

応力分布仮定から誘導された Herrmann の Mixed Model と同一の有限要素マトリックス

The Same Finite Element Matrix as the Mixed Model by Herrmann derived from the Assumed Stress Distribution Approach

吉 田 裕*
Yutaka YOSHIDA

1. はじめに

平板曲げの問題は、それ自体が構造系の中で重要な位置を占めていると同時に、殻構造の解析への基礎となる問題であるために、構造力学における中心的研究課題の一つとして位置づけられている。したがって、有限要素法が具体化された初期の段階から、この解法を平板曲げの解析に適用することが行なわれ、数多くの成果があげられてきた。しかし、平板曲げの問題においては、面外の変位を対象とするという意味での三次元の変位曲面を扱うために種々の困難が内在する²⁾。そのために、有限要素マトリックスの定式過程に関して各方向から研究がなされ、有限要素法の基礎理論の発展は平板曲げの問題を対象としてなされてきたと言っても過言ではない。

有限要素の撓性マトリックスにもとづいた解析は、応力と変位とが相補関係にあることから、必然的に考えられることであり、早くから、その一般理論が展開されてきた³⁾。しかし、応力系にもとづいた解析においては、幾何学的視点が明確に表われないこと、また、連続体を構成する理想化された要素の不定定系としての意義が曖昧であるために、変位系にもとづいた解析ほど、広く一般的にはなっていない。したがって、応力仮定から出発する場合においても、要素内で仮定した応力分布にもとづいて、要素の剛性マトリックスを誘導しようとする立場が一般的である⁴⁾。

Fraeijns de Veubeke は、平板曲げの支配方程式と応力関数にもとづいた平面応力問題の支配方程式が同形であることから、3次の多項式による変位仮定にもとづく平板曲げの解析において論じられる、変位の不連続の問題点と同質の問題が、応力を線形分布に仮定した平面応力問題の解析においても存在するという意味において、応力仮定からの平面応力問題を論じている⁵⁾。応力分布を代数方程式で仮定した平面応力問題の剛性マトリックスは、Pian によっても与えられた⁶⁾。

変位分布仮定からの平板曲げの解析には、種々の問題点が存在することが指摘されてきた。したがって、応力分布仮定から、平板曲げの剛性マトリックスを誘導しようとする研究も数多くなされている⁷⁾⁸⁾⁹⁾。このような状況の中で、Reissner の変分原理にもとづいて、L. R. Herrmann によって誘導された有限要素マトリックス¹⁾¹⁰⁾は、変位と応力を混合した要素であるが、定式過程の卓抜さと、要素の自由度に比べて解析精度が高いこと

とのために、高く評価されている。

有限要素マトリックスの誘導過程の相違は、有限要素法を Ritz 法の一般形としてとらえ、変分原理を通して明確に説明することができるが、その際の重要な議論は、変位や応力の、要素間における連続性の問題である⁴⁾⁵⁾¹¹⁾¹²⁾。

上記 Herrmann の要素の特徴は、変位分布の仮定にもとづいた平板曲げの有限要素マトリックスの定式過程において最も問題となってきた、要素周辺における要素間の法線方向の勾配の連続の要求を、これに対応する曲げモーメントの連続を保証することによって置き換えた点にあるということができる。

本報告の目的は、変分原理にもとづいた理論的差異にもかかわらず、上記 Herrmann の要素¹⁾とまったく同一の要素が、一般の応力分布仮定からも誘導しうることを示すことにある。

2. Herrmann の平板曲げ要素¹⁾

L. R. Herrmann は、Hellinger-Reissner の変分原理にもとづいた次の形のエネルギー関数

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \sum_m \left(\int_{A_m} [M_{,\beta} \alpha^\beta w_{,\alpha} - B(M^{\alpha\beta}) - \bar{p}w] dA \right. \\ & - \oint_{s_m} M_{n,s} w_{,s} ds - \int_{s_{1m}} \bar{V}_n w ds \\ & \left. - \int_{s_{2m}} M_{n,\bar{w}} d\bar{s} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

