A$—2〕$U_0 \equiv \{u | g(u) \leqq o, h(u) = u \in B_1\} \neq \phi$

〔$A$—3〕$U\nu \equiv \{u | f(u) \leqq \nu, u \in U_0\}$ とする．ある有

限の $\nu$ に対し, $U\nu \neq \phi$ かつ $U\nu$ は有界である.

〔補題 1〕 条件 $A$—1〜$A$—3 のもとで $f(u)$ は $U\nu$ の上で最小値をとる. すなわち問題 $A$ の解が存在する.

〔証明〕 $f$ は連続凸はん関数であるから $U\nu$ は有界閉凸集合である. $B_1$ は回帰的なバナッハ空間であるから Balakrishnan[1] の定理 2.1 より

$$inf\ u \in U\nu\ f(u)=f(u_0)$$

を満足する $u_0 \in U\nu$ が存在する. (証明終り)

つぎに問題 $B$ の解の存在性について述べる. (4) 式で定義される $I(u,n)$ を次のようにかきなおす.

$$I(u,n)=f(u)+s_n L(g,h),\ L \in R^1$$

ここで, $o<s_n<s_{n+1}<\cdots\cdots$, $s_n \to \infty (n\to\infty)$ である. さらに, $L(g,h) \geqq o, {}^{\forall}g \in B_3, {}^{\forall}h \in B_4$ かつ $L(g,h)$ は $g,h$ に関する連続凸はん関数であり, $L(g,h)=o, g\in B_3, h\in B_4$ と $g \leqq o$, $h=0$, $g\in B_3$, $h\in B_4$ は等価であるものとする. $L(g,h)$の具体的な形については後で述べることにする.

$L(g,h)$ は $u$ に関するはん関数と考えることができるので, $I(u,n)$ をつぎのようにかきなおしておく.

$$I(u,n)=f(u)+s_n L(u) \quad (5)$$

つぎの条件が成立しているものとする.

〔$A$—4〕 $V_{n\nu} \equiv \{u \mid I(u,n) \leqq \nu, u \in B_1\}$ とする. 各々の $\nu, n$ に対して $V_{n,\nu}$ は有界である.

〔補題 2〕 条件 $A$—1〜$A$—4 のもとで $I(n,u)$ は各 $n$ に対し, $Vn,\nu$ の上で最小値をとる. すなわち, 問題 $B$ の解が存在する.

証明は補題 1 と同様となるので省略する.

〔注 1〕 $U\nu$ または $Vn,\nu$ がコンパクトであるならば, $B_1$ の回帰性のいかんにかかわらず問題 $A$ または問題 $B$ の解は存在する.

〔補題 3〕 つぎの関係式が成立する.

〔1〕 $I(u_{n+1}, n+1) \geqq I(u_n, n)$

〔2〕 $I(u_n, n) \leqq f(u_0)$

〔3〕 $L(u_n) \geqq L(u_{n+1})$

〔4〕 $f(u_n) \leqq f(u_{n+1})$

〔5〕 $\lim_{n\to\infty} s_n L(u_n)=0$

〔証明〕〔1〕 
$$\begin{aligned}I(u_{n+1}, n+1)&=f(u_{n+1})+s_{n+1}L(u_{n+1})\\ &\geqq f(u_{n+1})+s_n L(u_{n+1})\\ &\geqq f(u^u)+s_n L(u_n)\\ &=I(u_n, n)\end{aligned}$$

〔2〕 $L(u_0)=0$ を考慮して

$$f(u_0)=I(u_0,n) \geqq I(u_n,n)$$

〔3〕 つぎの関係式が成立する.

$$f(u_n)+s_n L(u_n) \leqq f(u_{n+1})+s_n L(u_{n+1})$$
$$f(u_{n+1})+s_{n+1} L(u_{n+1}) \leqq f(u_n)+s_{n+1} L(u_n)$$

上式を辺々加え整理すると

$$(s_{n+1}-s_n)[L(u_{n+1})-L(u_n)] \leqq 0$$

となり, $L(u_n) \geqq L(u_{n+1})$ が得られる.

