研 究 速 報
UDC 517.946.6

ランダム係数方程式の統計的解析

Statistical Analysis of Random Parameter Equations

原　文　雄*
Fumio HARA

1. ま え が き

梁の曲げ振動，縦振動の方程式や原子炉での中性子束分布を記述する拡散方程式などにおいて，ヤング率，断面積または拡散係数などに不確定要素が混入する場合が多い．このような場合の固有振動数（固有値）および規準モード（固有関数）に関する統計値を摂動法によって求める．

2. ランダム係数方程式の演算子的表現

梁の曲げ振動を例にして，ランダム係数方程式の演算子的表現を示そう．梁の曲げ振動の方程式[1]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}y\right)+\rho A\frac{\partial^2}{\partial t^2}y=0 \qquad (1)$$

において，ヤング率 E が $E_0(1+\epsilon\mu(x))$ と書けて，$\mu(x)$が不確定要素であるとする．したがって，式(1)は次のように書き換えられる．

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}y+\epsilon\left\{\mu\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{d\mu}{dx}\cdot\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}y$$
$$+\frac{\rho A}{IE_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y=0 \qquad (2)$$

ここで，

$$y=X(x)e^{i\omega t} \qquad (3)$$

とおいて式(2)に代入し，微分演算子

$$\left.\begin{aligned} m_0&=\frac{d^4}{dx^4}\\ m_1&=\mu\frac{d^4}{dx^4}+\frac{d\mu}{dx}\cdot\frac{d^3}{dx^3}+\frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

を導入すると，式(2)は

$$(m_0+\epsilon m_1)X=\Omega X,\ \ \Omega=-\rho A\omega^2/IE_0 \qquad (5)$$

となる．すなわち，m_0 は確定的な演算子であり，m_1 は不確定な演算子で，その統計的性質のみが知られている．

縦振動，中性子束分布の方程式に対する m_0, m_1 および Ω を曲げ振動の場合のそれらとともに表1に示しておく．

3. 摂動法[2]による近似

確定的な演算子 m_0 に関して，境界条件から定まる固有振動数を $\Omega_j^{(0)}$ とし，正規化条件を満す規準モードを $X_j^{(0)}$ とする．すなわち，

$$m_0X_j^{(0)}=\Omega_j^{(0)}X_j^{(0)},\ \ (j=1,2,\cdots\cdots). \qquad (6)$$

式(5)において，あるパラメータの標本によって定まる ϵm_1 を摂動と考える．そして，X を $X_j^{(0)}$ を用いて次のように展開する．

$$X=\sum_{i=0}^{\infty}c_iX_i^{(0)} \qquad (7)$$

式(7)を式(5)に代入し，左から $X_j^{(0)}$ を乗じて積分すると，

$$\{\Omega_j^{(0)}+\epsilon(j|m_1|j)-\Omega\}c_j+\epsilon\sum_{i\neq j}c_i(j|m_1|i)=0 \qquad (8)$$

を得る．ここで

$$(j|m_1|j)=\int_0^L X_j^{(0)}(x)m_1X_i^{(0)}(x)dx\ . \qquad (9)$$

式(8)の c_j および Ω を微小パラメータ ϵ について次のように展開する．

$$\left.\begin{aligned} c_j&=c_j^{(0)}+\epsilon c_j^{(1)}+\epsilon^2c_j^{(2)}+\cdots\cdots\\ \Omega&=\Omega^{(0)}+\epsilon\Omega^{(1)}+\epsilon^2\Omega^{(2)}+\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

これを式(8)に代入して ϵ の次数について整理する．

$$(\Omega_j^{(0)}-\Omega^{(0)})c_j^{(0)}+\epsilon[\{(j|m_1|j)-\Omega^{(1)}\}c_j^{(0)}$$
$$+(\Omega_j^{(0)}-\Omega^{(0)})c_j^{(1)}+\sum_{i\neq j}(j|m_1|i)c_i^{(0)}]$$
$$+\epsilon^2[\{(j|m_1|j)-\Omega^{(1)}\}c_j^{(1)}-\Omega^{(2)}c_j^{(0)}$$
$$+(\Omega_j^{(0)}-\Omega^{(0)})c_j^{(2)}+\sum_{i\neq j}(j|m_1|i)c_i^{(1)}]$$
$$+0(\epsilon^3)=0 \qquad (11)$$

