

変位分布仮定から誘導された Herrmann の Mixed Model と同一の有限要素マトリックス

The Same Finite Element Matrix as the Mixed Model by Herrmann Derived from the Assumed Displace Field Approach

吉田 裕*

Yutaka YOSHIDA

1. はじめに

前回は, Reissner の変分原理にもとづいて, L. R. Herrmann によって誘導された平板曲げの有限要素マトリックス¹⁾について, このような要素が考えられるに至った有限要素解析の背景について略述し, Herrmann の Model の具体的内容を示した上で, 変分原理にもとづいた理論的差異にもかかわらず, この Herrmann の Model と同一の要素が, 一般の応力分布仮定からも誘導されることを示した²⁾. ここでは, この Herrmann の Model¹⁾ と同一の要素を, 一般の変位分布仮定からも誘導しうることを示す. はじめに, 前回の報告²⁾との重複を避けて, 以下の記述に必要な事項を列挙するという意味で, Herrmann の Model を略述する.

2. Herrmann の平板曲げ要素¹⁾

L. R. Herrmann は, Hellinger-Reissner の変分原理にもとづいた, 次の形のエネルギー関数

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \sum_m \int_{A_m} [M_{,\alpha} \alpha^\beta w_{,\alpha} - B(M^{\alpha\beta}) - \bar{p}w] dA \\ & - \int_{s_m} M_{n_s} w_{,s} ds - \int_{s_{2m}} \bar{V} w ds - \int_{s_{3m}} M_n \bar{w}_{,n} ds \end{aligned} \quad (1)$$

の停留問題として平板曲げの有限要素の定式化を行ない次の形の有限要素マトリックスを誘導した. すなわち,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{G} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\sigma}_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{L}\bar{\mathbf{V}}_n + \bar{\mathbf{p}} \\ \mathbf{M}\bar{\mathbf{w}}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2)$$

ここに,

$$\mathbf{H} = \mathbf{FCE}^{-1} \quad (3)$$

$$\mathbf{G} = A_m (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{NE}^{-1} \quad (4)$$

$$\mathbf{N} = \frac{12}{Eh^3} \begin{Bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2(1+\nu) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} c_1^2 & s_1^2 & 2s_1c_1 \\ c_2^2 & s_2^2 & 2s_2c_2 \\ c_3^2 & s_3^2 & 2s_3c_3 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} -s_1c_1 & s_1c_1 & c_1^2 - s_1^2 \\ -s_2c_2 & s_2c_2 & c_2^2 - s_2^2 \\ -s_3c_3 & s_3c_3 & c_3^2 - s_3^2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} a_1/2 & 0 & a_3/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & 0 \\ 0 & a_2/2 & a_3/2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

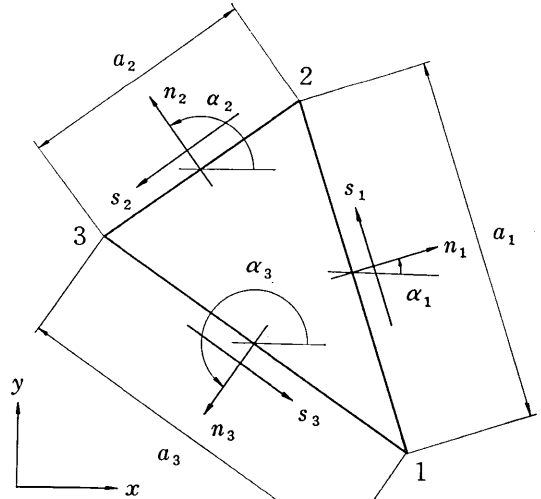


図1 Angle Notation

であり, A_m は三角形要素 m の面積, a_i は要素の辺 i の長さである. また, $c_i = \cos \alpha_i$, $s_i = \sin \alpha_i$ で, α_i は要素の各辺の法線の x 軸よりの角度である (図1). また

$$\mathbf{w}^T = \{w_1 \ w_2 \ w_3\} \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{p}}^T = \{\bar{p} A_m/3 \ \bar{p} A_m/3 \ \bar{p} A_m/3\} \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_n^T = \{\bar{V}_{n1} \ \bar{V}_{n2} \ \bar{V}_{n3}\} \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{w}}_n^T = \{\bar{w}_{,n1} \ \bar{w}_{,n2} \ \bar{w}_{,n3}\} \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n^T = \{M_{n1} \ M_{n2} \ M_{n3}\} \quad (15)$$