〔4〕 〔3〕の証明に用いた最初の不等式および〔3〕より

$$f(u_n)-f(u_{n+1}) \leqq s_n [L(u_{n+1})-L(u_n)] \leqq 0$$

すなわち, $f(u_n) \leqq f(u_{n+1})$ が得られる.

〔5〕 〔1〕および〔2〕より $\{I(u_n, n)\}$ は有界な単調非減少列であるから, $I(u_n,n)$ はある値に収束する, 〔2〕および〔4〕より $f(u_n)$ も同様である. したがって, $s_n L(u_n)$ もある値に収束する. その値を $3\epsilon$ とする. 明かに $3\epsilon \geqq 0$ である. 問題は $\epsilon=0$ となることを示すことであるが, いまかりに $\epsilon>0$ とする. $I(u_n,n)$ の極限を $I$ とする. $N_1$ を十分大きくとれば, $n>N_1$ なる $n$ に対して,

$$I<I(u_n,n)+\epsilon$$

とすることができる. 一方 $N_2$ を十分大きくとれば, $m>N_2$ なる $m$ に対して

$$s_m>4s_n,\ 2\epsilon<s_m L(u_m)<4\epsilon$$

とすることができる. 以上のことより

$$\begin{aligned}I&<I(u_n,n)+\epsilon \leqq f(u_m)+s_n L(u_m)+\epsilon\\ &<f(u_m)+1/4\cdot s_m L(u_m)+\epsilon<f(u_m)+2\epsilon\\ &<f(u_m)+s_m L(u_m)=I(u_m,m) \leqq I\end{aligned}$$

が得られる. しかしこれは矛盾した関係式である. したがって, $\epsilon=0$ でなければならない. (証明終り)

〔定理 1〕 $\{u_n\}$ の任意の部分列はある $u_0$ に弱収束する部分列を含む.

〔証明〕 はじめに $\{u_n\}$ の任意の部分列が弱収束する部分列を含むことを示す.

$B_1$ は回帰的なバナッハ空間であるから $\{u_n\}$ が有界であることを証明すれば十分である[2]. $A$—4 において $\nu=f(u_0)$ とする. このとき補題 3, 〔2〕より $u_n \in Vn,\nu$ である. さらに $m>n$ のとき $Vn,\nu \supseteqq Vm,\nu$ となる. これはつぎのようにして示される. 任意の $\bar{u}_m \in V_m,\nu$ に対して

$$f(\bar{u}_m)+s_n L(\bar{u}_m) \leqq f(\bar{u}_m)+s_m L(u_m) \leqq f(u_0)$$

が成立するから, $\bar{u}_m \in V_{n,\nu}$ すなわち $V_{n,\nu} \supseteqq V_{m,\nu}$ が成立する. したがって $\{V_{n,\nu}\}$ は有界となり, $\{u_n\}$ も有界となる.

つぎに $\{u_n\}$ の任意の弱収束部分列をあらためて $\{u_n\}$ とし, その弱極限を $u^*$ として, $L(u^*)=0$ および $f(u^*)=f(u_0)$ となることすなわち $u^*$ は問題 $A$ の解であることを示す.

$L(u)$ は連続凸はん関数であるから弱下半連続である. したがって, 補題 3, 〔5〕より

$$0=\lim_{n\to\infty} L(u_m)=\underline{\lim}\ L(u_m) \geqq L(u^*)$$

となる. 一方, $L(u) \geqq 0$, ${}^{\forall}u \in B_1$ であるから, このことと上述の関係式より $L(u^*)=0$ となる. $u^*$ は与えられた拘束条件を満足するから $f(u^*) \geqq f(u_0)$ となる.