式(11)において，ある k-次モードに注目する．すなわ

表 1　確定的演算子 m_0，不確定的演算子 m_1 の例

	m_0	m_1	Ω
棒の曲げ振動	$\frac{d^4}{dx^4}$	$\mu\frac{d^4}{dx^4}+\frac{d\mu}{dx}\frac{d^3}{dx^3}+\frac{d^2\mu}{dx^2}\frac{d^2}{dx^2}$ $E=E_0(1+\epsilon(x))$	$-\frac{\rho_0A}{IE_0}\omega^2$
棒の縦振動	$\frac{d^2}{dx^2}$	$\mu\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d\mu}{dx}\frac{d}{dx}$ $E=E_0(1+\epsilon\mu(x))$	$-\frac{\rho_0}{E_0}\omega^2$
		$\frac{d\mu}{dx}\frac{d}{dx}$ $A=A_0(1+\epsilon\mu(x))$	$-\frac{\rho_0}{E_0}\omega^2$
中性子束分布	$\frac{d^2}{dx^2}$	$\mu\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d\mu}{dx}\frac{d}{dx}+\kappa$ $D=D_0(1+\epsilon\mu(x))$ $\nu\Sigma_f-\Sigma_a=K+\epsilon\kappa D_0$	$-\frac{K}{D_0}$

* 東京大学生産技術研究所　第2部

ち,

$$c_k^{(0)}=1,\ \text{他は}\ 0\ . \tag{12}$$

まず第0近似を求める．$\epsilon=0$ とおいて

$$\Omega^{(0)}=\Omega_k^{(0)},\ c_k^{(0)}=1 \tag{13}$$

を得る．第1近似を求める．$0(\epsilon^2)$ 以上の項を無視して式(13)を式(11)に代入すると次式を得る．

$$\left.\begin{aligned}\Omega^{(1)}&=(k|m_1|k)\\ c_j^{(1)}&=(j|m_1|k)/(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})\quad(j\neq k)\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

第2近似を求める．すなわち $0(\epsilon^3)$ 以上の項を無視して式(12)，式(13)を式(11)に代入する．

$$\begin{aligned}\Omega^{(2)}&=\sum_{i\neq k}\frac{(k|m_1|i)(i|m_1|k)}{\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)}}\ ,\\ c_j^{(2)}&=-\frac{(j|m_1|k)(k|m_1|k)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})^2}\\ &\quad+\sum_{i\neq k}\frac{(j|m_1|i)(i|m_1|k)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})}\\ &\qquad(j\neq k)\end{aligned} \tag{15}$$

以上の計算によって，k-次の固有振動数 Ω_k は ϵ の2次の微小量までの精度で，

$$\begin{aligned}\Omega_k&=\Omega_k^{(0)}+\epsilon(k|m_1|k)\\ &\quad+\epsilon^2\sum_{i\neq k}\frac{(k|m_1|i)(i|m_1|k)}{\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)}}\end{aligned} \tag{16}$$

として求まる．規準モード X_k は式(13)，(14)，(15)より

$$\begin{aligned}X_k&=X_k^{(0)}+\epsilon\sum_{i\neq k}\frac{(i|m_1|k)}{\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)}}X_i^{(0)}\\ &\quad+\epsilon^2\sum_{i\neq k}\left\{-\frac{(i|m_1|k_1)(k|m_1|k)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})^2}\right.\\ &\quad\left.+\sum_{j\neq k}\frac{(i|m_1|j)(j|m_1|k)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})}\right\}X_i^{(0)}\end{aligned} \tag{17}$$

となる．式(16)，(17)において，m_1 は不確定な演算子であるので，$(i|m_1|j)$ は確率変数と考えることができる．

4.　固有振動数 Ω_k の統計値

表1から判明するように演算子 m_1 は一般に

$$m_1=\sum_{m=I}^{M}g_m(x)d^m/dx^m \tag{18}$$

と書くことができる．ここで $g_m(x)$ が不確定であることになる．したがって，$(k|m_1|i)$ なる量のアンサンブル平均は，次のようにして計算される．

$$E\{(k|m_1|i)\}=\sum_{m=I}^{M}\int_0^L X_k^{(0)}(x)E\{g_m(x)\}\cdot\frac{d_m}{dx_m}X_i^{(0)}dx \tag{19}$$

すなわち，m_1 のアンサンブル平均を $\langle m_1\rangle$ で示すことにすると，

$$E\{(k|m_1|i)\}=(k|\langle m_1\rangle|i) \tag{20}$$

同様にして，

$$E\{(k|m_1|i)(q|m_1|p)\}=(kq|\langle m_1^2\rangle|ip) \tag{21}$$

ここに

$$\langle m_1^2\rangle=\sum_{m=I}^{M}\sum_{n=I}^{M}E\{g_m(x_1)\cdot g_n(x_2)\}\frac{d^m}{dx_1^m}\cdot\frac{d^n}{dx_2^n} \tag{22}$$