で, w_i は三角形要素の頂点に設定された節点の変位であり, \bar{p} は要素内に与えられた作用外力, \bar{V}_{ni} は要素の各辺上に与えられた外力である. また, $\bar{w}_{,ni}$ は要素の各辺の中央に設定された節点における辺の法線方向の, たわみの勾配で, M_{ni} は, $\bar{w}_{,ni}$ に対応する, 要素辺上

* 東京大学生産技術研究所 第5部

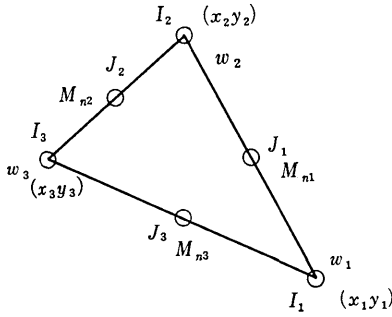


図 2 Nodal Point System and Nodal Parameters

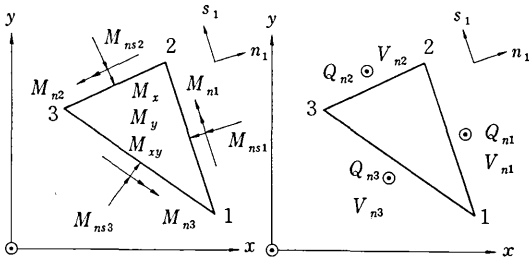


図 3 Moment and Shear Notation

の曲げモーメントである(図 2, 3)。また、 $w_{,n} = \partial w / \partial n$, ……である。

式(2)が Herrmann の与えた平板曲げの有限要素マトリックスであるが、これと同一の要素が一般の変位分布仮定からも誘導することができることを以下に示す。

3. 変位分布仮定からの誘導

ここでは、図 4 に示すように、三角形要素の各辺の中

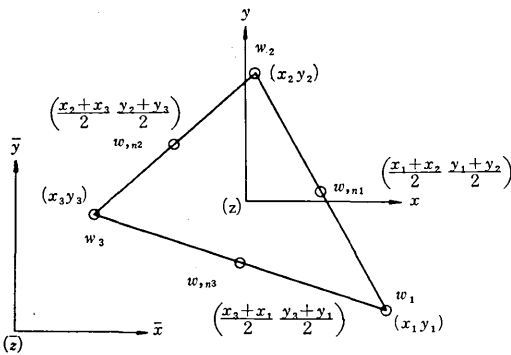


図 4 Triangular Plate Element

央に設けた節点において、辺の法線方向の勾配 $w_{,ni}$ ($i=1, 2, 3$) を、要素の各頂点に設けた節点において、鉛直変位 w_i ($i=1, 2, 3$) を節点変位として設定した平板曲げの有限要素マトリックスを誘導する。いま、要素の変位関数を 2 次の多項式で、次のように与える。

$$w(x, y) = \langle 1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy \rangle \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

要素の曲率 ϵ は、式(16)を微分することによって

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix} \mathbf{q} = 2 \{ \mathbf{O} \ \mathbf{I} \} \mathbf{q} \quad (17)$$

のように得られる。ここに、 \mathbf{O} は 3 行 3 列の零マトリックスであり、 \mathbf{I} は 3 行 3 列の単位マトリックスである。また、要素内のモーメント σ と曲率 ϵ の関係は、次のように与えられる。

$$\sigma = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -D \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} \epsilon \quad (18)$$

