研究速報
UDC 519.26: 624.042.7

連続定常正規確率過程の最大値の分布についての一考察

A Consideration on the Distribution of Maxima of Continuous Stationary Gaussian Random Processes

—耐震理論における応答倍率推定問題への応用—

—Application to Response Spectra Estimation in the Theory on Aseismic Design of Structures—

清　水　信　行*
Nobuyuki SHIMIZU

1. まえがき

連続定常確率過程からある有限時間長の波形を切りとってできる波形の最大値の分布を厳密に求めることは困難のようである．ここではこれを連続確率過程と連続確率変数に対する χ^2 形確率モデルからの対応関係をもとに求めることを試みる．数学的厳密性に基づく証明は今後の課題であるが，耐震理論における線形1質点系の応答倍率推定問題に適用し良好な結果を得たので報告する次第である．

2. 連続確率変数の最大値の分布

ある連続確率変数 x の母集団の分布関数を $F(x)$，密度関数を $f(x)$ で表わすことにする．この母集団から独立に抽出した m 個の値のうち最大のものはふたたび一つの連続確率変数となり，この分布関数 $F_m(x)$ および密度関数 $f_m(x)$ は

$$F_m(x)=[F(x)]^m \qquad (1)$$

$$f_m(x)=m[F(x)]^{m-1}f(x) \qquad (2)$$

となることが知られている[1)~3)]．

一方，最大値の平均値の上限についての考察を E. J. Gumbel[1)] にしたがって与えると以下のようになる．まずもとの変数の平均値と自乗平均値

$$\bar{x}=\int_0^1 x\,dF,\qquad \overline{x^2}=\int_0^1 x^2 dF \qquad (3)$$

を仮定する．最大値の平均値，自乗平均値，分散は

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_m&=m\int_0^1 xF^{m-1}dF\\ \overline{x_m^2}&=m\int_0^1 x^2F^{m-1}dF\\ \sigma_m^2&=\int_0^1(x-\bar{x}_m)^2F^{m-1}dF\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

となる．もとの変数の平均値と標準偏差とが與えられたとき，平均最大値 $\bar{x}_m$ を極大にするようなもとの分布を求めるために

$$\int_0^1[mxF^{m-1}-\lambda_1x^2-\lambda_2x]dF \qquad (5)$$

λ_1, λ_2; Lagrange 変数

なる x についての第一変分を0に等しいとおくと

$mF^{m-1}-2\lambda_1x-\lambda_2=0$　を経て

$$x=(mF^{m-1}-\lambda_2)/2\lambda_1 \qquad (6)$$

を得る．これを式(4)に代入し

$$\bar{x}_m=\frac{1}{2\lambda_1}\cdot\frac{m^2}{2m-1}-\frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \qquad (7)$$

となる．$m=1$ とおくと式(7)より

$$\bar{x}=\bar{x}_1=(1-\lambda_2)/2\lambda_1 \qquad (8)$$

となる．式(8)と(6)を(4)に代入すると分散は

$$\sigma^2=\sigma_1^2=\frac{1}{4\lambda_1^2}\int_0^1(mF^{m-1}-1)^2dF \quad より$$

$$\sigma=\frac{1}{2\lambda_1}\frac{m-1}{\sqrt{2m-1}} \qquad (9)$$

となり，式(7)，(8)，(9)より

$$\bar{x}_m=\bar{x}+w(m)\sigma,\ w(m)=(m-1)/\sqrt{2m-1} \qquad (10)$$

を得る．これは分布を求める過程の一つの結果であるが以下の議論で必要なものは，この式(10)であるのでここで一応変形をとどめておく．式(10)は，連続確率変数から独立に抽出した m 個の値のうち最大のものの平均値はもとの分布の平均値ともとの分布の重みつき標準偏差の和に等しく，重み係数 $w(m)$ は抽出した個数 m の関数であることを示している．