これだけの準備をして，具体的な計算に進むわけであるが，$g_m(x)$ について次の仮定をしておく．

仮定：$g_m(x)$ は x の定義区間 $[0,L]$ において，そのアンサンブル平均は0である．

たとえば，上述のヤング率が不確定的にばらついている場合には

$$E\{\mu(x)\}=0 \tag{23}$$

であるとする．したがって(16)式のアンサンブル平均をとると固有振動数の平均値 $E\{\Omega_k\}$ は次のように与えられる．

$$E\{\Omega_k\}=\Omega_k^{(0)}+\epsilon^2\sum_{i\neq k}\frac{(ki|\langle m_1^2\rangle|ik)}{\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)}} \tag{24}$$

次に固有振動数のばらつきの分散を評価しよう．ところで，一般にある量 Ω を $0(\epsilon^2)$ まで展開した場合

$$\Omega=\Omega^{(0)}+\epsilon\Omega^{(1)}+\epsilon^2\Omega^{(2)}+\cdots\cdots \tag{25}$$

Ω のゆらぎを $0(\epsilon^2)$ の微小量まで求めるために Ω の分散に関して，$0(\epsilon^4)$ までが必要となり，式(25)より Ω の分散

$$\begin{aligned}\sigma^2{}_\Omega&=\epsilon^2E\{\Omega^{(2)}\}+2\epsilon^3E\{\Omega^{(1)}\Omega^{(2)}\}\\ &\quad\epsilon^4[E\{\Omega^{(2)2}\}-E\{\Omega^{(2)}\}^2]\end{aligned} \tag{26}$$

が得られる．これを上記の固有振動数の場合に適用すると，分散 $\sigma^2\Omega_j$ が次のように与えれる．

$$\begin{aligned}\sigma^2\Omega_k&=\epsilon^2(hk|\langle m_1^2\rangle|kk)\\ &\quad+2\epsilon^3\sum_{i\neq k}\frac{(kik|\langle m_1^3\rangle|ikk)}{\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)}}\\ &\quad+\epsilon^4\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}\frac{(kik|\langle m_1^4\rangle-\langle m_1^2\rangle^2|ikk)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})}\end{aligned} \tag{27}$$

各次の固有振動数間の統計的相関の度合を見るために，k-次，l-次の固有振動数の共分散 ϕ_{kl} を計算すると式(16)から次の結果が容易に得られる．

$$\begin{aligned}\phi_{kl}&=\epsilon^2(kl|\langle m_1^2\rangle|kl)+\epsilon^3\left[\sum_{i\neq k}\frac{(kil|\langle m_1^3\rangle|ikl)}{\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)}}\right.\\ &\quad\left.+\sum_{i\neq l}\frac{(lik|\langle m_1^3\rangle|ilk)}{\Omega_l^{(0)}-\Omega_i^{(0)}}\right]\\ &\quad+\epsilon^4\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq l}\frac{(kilj|\langle m_1^4\rangle-\langle m_1^2\rangle^2|ikjl)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})(\Omega_l^{(0)}-\Omega_j^{(0)})}\end{aligned} \tag{28}$$

以上，固有振動数の統計値(平均値と分散)を $0(\epsilon^2)$ まで考慮して求めた．まず平均値については2次の微小量のみが効いてくることが式(24)からわかる．1次の微小量は不確定な演算子 m_1 に対する自然な仮定によって消えてしまうのである．式(24)の右辺の第2項は k-次モ

ードへの他のモードの影響を意味している．分散については，今考察の対象としている k-次モードの1次の微小変動の影響，他のモード成分との結合による2次微小量と k-次モードの1次微小量との結合による影響および k-次モードにおける2次微小量の変動相互の結合による影響とからなっていることがわかる．なお同様なことが共分散 ϕ_{kl} についてもいえる．

固有振動数の統計値を $0(\epsilon^2)$ まで考察して求めた式は相当に煩雑である．近似の度合に留意にすれば $0(\epsilon)$ まで考慮した統計値でも十分に役に立つ場合が多い．この場合はきわめてわかりやすい結果が得られる．すなわち，その平均値は

$$E\{\Omega_k\}=\Omega_k^{(0)} \tag{29}$$

となり確定演算子 m_0 のみから定まる固有振動数に一致する．標準偏差 $\sigma_{\Omega k}$ および固有振動数間の共分散はそれぞれ次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\Omega k}&=\epsilon\sqrt{(kk|\langle m_1{}^2\rangle|kk)}\\ \phi_{kl}&=\epsilon^2(kl|\langle m_1{}^2|kl)\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