の停留問題として、平板曲げの有限要素の定式化を行なった。ここに、 $B(M^{\alpha\beta})$ は相補エネルギー密度で

$$= -\frac{6}{Eh^3} [M_x^2 + M_y^2 - 2\nu M_x M_y + 2(1+\nu) M_{xy}^2] \quad (2)$$

であり、 $w_{,\alpha} = \partial w / \partial x$, $w_{,n} = \partial w / \partial n$, ……である。また、 s_m は要素 m の全周であり、 s_{1m} は要素 m の周辺のうち、境界条件としての \bar{V}_n が与えられている部分、 s_{2m} は境界条件としての $\bar{w}_{,n}$ が与えられている部分である。

要素間で変位 w と曲げモーメント M_n が連続するという条件を満たす最も簡単な変位および応力分布として、要素内で変位が x, y の線形関数であること、および要素内でモーメント M_x, M_y, M_{xy} が一定であると仮定する。変位が要素内で線形であれば、変位分布を三角形要素の三つの頂点に設けた節点の変位 w_i ($i=1, 2, 3$) の関数として表現することができ、要素間の変位の連続性が

* 東京大学生産技術研究所 第5部

研究速報

保証される。また、要素内で一定と仮定した M_x, M_y, M_{xy} を三角形要素の各辺上の曲げモーメント $M_{ni} (i=1, 2, 3)$ の関数として表現することにより、要素間の曲げモーメント M_n の連続性が保証される。

薄い板の曲げの弾性理論にもとづけば、曲率とモーメントの関係は次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} = -\frac{12}{Eh^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式(3)を

$$\epsilon = -N\sigma \quad (3')$$

のように書く。また、要素の辺上における曲げモーメント $M_{ni} (i=1, 2, 3)$ は、要素内で一定と仮定したモーメント σ の関数として

$$\begin{Bmatrix} M_{n1} \\ M_{n2} \\ M_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^2 & s_1^2 & 2s_1c_1 \\ c_2^2 & s_2^2 & 2s_2c_2 \\ c_3^2 & s_3^2 & 2s_3c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

のように表わされる (図-1)。ここに、

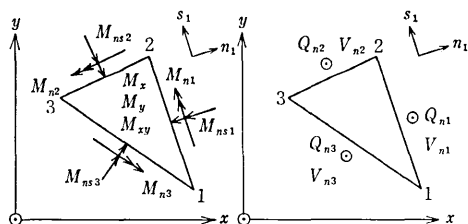


Fig. 1 Moment and shear notation

$$c_i = \cos \alpha_i, \quad s_i = \sin \alpha_i \quad i=1, 2, 3$$

であり、 α_i は各辺の法線の x 軸よりの角度である (図-2)。式(4)を

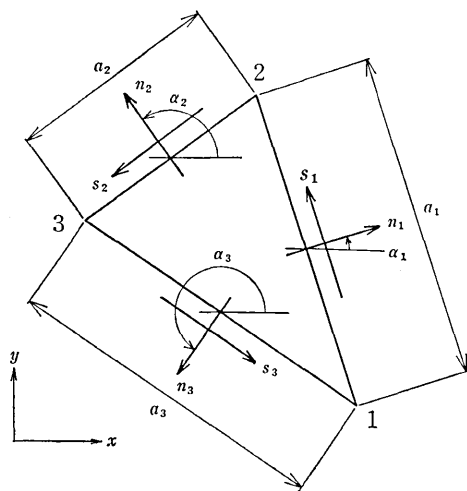


Fig. 2 Angle notation

$$\sigma_n = E\sigma \quad (4')$$

と書く。同様に、要素の辺上における振りモーメント $M_{ni} (i=1, 2, 3)$ は、 σ の関数として次のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} M_{n1} \\ M_{n2} \\ M_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1c_1 & s_1c_1 & c_1^2 - s_1^2 \\ -s_2c_2 & s_2c_2 & c_2^2 - s_2^2 \\ -s_3c_3 & s_3c_3 & c_3^2 - s_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式(5)を