ここに、 D は板の曲げ剛性で $D = Eh^3/12 (1-\nu^2)$ である。式(18)を

$$\sigma = -D\epsilon \quad (18')$$

のように書く。

ここで、式(16)に与えた変位関数の係数ベクトル \mathbf{q} を、節点変位 \mathbf{u} の関数として求めるために、まず、 \mathbf{u} を \mathbf{q} の関数として次のように表わす。

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{q} \quad (19)$$

いま、

$$w_{,ni} = c_i w_{,x} + s_i w_{,y} = \langle 0 \ c_i \ s_i \ 2c_i x \ 2s_i y \ c_i y + s_i x \rangle \mathbf{q} \quad (20)$$

であるから、式(16)および(20)に各節点の座標を代入して、式(19)のマトリックス \mathbf{A} は次のように表わされる。

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & y_3^2 \\ 0 & c_1 & s_1 & c_1(x_1+x_2) & s_1(y_1+y_2) \\ 0 & c_2 & s_2 & c_2(x_2+x_3) & s_2(y_2+y_3) \\ 0 & c_3 & s_3 & c_3(x_3+x_1) & s_3(y_3+y_1) \\ & & & x_1 y_1 \\ & & & x_2 y_2 \\ & & & x_3 y_3 \\ & & & \frac{1}{2} \{ c_1(y_1+y_2) + s_1(x_1+x_2) \} \\ & & & \frac{1}{2} \{ c_2(y_2+y_3) + s_2(x_2+x_3) \} \\ & & & \frac{1}{2} \{ c_3(y_3+y_1) + s_3(x_3+x_1) \} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

したがって、 \mathbf{q} が \mathbf{u} の関数として

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (22)$$

のように得られる。ここに

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \quad (23)$$

である。いま、要素 m に関するポテンシャルエネルギー関数 Π_{pm} は

研 究 速 報

$$\Pi_{pm} = \frac{1}{2} \int_{A_m} \epsilon^T D \epsilon dA - u^T f \quad (24)$$

と表わされ、式 (24) に式 (17) および式 (22) を代入して

$$\Pi_{pm} = \frac{4}{2} u^T B^T \int_{A_m} \begin{Bmatrix} O \\ I \end{Bmatrix} D \{O \quad I\} dA B u - u^T f \quad (25)$$

を得る。式 (25) の停留条件より

$$f = 4A_m B^T \begin{Bmatrix} O & O \\ O & D \end{Bmatrix} B u \quad (26)$$

と与えられる。いま、マトリックス B を 3 行 3 列の 4 つの部分マトリックスに分割して、

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (27)$$

とおけば、式 (26) より要素の剛性マトリックス k は

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = 4A_m \begin{bmatrix} B_{21}^T D B_{21} & B_{21}^T D B_{22} \\ B_{22}^T D B_{21} & B_{22}^T D B_{22} \end{bmatrix} \quad (28)$$

と得られる。

ここで、式 (24) における $u^T f$ の項を考察する。式 (22) を式 (16) に代入して得られる要素の変位形 $w(x, y)$ は、節点変位 u_i の補間関数、すなわち、節点変位ベクトル u の成分のうち、 u_i に対応するその関数またはその関数の微分形が、 u_i の評価される節点において単位の値をとり、他の成分に対応するその関数またはその微分形、おのおのの成分が評価される節点における値がすべて零となるような、要素内でその値およびその微分の値が連続な関数 $\phi_i(x, y)$ の線形結合として、

$$w(x, y) = \sum u_i \phi_i(x, y) \quad (29)$$

と表わされる。仮想仕事の定義より

$$u^T f = \sum u_i f_i = \int_{A_m} p w dA + \int_{\partial A_m} u_B^T f_B ds \quad (30)$$

である。ここに、 f_B は要素に作用する要素周辺の力であり、 u_B は要素周辺の f_B に対応する変位である。いま、要素周辺の変位 u_B は、式 (29) に与えられた変位関数または変位関数の、 u_B の成分に対応する微分形の、要素周辺における値として、要素周辺に沿った座標系 s の関数として表わすことができる。変位関数が節点変位 u の関数として与えられるから、要素周辺の変位 u_B もやはり、節点変位 u の関数として与えられ、これを

$$u_{Bj} = \sum_i u_i \phi_{iBj}(s) \quad (31)$$

と書けば、式 (30) は

$$u^T f = \sum u_i f_i = \sum u_i \int_{A_m} p \phi_i dA + \sum_j \sum_i u_i \int_{\partial A_m} \phi_{iBj} f_{Bj} ds \quad (32)$$