5. 規準モード X_k の統計値

さて次に，式(17)を基にして規準モード X_k の統計値を求めることにしよう．各点 $x\in[0, L]$ での X_k の平均値 $E\{X_k\}$ は式 (17) のアンサンブル平均をとることにより

$$E\{X_k(x)\}=X_k^{(0)}(x)+\epsilon^2\sum_{i\neq k}\left\{-\frac{(ik|\langle m_1{}^2\rangle|kk)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})}+\sum_{j\neq k}\frac{(ij|\langle m_1{}^2\rangle|jk)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})}\right\}X_i^{(0)}(x) \tag{31}$$

となる．

規準モード $X_k(x)$ の分散を計算する．ここで次のことを注意しておく．$X_k(x)$はその2乗積分は1に規格化されていない．さて，式(17)から $X_k{}^2(x)$ をつくり，そのアンサンブル平均をとる．次いて式(31)の2乗を前者から差し引くことにより分散 $\sigma^2{}_{Xk}(x)$ を得る．

$$\begin{aligned}\sigma^2{}_{Xk}=&\epsilon^2\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}\frac{(ij|\langle m_1{}^2\rangle|kk)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})}X_i^{(0)}X_j^{(0)}\\ &+2\epsilon^3\left\{\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}\sum_{h\neq k}\frac{(ijh|\langle m_1{}^3\rangle|}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})}*\right.\\ &*\frac{khk)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_h^{(0)})}\\ &\left.-\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}\frac{(ikj|\langle m_1{}^3\rangle|kkk)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})^2(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})}\right\}X_i^{(0)}X_j^{(0)}\\ &+\epsilon^4\left[\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}\sum_{g\neq k}\sum_{h\neq k}\frac{(igjh|\langle m_1{}^4\rangle}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})}*\right.\\ &*\frac{-\langle m_1{}^2\rangle^2|gkhk)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_g^{(0)})(\Omega_k^{(0)}-\Omega_h^{(0)})}\end{aligned}$$

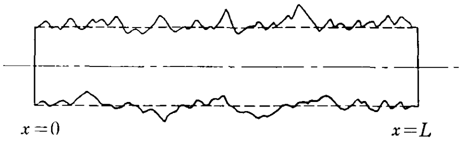

図 1　断面積が不規則にばらついている棒の縦振動についてのモデル

$$\begin{aligned}&+\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}\frac{(kikj|\langle m_1{}^4\rangle-\langle m_1{}^2\rangle^2|kkkk)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})^2(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})^2}\\ &-2\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}\sum_{g\neq k}\frac{(kijg|\langle m_1{}^4\rangle-\langle m_1{}^2\rangle^2|}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})}*\\ &\left.*\frac{kkgk)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_g^{(0)})^2}\right]X_i^{(0)}X_k^{(0)}\end{aligned} \tag{32}$$

(32)

$0(\epsilon^2)$ まで考慮して規準モードの統計値を求めるときわめて複雑な式になる．$0(\epsilon)$ まで考慮した場合は規準モードの平均値および標準偏差は次のように簡単な表現式で得られる．

$$\left.\begin{aligned}&E\{X_k(x)\}=X_k^{(0)}(x)\\ &\sigma_{Xk}=\epsilon\sqrt{\sum_{i\neq k}\sum_{j\neq k}\frac{(ij|\langle m_1{}^2\rangle|kk)}{(\Omega_k^{(0)}-\Omega_i^{(0)})(\Omega_k^{(0)}-\Omega_j^{(0)})}X_i^{(0)}X_j^{(0)}}\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

6. 応　用　例

上述の手法を断面積が不規則にばらついている棒の縦振動問題に適用してみる．断面積の変化分 $\mu(x)$ についてその統計的性質は既知とする．すなわち

$$E\{\mu(x)\}=0,\ E\{\mu(x)\mu(y)\}=\Phi_\mu(x,y) \tag{34}$$

この問題における不確定な演算子は表1より

$$m_1=\frac{d\mu}{dx}\cdot\frac{d}{dx} \tag{35}$$

であるので，$\langle m_1\rangle$，$\langle m_1{}^2\rangle$ は次のようになる[3]．

$$\langle m_1\rangle=0,\ \langle m_1{}^2\rangle=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Phi_\mu(x,\ y)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \tag{36}$$