3. 連続定常正規確率過程の平均エネルギと連続正規確率変数の χ^2 変数

平均値零の連続定常正規確率過程 $I(t)$ から有限時間長 T の波形を切りとって出来る確率過程の平均エネルギ ε とその分布の自由度 n および平均値零の連続正規確率変数の χ^2 変数 ε とその分布の自由度 m の関係を調べる．

平均エネルギ ε は

$$\varepsilon\equiv\int_0^T I(t)\,dt \qquad (11)$$

で定義される．これに対する分布関数は

$$\frac{\left(\dfrac{m_\varepsilon\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right)^n}{\Gamma(n+1)}\exp\left(-\frac{m_\varepsilon\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right)d\left(\frac{m_\varepsilon\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}\right),\quad n=\frac{m_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}-1 \qquad (12)$$

であることが知られている[4)5)]．ここで $m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon$ は平均エネルギの平均値，標準偏差である．一方独立な m 個の確率変数 $x_1, \cdots, x_m$ が $N(0,\sigma^2)$ にしたがうとき

$\varepsilon=\sum_{\nu=1}^{m}x_\nu^2$　の分布は

* 東京大学生産技術研究所　第2部（柴田研究室）

$$\left\{\left(\frac{\varepsilon}{2\sigma^2}\right)^{(m/2)-1}\Big/\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right\}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2\sigma^2}\right)d\left(\frac{\varepsilon}{2\sigma^2}\right) \quad (13)$$

となる．式(12)と(13)を比較することにより次の対応関数が成立することがわかる．

$$m \longleftrightarrow 2(n+1), \qquad \sigma^2 \longleftrightarrow \sigma_\varepsilon{}^2/2m_\varepsilon \quad (14)$$

この関係式は正規性のもとで連続確率過程と連続確率変数を相互に変換する因子と考えることができる．

4. 連続定常正規確率過程の最大値の分布

連続定常正規確率過程から有限時間長の波形を切りとって得られた波形 $I_T(t)$ の平均エネルギ ε を計算し，これからこの分布の自由度 n を式(12)の第二式により計算できる．また同様に $\sigma_\varepsilon{}^2/2m_\varepsilon$ の計算が可能である．これらはエネルギ論的な観点からは式(14)が示すように，平均値零，分散 $\sigma_\varepsilon{}^2/2m_\varepsilon$ である正規母集団において $2(n+1)$ 個の独立な確率変数から成る事象を考察の対象としていると解釈することができる．そして確率過程 $I_T(t)$ の最大値の分布を求めることはこの $N(0, \sigma_\varepsilon{}^2/2m_\varepsilon)$ から独立に抽出した $m=2(n+1)$ 個の値のうち最大のものの分布を求めることに対応していると考えられる．この分布は式(1)により与えられる．すなわち確率過程 $I_T(t)$ の最大値 x_m の分布 $\Phi_{I_T}(x_m)$ は

$$\Phi_{I_T}(x_m) = [\Phi(x_m)]^m \quad (15)$$

となる．ただしもとの x の平均値 $\bar{x}$，分散 σ^2，m は

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}=0, \quad \sigma^2=\sigma_\varepsilon{}^2/2m_\varepsilon \\ &m=2(n+1)=2(m_\varepsilon/\sigma_\varepsilon)^2 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

であり，$\Phi(x)$ は正規分布関数である．また最大値の平均値 $\bar{x}_m$ は式(10)および(14)より

$$\bar{x}_m = w(m)\left(\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{2m_\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad w(m) = \frac{m-1}{\sqrt{2m-1}} \quad (17)$$