$$\sigma_n = C\sigma \quad (5')$$

と書く。ここで、式(1)をマトリックス表示するために、式(1)の各項を考察する。要素内でモーメントを一定と仮定しているために、式(1)における $M_{,\beta} \alpha^\beta w_{,\alpha}$ の項は存在しない。また、

$$\begin{aligned} \int_{A_m} B(M^{\alpha\beta}) dA &= \frac{1}{2} \int_{A_m} \sigma^T N \sigma dA \\ &= \frac{A_m}{2} \sigma_n^T (E^{-1})^T N E^{-1} \sigma_n \end{aligned} \quad (6)$$

$$\int_{A_m} \bar{p} w dA = w^T \begin{Bmatrix} \bar{p} A_m/3 \\ \bar{p} A_m/3 \\ \bar{p} A_m/3 \end{Bmatrix} = w^T \bar{p} \quad (7)$$

ここに $w^T = \{w_1 \ w_2 \ w_3\}$ で、 $w_i (i=1, 2, 3)$ は要素の三つの頂点に設けた節点の変位である (図-3)。

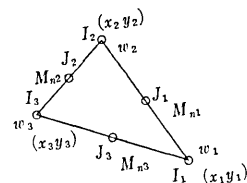


Fig. 3 Nodal point system and nodal parameters

次に、

$$\begin{aligned} \oint_{s_m} w_{,i} M_{ni} ds &= \sum_{ij=1}^3 \int_0^{a_{ij}} \frac{w_j - w_i}{a_{ij}} M_{ni,ij} ds \\ &= w^T \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sigma_n = w^T F \sigma_n \\ &= w^T F C E^{-1} \sigma_n \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_{s_m} \bar{V}_n w ds &= \sum_{ij=1}^3 \int_0^{a_{ij}} \left\{ \left(1 - \frac{s}{a_{ij}}\right) w_i + \frac{s}{a_{ij}} w_j \right\} \bar{V}_{n,ij} ds \\ &= w^T \begin{bmatrix} a_1/2 & 0 & a_3/2 \\ a_1/2 & a_2/2 & 0 \\ 0 & a_2/2 & a_3/2 \end{bmatrix} \bar{V}_n = w^T L \bar{V}_n \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、 $\bar{V}_n^T = \{\bar{V}_{n1} \ \bar{V}_{n2} \ \bar{V}_{n3}\}$ である。また、

$$\int_{s_m} \bar{w}_n M_n ds = \bar{w}_n^T \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \sigma_n = \bar{w}_n^T M \sigma_n \quad (10)$$

ここに、 $\bar{w}_n^T = \{\bar{w}_{n1} \ \bar{w}_{n2} \ \bar{w}_{n3}\}$ である。

したがって、式(1)は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} -\Pi_R &= \frac{A_m}{2} \sigma_n^T (E^{-1})^T N E^{-1} \sigma_n + w^T \bar{p} + w^T F C E^{-1} \sigma_n \\ &\quad + w^T L \bar{V}_n + \bar{w}_n^T M \sigma_n \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)の停留条件

$$\begin{aligned} -\delta \Pi_R &= \delta \sigma_n^T \{A_m (E^{-1})^T N E^{-1} \sigma_n + (E^{-1})^T C^T F^T w \\ &\quad + M \bar{w}_n\} + \delta w^T (F C E^{-1} \sigma_n + L \bar{V}_n + \bar{p}) \end{aligned}$$

$$= \{\delta w^T \delta \sigma_n^T\} \\ \left(\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{FCE}^{-1} \\ (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{C}^T \mathbf{F}^T & \mathbf{A}_m (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{NE}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{Bmatrix} \mathbf{LV}_n + \bar{\mathbf{P}} \\ \mathbf{M}\bar{w}_n \end{Bmatrix} \right) = 0 \quad (12)$$