境界条件として，両端自由の場合を考えてみることにする．すなわち，

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=L}=0 \tag{37}$$

簡単な計算から正規化規準モード $X_k^{(0)}$ は

$$X_k^{(0)}=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{k\pi}{L}x,\ \ \Omega_k^{(0)}=-\frac{k^2\pi^2}{L^2} \tag{38}$$

で与えられる．まず固有振動数 Ω_k に関しては

$$(kk|\langle m_1\rangle^2|kk)=\frac{k^2\pi^2}{L^4}\int_0^L\int_0^L\sin\frac{2k\pi}{L}x\sin\frac{2k\pi}{L}y\times\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Phi_\mu(x,y)\,dxdy \tag{39}$$

となるが，断面積の変化分 $\mu(x)$ の相関関数 $\Phi_\mu(x,y)$ の具体的形を与えなければ計算は進まない．そこで，$\mu(x)$ が δ-相関である場合を考えてみることにする．す

表 2　棒の縦振動における固有振動数 Ω_k, 基準モード X_k の統計量（境界条件：両端自由）

	$E\{\Omega_k\}$	$E\{X_k\}$	$\sigma\Omega_k/\epsilon$	$\sigma X_k/\epsilon$	ϕ_{kl}/ϵ^2
断面積	$-\frac{k^2\pi^2}{L^2}$	$\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{k\pi}{L}x$	$-\sqrt{\frac{2}{L}}\Omega_k{}^{(0)}M$	$\sqrt{\sum_{i\neq k}\frac{M^2}{L}\left(\frac{k^2(k^2+i^2)}{(k^2-i)^2}\right)X_i{}^{(0)2}}$	0
ヤング率	$-\frac{k^2\pi^2}{L^2}$	$\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{k\pi}{L}x$	$-\sqrt{\frac{3}{2L}}\Omega_k{}^{(0)}M$	$\sqrt{\sum_{i\neq k}\frac{M^2}{L}\frac{k^2i^2}{(k^2-i^2)^2}X_i{}^{(0)2}}$	$\frac{k^2l^2\pi^4}{L^5}M^2$

なわち，相関の強さを M^2 とおいて

$$\Phi_\mu(x,y)=M^2\delta(x-y) \tag{40}$$

δ-関数の微分を超関数的意味での微分[4]と解釈すると，

$$(kk|\langle m_1{}^2\rangle|kk)=\frac{2}{L}M^2\left(\frac{k^2\pi^2}{L^2}\right)^2 \tag{41}$$

なとる．したがって，$0(\epsilon)$ まで考慮した場合の Ω_k の標準偏差 $\sigma_{\Omega k}$ は次のようになる．

$$\sigma_{\Omega k}=-\epsilon\sqrt{\frac{2}{L}}M\Omega_k{}^{(0)} \tag{42}$$

次に規準モードの標準偏差を具体的に計算しよう．$(ij|\langle m_1{}^2\rangle|kk)$ は，定義式にそれぞれ対応する式を代入し，やや煩雑な計算をすると，

$$(ij|\langle m_1{}^2\rangle|kk)=\frac{M^2k^2\pi^2}{L^4}\left\{\frac{(k+i)(k+j)}{2L}\right. \\ \left.\frac{(k-i)(k-j)}{2L}\right\}\delta_{ij} \tag{43}$$

となる．したがって σ_{Xk} は次のようになる．

$$\sigma_{Xk}=\epsilon\frac{M}{L}\sqrt{\sum_{i\neq k}\frac{k^2(k^2+i^2)L}{(k^2-i^2)^2}X_i{}^{(0)2}} \tag{44}$$

最後に，ヤング率に不規則なばらつきがある場合の棒の縦振動における固有振動数および規準モードの統計値についても上述の手法を適用した．その結果を前述の結果と合わせて表 2 に示す．表 2 の結果は不規パラメータ $\mu(x)$ の相関は δ-相関であり，境界条件は両端自由の場合についてのものである．

最後に 2 部柴田　碧教授および国鉄技研宮本昌幸博士の日頃の討論にお礼申し上げます．

(1971 年 2 月 25 日受理)

参 考 文 献

1) チモシェンコ，工業振動学(昭44)，pp. 440，東京図書
2) 湯川ほか 2 名，量子力学(中)(昭33)，pp. 251，岩波書店
3) А. Н. МАЛАХОВ, ФЛУКТУЦИИ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ (1968), pp. 660 ИЗДАТХЛЬСТВО «НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЧИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
4) 吉田ほか 2 名，位相解析の基礎(昭38)，pp. 474，岩波書店