となる．さらに $w(m)$ は n を用いると

$$w(n) = (2n+1)/\sqrt{4n+3} \quad (18)$$

となる．式(17)は(18)と(12)の第二式を考慮すれば

$$\bar{x}_m = \sqrt{m_\varepsilon}(2n+1)\sqrt{(n+1)/2(4n+3)} \quad (19)$$

とも書ける．

5. 耐震理論における線形1質点ばね質量系の応答倍率平均値の推定

本章では簡単な数値計算例として線形1質点ばね質量系の応答倍率の平均値の推定を試みる．式(17)，(18)を入，出力波に対して用いると応答倍率平均値 $\bar{\lambda}$ は入，出力波の最大値が独立ならば

$$\bar{\lambda} = \bar{x}_{om}/\bar{x}_{im} = [w(n_o)/w(n_i)]\cdot K \quad (20)$$

となる．ただし K は定数で

$$K = \left(\frac{\sigma_{\varepsilon_o}{}^2}{m_{\varepsilon_o}}\right)^{1/2}\Big/\left(\frac{\sigma_{\varepsilon_i}{}^2}{m_{\varepsilon_i}}\right)^{1/2} \quad (21)$$

であり，i, o はそれぞれ入力波，出力波に対する添字である．

数値計算に用いた定数は入力波としての定常擬似波に対し卓越周期 $T_g=1.0s$ および減衰定数 $\zeta_g=0.3$ (加速度型)，1質点系に対し，減衰定数 $\zeta_b=0.07$ とし系の固有周期 T_b をパラメータとした．なお波形長は $T=20s$ である．図1は絶対加速度応答倍率平均値の数値計算結果で●印が本理論に基づく式(20)による値である．一方⊙印はアナログ計算機による 50 組のデータの平均値，○印は波形の標準偏差の比による理論の平均値，△印は出力波，入力波に対する極値密度関数より求められた値の比[6] である．これらのうち⊙印，○印の値はいずれも文献 5) の 380 ページ図 6.20(b)によった．図1より●印の方が○印，△印よりはるかにアナログ計算機の直接シミュレーションの結果に一致することがわかるが，$T_b/T_g \lesssim 0.4$ の剛構造物系および $T_b/T_g \cong 1.0$ の共振系においてなおわずかの不一致をみせている．これについては今後検討したいと思う．以上のように本数値計算に関する限り本理論はかなり有効的であることがわかる．

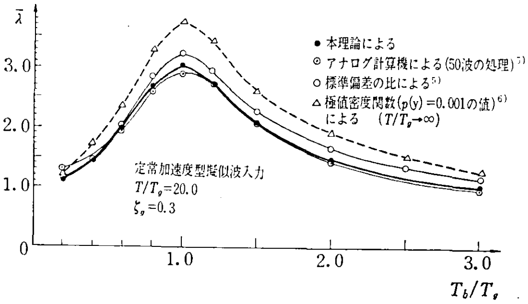

図 1　1質点系絶対加速度応答倍率平均値

6. ま と め

かなり直感的な方法ではあるが，以上のようにして連続定常正規過程から切りとった有限時間長の波形の最大値の分布を求め，平均値を応答倍率平均値推定に用いた結果良い一致をみせることがわかった．今後，具体的に分布関数の有用性を数値シミュレーションにより検討すること，数学的厳密性に基づく本理論の証明を与えることなどを行なうつもりである．

最後に本研究を報告するに当たり有意義なご討論，ご示唆をいただいた，柴田　碧教授に厚くお礼申し上げます．

(1971年2月10日受理)

参 考 文 献

1) E. J. Gumbel, 河田，岩井，加瀬監訳，極値統計学，広川書店 (昭和 38. 2)，96
2) 近藤，応用確率論，日科技連 (1970. 9)，108
3) 岡村，機械学会誌，**73**，621 (1970. 10)，1382
4) S. O. Rice, Mathematical Analysis of Random Noise, BSTJ, **23** & **24** (1944, 45), 93
5) 清水，機器・配管系の耐震設計法に関する研究，東大大学院工学系研究科学位論文 (1971. 3)，380
6) 佐藤，機械構造物の耐震設計に関する研究，生研報告，**15**，1 (1965. 11)，22