より、次の形の有限要素マトリックス

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{G} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \sigma_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{LV}_n + \bar{\mathbf{P}} \\ \mathbf{M}\bar{w}_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (13)$$

を得ることができる。ここに、

$$\mathbf{H} = \mathbf{FCE}^{-1} \quad (14)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}_m (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{NE}^{-1} \quad (15)$$

である。また、 \mathbf{O} は 3 行 3 列の零マトリックスである。

式(13)が Herrmann の与えた平板曲げの有限要素マトリックスであるが、これと同一の要素を一般の応力分布仮定からも誘導することができることを以下に示す。

3. 応力分布仮定からの誘導

はじめに、応力分布仮定にもとづいた有限要素マトリックスの定式過程を概括する。

要素内の応力 σ の分布を、次式のように与える。

$$\sigma = \phi \beta \quad (16)$$

ここに、 ϕ は座標の関数であり、 β は未知係数のベクトルである。また、式(16)は応力 σ が平衡条件を満たすように決められる。要素内のひずみ ϵ は、弾性定数のマトリックス \mathbf{N} によって、

$$\epsilon = \mathbf{N}\sigma \quad (17)$$

のように表わされる。要素の境界边上の変位 u_B を、節点変位 u の関数として

$$u_B = \mathbf{L}_s u \quad (18)$$

と表わす。境界边上の変位 u_B に対応する境界边上の力 f_B は、要素内で仮定した応力分布によって表わすことができるから、応力係数ベクトル β によって

$$f_B = \mathbf{R}\beta \quad (19)$$

と表わすことができる。

個々の要素の節点力とそれに対応する節点変位との関係を求めるという意味において、個々の要素に関する相補エネルギー関数を考える。すなわち、要素の相補エネルギー関数 Π_c は

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_{A_m} \sigma^T \mathbf{N} \sigma dA - f^T u \quad (20)$$

である。ここに、 f は節点変位 u に対応する節点力である。いま、式(20)における $f^T u$ は、仮相仕事の定義より

$$f^T u = \oint f_B^T u_B ds \quad (21)$$

であり、式(21)に式(18)および(19)を代入して

$$f^T u = \beta^T \oint \mathbf{R}^T \mathbf{L}_s ds u \quad (22)$$

したがって、式(20)に式(16)および(22)を代入して

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \beta^T \int_{A_m} \phi^T \mathbf{N} \phi dA \beta - \beta^T \oint \mathbf{R}^T \mathbf{L}_s ds u \quad (23)$$

を得る。式(23)の停留条件から

$$\mathbf{H}_c \beta = \mathbf{T}_c u \quad (24)$$

を得る。ここに、

$$\mathbf{H}_c = \int_{A_m} \phi^T \mathbf{N} \phi dA \quad (25)$$

$$\mathbf{T}_c = \oint \mathbf{R}^T \mathbf{L}_s ds \quad (26)$$

である。式(24)を式(22)に代入して

$$f = \mathbf{T}_c^T \mathbf{H}_c^{-1} \mathbf{T}_c u \quad (27)$$

を得る。したがって、要素の剛性マトリックス \mathbf{k} は

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}_c^T \mathbf{H}_c^{-1} \mathbf{T}_c \quad (28)$$

と与えられる。

ここで、三角形要素内でモーメント M_x, M_y, M_{xy} が一定であるという応力分布仮定にもとづいて、平板曲げの有限要素マトリックスを定式化する。

三角形要素の各辺上における曲げモーメント σ_n および捩りモーメント σ_{ns} は、式(4)および式(5)に示されたように、要素内のモーメント σ の関数として、

$$\sigma_n = \mathbf{E}\sigma \quad (29)$$

$$\sigma_{ns} = \mathbf{C}\sigma = \mathbf{CE}^{-1}\sigma_n \quad (30)$$

と与えられる。いま、要素の各辺の中央に設けた節点における、曲げモーメント M_n に対応する変位 w_n の符号を、Herrmann の要素と対応して、 M_n の正の向きと逆向きに正として設定する(図-4)。