となり、節点力 f_i の意義は

$$f_i = \int_{A_m} p \phi_i dA + \sum_j \int_{\partial A_m} \phi_{iBj} f_{Bj} ds \quad (33)$$

として示される。

ここで、式 (28) に得られた剛性マトリックスが、式 (2) に与えられた Herrmann のモデルと等価であることを示す。いま、式 (26) の節点力の意義は式 (33) に示されたものであり、要素の変位形を 2 次式で仮定した時点において、その反面に、要素周边上の曲げモーメント M_n が一定であることおよび M_n に対応する、要素周辺の法線方向の勾配 $w_{,n}$ が一次分布していることが了解される。また、式 (2) における節点力 σ_n と符号を対応させれば、式 (26) の節点力 f の内容は

$$f = \begin{Bmatrix} P \\ -M\sigma_n \end{Bmatrix} \quad (34)$$

であることが明らかである (図 5)。したがって、式 (26) を具体的に表わせば

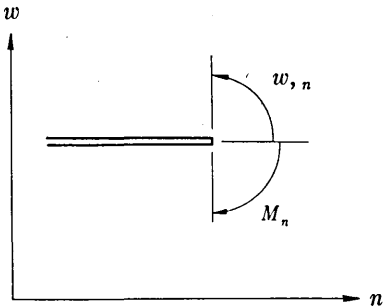


図 5 Sign Convention

$$\begin{Bmatrix} P \\ -M\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \quad (35)$$

である。式 (35) を分解して、式 (2) と対応するように書き直せば

$$\begin{Bmatrix} P \\ M\sigma_n \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -k_{11} + k_{12}k_{22}^{-1}k_{21} & k_{12}k_{22}^{-1}M \\ Mk_{22}^{-1}k_{21} & Mk_{22}^{-1}M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \quad (36)$$

となる。いま、式 (28) に与えられた各部分マトリックス k_{ij} を式 (36) に代入して整理すれば、式 (36) は

$$\begin{Bmatrix} P \\ M\sigma_n \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} O & B_{21}^T (B_{22}^{-1})^T M \\ MB_{22}^{-1}B_{21} & \frac{1}{4A_m} MB_{22}^{-1}D^{-1}(B_{22}^{-1})^T M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \quad (37)$$

となる。また、マトリックス B は、式 (23) に示されるように、式 (21) に与えられたマトリックス A の逆マトリックスであるから、マトリックス A を 3 行 3 列の 4 つの部分マトリックスに分割して

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (38)$$

とすれば

$$B_{21} = (A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \quad (39)$$

$$B_{22} = -(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22})^{-1} \quad (40)$$

である。いま、式 (37) のマトリックスの内容が、式 (2) のマトリックスの内容と同一であることを示すことは、式 (2) の部分マトリックス H および G が、それぞれ式 (3) および (4) に与えられるように

$$H = FCE^{-1} \tag{41}$$

$$G = A_m(E^{-1})^T N E^{-1} \tag{42}$$

であることから、式 (37) の内容と対応して

$$FCE^{-1} = B_{21}^T (B_{22}^{-1})^T M \tag{43}$$

$$A_m(E^{-1})^T N E^{-1} = \frac{1}{4A_m} M B_{22}^{-1} D^{-1} (B_{22}^{-1})^T M \tag{44}$$

を示すことになる。また、上の 2 つの式が成立することを示すことは、

$$N = D^{-1} \tag{45}$$

であることを考慮し、式 (43) および (44) に式 (39) および (40) を代入して得られる次の 2 式

$$FCE^{-1} = - (A_{11}^{-1})^T A_{21}^T M \tag{46}$$

および

$$2A_m E^{-1} = (A_{22}^T - A_{12}^T (A_{11}^{-1})^T A_{21}^T) M \tag{47}$$

を示すことと等価である。

いま、三角形領域内で線形分布する変位形

$$w(x, y) = \langle 1 \ x \ y \rangle \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \tag{48}$$