さらに $f(u)$ の弱下半連続性および補題3,〔2〕,〔4〕より

$$f(u_0) \geqq \lim_{n\to\infty} f(u_n) = \underline{\lim}\, f(u_n) \geqq f(u^*)$$

が成立する．結局 $f(u_0)=f(u^*)$ がいえたことになり

$$\{u_0\} \supseteqq \{u^*\}$$

となる．(証明終り)

〔系1〕 $f(u) \equiv \|u\|^2 + F(u)$, $F \in R^1$, $B_1 \equiv L^2(T, \Omega)$ とし，$F(u)$ は連続な凸はん関数とする．このとき $\{u_n\}$ の任意の部分列は $u_0$ に強収束する部分列を含む．

〔証明〕 $f(u)$ は連続な狭義凸はん関数であるから $u_0$ が存在して唯一である．$\{u_n\}$ の任意の弱収束部分列をあらためて $\{u_n\}$ とし，その弱極限を $u^*$ とする．定理1より $u^*=u_0$ である．$\{u_n\}$ は有界であるから，$\{\|u_n\|^2\}$, $\{F(u_n)\}$ も有界となり収束部分列を含む．したがって，$\|u_n\|^2$, $F(u_n)$ が収束するように $\{u_m\} \subseteqq \{u_n\}$ を選び出すことができる．$u_m \to u_0$ (弱) は明かであるから，$\|u_m\| \to \|u_0\|$ がいえれば $u_m \to u_0$ (強) がいえたことになり[2] 系1が証明される．補題3,〔2〕および $\|u\|^2$, $F(u)$ の弱下半連続性より

$$f(u_0) \geqq \lim_{n\to\infty} f(u_m) = \underline{\lim}\, \|u_m\|^2 + \underline{\lim}\, F(u_m)$$

$$\geqq \|u^*\|^2 + F(u^*) = \|u_0\|^2 + F(u_0)$$

が得られる．上式において等号が成立するのは

$$\underline{\lim}\, \|u_m\|^2 = \|u_0\|^2, \ \underline{\lim}\, F(u_m) = F(u_0)$$

のときに限る．したがって，$\|u_m\| \to \|u_0\|$ がいえたことになる．(証明終り)

〔注2〕 $V_{n,\nu}$ がコンパクトである場合は，$B_1$ の回帰性のいかんにかかわらず定理1において“弱収束”という部分を“強収束”におきかえることができる．

〔定理2〕 $f(u_n)$ は $f(u_0)$ に収束する．

〔証明〕 $I(u_n, n)$, $f(u_n)$ が収束すること，$f(u)$ の弱下半連続性，補題3,〔2〕,〔5〕および定理1より

$$f(u_0) \geqq \lim_{n\to\infty} I(u_n, n) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) + \lim_{n\to\infty} s_n L(u_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(u_n) = \underline{\lim}\, f(u_n) \geqq f(u^*) = f(u_0)$$

となる．(証明終り)

以下において $L(u)$ の具体的な形の一例について述べる．はん関数

$$\underline{g}(u) = sup\,\{o, g(u)\} \qquad (6)$$

を定義する．$L(u)$ はつぎのようになる．

$$L(u) = \|\underline{g}(u)\|^b + \|h(u)\|^c \qquad (7)$$

ここで，$1 \leqq b, c < \infty$ である．このとき，$L(u)$ は $u$ に関する連続凸はん関数であり，$L(u)=0$, $u \in B_1$ と $g(u) \leqq 0$, $h(u)=0$, $u \in B_1$ とが等価であることも明かであろう．

## 6. 結　言

バナッハ空間で定義される拘束条件付最適制御問題が重み関数を用いる立場より考察され，近似解の収束性について議論された．本手法と従来得られている解析的手法との対応，より具体的な系の考察，数値計算法および実験的考察については別の機会にゆずることにする．

終りに，日頃ご指導を賜わっている大島康次郎教授に心から感謝する．
(1971年4月1日受理)

## 文　献

1) A. V. Balakrishnan; Optimal control problems in Banach space, SIAMJ. Control ser. A, vol. 3, No. 1 1965
2) K. Yoshida; Functional Analysis, Springer-Verlag Berlin 1968
3) A. V. Fiacco and G. P. Maccormik; The slacked unconstrained minimization technique for convex programming, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 5, No. 1 March. 1968
4) A. V. Fiacco and A. P. Jones; Generalized penalty methods in topological spaces, SIAMJ. Appl. Math. Vol. 17 No. 5 Sept. 1969
5) S. De Julio; Numerical solution of dynamical optimization problems, SIAMJ. Control Vol. 8 No. 2 May 1970