Fig. 4 Sign convention

また、 w_n は辺上で一定であると仮定すれば、 σ_n が一定であるから

$$-\oint \sigma_n^T w_n ds = -\sigma_n^T \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} w_n \\ = -\sigma_n^T \mathbf{M} w_n \quad (31)$$

より、等価な一般化節点変位が $-\mathbf{M} w_n$ と与えられることがわかる。また、要素内でモーメントが一定であるから、辺上の換算剪断力は零となり、捩りモーメントの不連続から生ずる、三角形要素の各頂点における集中力 $P_i (i=1, 2, 3)$ が

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{n1} \\ M_{n2} \\ M_{n3} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

と表わされる。式(32)は式(8)と対応する関係式であり

$$\mathbf{P} = -\mathbf{F}\sigma_n = -\mathbf{FCE}^{-1}\sigma_n \quad (33)$$

と書くことができる。ここに、

$$\mathbf{P}^T = \{P_1 P_2 P_3\}$$

である。したがって、要素の頂点に設けた節点における、集中力 P_i に対応する節点変位を w_i とすれば、式(20)における $f^T u$ の項は

$$f^T u = \mathbf{P}^T w - \sigma_n^T \mathbf{M} w_n \quad (34)$$

となるから

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_{A_m} \sigma^T \mathbf{N} \sigma dA - \mathbf{P}^T w + \sigma_n^T \mathbf{M} w_n \quad (35)$$

と表わされる。ここに、

研 究 速 報

$$\mathbf{w}^T = \{w_1 \ w_2 \ w_3\}$$

である。式(35)に式(29)および(33)を代入して

$$\begin{aligned} \Pi_c = & \frac{A_n}{2} \sigma_n^T (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{N} \mathbf{E}^{-1} \sigma_n \\ & + \sigma_n^T (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{C}^T \mathbf{F}^T \mathbf{w} + \sigma_n^T \mathbf{M} \mathbf{w}_n \end{aligned} \quad (36)$$

を得る。また、式(36)は式(14)および(15)より

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \sigma_n^T \mathbf{G} \sigma_n - \sigma_n^T \{-\mathbf{H}^T \ \mathbf{I}\} \mathbf{u} \quad (37)$$

と書くことができる。ここに、

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ -\mathbf{M} \mathbf{w}_n \end{Bmatrix} \quad (38)$$

であり、 \mathbf{I} は単位マトリックスである。したがって、式(37)の停留条件より

$$\mathbf{G} \sigma_n = \{-\mathbf{H}^T \ \mathbf{I}\} \mathbf{u} \quad (39)$$

を得る。式(33)を式(34)に代入すれば

$$\mathbf{f}^T \mathbf{u} = \sigma_n^T \{-\mathbf{H}^T \ \mathbf{I}\} \mathbf{u} \quad (40)$$

と得られるから、式(40)に式(39)を代入して

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{H} \\ \mathbf{I} \end{Bmatrix} \mathbf{G}^{-1} \{-\mathbf{H}^T \ \mathbf{I}\} \mathbf{u} = \mathbf{k} \mathbf{u} \quad (41)$$

となり、要素の剛性マトリックス \mathbf{k} が

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^T & -\mathbf{H} \mathbf{G}^{-1} \\ -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}^T & \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix} \quad (42)$$

と得られる。

ここで注意しなければならないのは、定式過程において設定された節点変位 \mathbf{w}_n が個々の要素に固有の座標系に関する変位であって、要素間で共通の座標系に関する変位ではないことである。したがって、式(42)に与えられた剛性マトリックスによって、構造全体系の剛性マトリックスを構成しようとする場合には、新たに節点変位 \mathbf{w}_n の符号に関する考慮が必要である。

いま、要素間で要素の辺上の曲げモーメント M_n が連続するという条件で、構造全体系の解析を進めることが可能である。その際には、式(42)に与えた有限要素マトリックスを、以下に示すように変換する必要がある。すなわち、式(41)に与えられた関係式