を考えてみると、式 (48) の係数ベクトル q は、三角形の三頂点の座標 $(x_i \ y_i) \ i=1, 2, 3$ によって、三頂点の変位 w_i の関数として

$$q = \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \tag{49}$$

と表わされる。したがって、三角形の三つの辺における、辺に沿った方向の勾配 $w_{,ii}$ は

$$\begin{Bmatrix} w_{,s1} \\ w_{,s2} \\ w_{,s3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & -s_1 & c_1 \\ 0 & -s_2 & c_2 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \tag{50}$$

と与えられる。また、変位が線形分布であるから $w_{,ii}$ は各頂点の変位 w_i によって

$$\begin{Bmatrix} w_{,s1} \\ w_{,s2} \\ w_{,s3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/a_1 & 1/a_1 & 0 \\ 0 & -1/a_2 & 1/a_2 \\ 1/a_3 & 0 & -1/a_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \tag{51}$$

と表わされることは明らかである。式 (50) および (51) より、次の関係式

$$F = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{Bmatrix} = (A_{11}^{-1})^T \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Bmatrix} M \tag{52}$$

が成立つことがわかる。いま、式 (52) を式 (46) に代入すれば明らかなように、式 (46) が成立つことを示すことは

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -s_1 c_1 & s_1 c_1 & c_1^2 - s_1^2 \\ -s_2 c_2 & s_2 c_2 & c_2^2 - s_2^2 \\ -s_3 c_3 & s_3 c_3 & c_3^2 - s_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1^2 & s_1^2 & 2s_1 c_1 \\ c_2^2 & s_2^2 & 2s_2 c_2 \\ c_3^2 & s_3^2 & 2s_3 c_3 \end{Bmatrix} \tag{53}$$

を示すことになり、式 (53) が成立つことは、具体的な計算によって、直ちに示すことができる。

いま、式 (46) が成立つことが示されたので、式 (46) を式 (47) に代入して、式 (47) は

$$A_{22}^T M E + A_{12}^T F C = 2A_m \tag{54}$$

と変換することができる。式 (54) が成立つことは、具体的に計算を進めることによって示すことができる。

したがって、式 (37) のマトリックスの内容は、式 (2) のマトリックスとまったく同じものであることがわかる。

4. おわりに

以上に、Reissner の変分原理にもとづいて、Herrmann によって誘導された平板曲げの有限要素マトリックス¹⁾とまったく同一の要素が、一般の変位分布仮定からも誘導することができることを示した。それぞれの誘導過程の対応において問題となるのは、要素周辺のポテンシャルエネルギーを代表する節点力または節点変位の意義であって、その内容によって、要素マトリックスの内容も当然変ってくる。ここで扱ったように、変位分布を 2 次の多項式で仮定した場合には、反面に要素内のモーメント分布が一定であることが了解され、したがって、仮定した系における要素周辺の力の分布およびそれに対応する変位の分布に対して節点力の意義が明確に、また、単純な形に表現され、要素マトリックスの内容を Herrmann の Model との対応において、具体的に検討することが可能となった。

異なった基本仮定から同一の結果が得られるという事実そのものは、むしろ当然の結果であって、ここで問題としたいのは、実は定式化の過程における、このような事実にもとづいた種々の考察である。紙数の都合でここでは言及しないが、別の機会に有限要素マトリックスの定式過程について考察してみたいと考えている。

(1970 年 11 月 26 日受理)

参考文献

- 1) L. R. Herrmann: Finite Element Bending Analysis for Plates; J. of Mech., Div. ASCE, 93, EM 5, pp. 13-26 (1967)
- 2) 吉田 裕: 応力分布仮定から誘導された Herrmann の Mixed Model と同一の有限要素マトリックス; 生産研究, Vol. 23, No. 2 (1971)