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ -\mathbf{M} \mathbf{w}_n \end{Bmatrix} \quad (43)$$

より得られる方程式

$$\mathbf{P} = \mathbf{k}_{11} \mathbf{w} - \mathbf{k}_{12} \mathbf{M} \mathbf{w}_n \quad (44)$$

$$\sigma_n = \mathbf{k}_{21} \mathbf{w} - \mathbf{k}_{22} \mathbf{M} \mathbf{w}_n \quad (45)$$

を解いて、次の形の関係式に変換する。すなわち、

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \mathbf{w}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} - \mathbf{k}_{12} \mathbf{k}_{22}^{-1} \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{12} \mathbf{k}_{22}^{-1} \\ \mathbf{k}_{22}^{-1} \mathbf{k}_{21} & -\mathbf{k}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \quad (46)$$

式(46)の各部分マトリックスに式(42)の剛性マトリックスの成分を代入すれば

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \mathbf{w}_n \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \quad (47)$$

が得られる。式(47)に得られた有限要素マトリックスは、式(13)に与えられた有限要素マトリックスとまったく同一のものであることは一目瞭然である。

4. お わ り に

以上に、Reissner の変分原理にもとづいて、Herrmann によって誘導された平板曲げの有限要素マトリックス¹⁾とまったく同一のマトリックスが、一般の応力分布仮定からも誘導することができることを示した。それぞれの誘導過程の本質から考えれば、モーメント一定の仮定から、同一の結果に至るという事実は、ごく当然の結果であるのだが、現実の問題としては、このような事実にもとづいて考えさせられる多くの問題点が存在するに思ふ。また、変位分布仮定からも同一の要素を誘導することができる。紙数の都合で、ここでは、二つの異なった基本仮定から、同一の結果が得られるという事実を示すにとどめるが、別の機会に、変位分布仮定からの誘導とともに、有限要素マトリックスの定式過程について考察してみたいと考えている。 (1970 年 11 月 18 日受理)

参 考 文 献

- 1) L. R. Herrmann: Finite Element Bending Analysis for Plates; J. of Mech., Div. ASCE, **93**, EM5, pp. 13-26 (1967)
- 2) 吉田 裕: 有限要素法による平板曲げの解析; 生産研究, **22**, No. 1, pp. 28-33 (1970)
- 3) J. H. Argyris and S. Kelsey: Energy Theorems and Structural Analysis; Butterworths Scientific Publications, 1960
- 4) B. Fraeijs de Veubeke: Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method; in Stress Analysis, (Ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister), Chap. 9 Wiley, London, 1965
- 5) B. Fraeijs de Veubeke: Bending and Stretching of Plates—Special Models for Upper and Lower Bounds; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, pp. 863-886 (1965)
- 6) T. H. H. Pian: Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions; AIAA Jnl., **2**, pp. 1333-1336 (1964)
- 7) T. H. H. Pian: Element Stiffness-Matrices for Boundary Compatibility and for Prescribed Boundary Stresses; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, pp. 457-477 (1965)
- 8) R. T. Severn and P. R. Taylor: The Finite Element Method for Flexure of Slabs when Stress Distributions Are Assumed; Proc. Instn. Civ. Engrs, **34**, pp. 153-170 (1966)
- 9) R. J. Allwood and G. M. M. Cornes: A Polygonal Finite Element for Plate Bending Problems Using the Assumed Stress Approach; Int. J. for Numerical Meth. in Eng., **1**, pp. 135-149 (1969)
- 10) L. R. Herrmann: A Bending Analysis for Plates; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, pp. 577-604 (1965)
- 11) K. Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity; Pergamon Press, Oxford, 1968
- 12) T. H. H. Pian and P. Tong: Basis of Finite Element Methods for Solid Continua; Int. J. for Numerical Meth. in Eng., **1**, pp. 3-28 (1969)