UDC 532.583.01：517.54

自由表面を有する二次元流体問題の一解法

A Method of Solution of the Two Dimensional Hydrodynamical Problems with Free Surface

前　田　久　明*
Hisaaki MAEDA

1. ま え が き

自由表面を有する理想流体中に浮いている物体が，周期的に定常運動する場合に作用する流体力を解析的に解く方法としては，田才法[1]が知られている．本法は，田才法に準じて記述してあるが，波無しポテンシャルの求め方が独自のものであって，これは別所の波無し分布の方法[2]によるものである．この新しい解法の効果は，周波数が大きな場合に発揮される．解法の手順は次の通りである．自由表面に浮んだ物体としては，単位円から等角写像によって得られる図形を断面形状とする無限に長い柱状体を考える．(図１) z-面の原点に発散波の特異点

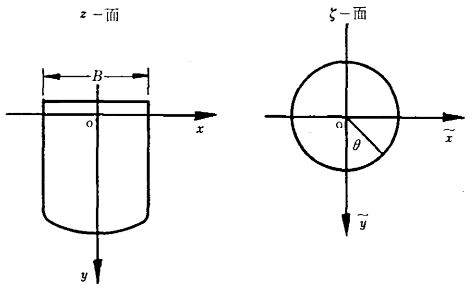

図1

を置き，ζ-面の原点に波無しの特異点を置く．これらの特異点は，基礎方程式としてのラプラスの方程式と，物体表面以外の全ての境界条件を満足するものとする．物体表面の境界条件は，波無し特異点の組合せ方によって満足させるようにする．ここにおいて求められた速度ポテンシャルから動的な圧力が求まり，この圧力を物体表面上にわたって積分すれば，これが物体に作用する付加質量，減衰係数等の流体力にほかならない．

2. 断　面　形

等角写像としては，M を縮率として次の写像関数を考える．これは Lewis Form と呼ばれるものであって，単位円を船型に近い断面形状に写像する関数である．

$$z=M(\zeta+a_1\zeta^{-1}+a_3\zeta^{-3}) \tag{1}$$

記号のとり方は図１のようにとり，

$$\zeta=\tilde{x}+i\tilde{y}=ie^{\alpha}e^{-i\theta} \tag{2}$$

$$z=x+iy \tag{3}$$

とおくと，断面形状の x，y 座標は次のようになる．

$$x=M(e^{\alpha}\sin\theta+a_1e^{-\alpha}\sin\theta-a_3e^{-3\alpha}\sin 3\theta) \tag{4}$$

$$y=M(e^{\alpha}\cos\theta-a_1e^{-\alpha}\cos\theta+a_3e^{-3\alpha}\cos 3\vartheta) \tag{5}$$

3. 波無しポテンシャル

速度ポテンシャルを ϕ とおくと，波無しポテンシャルは，補助関数 w として上下反対称で無限遠で正則な調和関数を導入することによって，次のように表わすことができる．

z-面においては

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \tag{6}$$

$$w(x,y)=-w(x,-y) \tag{7}$$

を満たす w を求め，波数を $K=\omega^2/g$ (ω：円周波数) として

$$\phi=Kw-\partial w/\partial y \tag{8}$$

とおくと，この速度ポテンシャルが波無しポテンシャルとなり，基礎方程式と自由表面の境界条件

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0 \tag{9}$$

$$[K\phi+\partial\phi/\partial y]_{y=0}=0 \tag{10}$$

を満足し，無限遠で正則な調和関数となる．ところで，この問題を解くにあたっては，ζ-面の極座標表示に直した方が便利である．そこで，(6)～(10) 式を ζ-面での (α,θ) で表示すると次のようになる．

$$\nabla^2 w(\alpha,\theta)=0 \tag{11}$$

$$w(\alpha,\theta)=-w(\alpha,\pi-\theta) \tag{12}$$

$$\phi=Kw-\frac{1}{D}\left[\frac{\partial w}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}-\frac{\partial w}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right] \tag{13}$$

$$\nabla^2\phi(\alpha,\theta)=0 \tag{14}$$

$$\left[K\phi+\frac{1}{D}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}-\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right\}\right]_{\theta=\pm\pi/2}=0 \tag{15}$$

ただし

$$D=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\end{vmatrix} \tag{16}$$

さて，まず (11) 式を変数分離により解き，(12)式を満たす解を求めてみると

$$w_{2m}=\frac{e^{-(2m-1)\alpha}}{(2m-1)}\cos(2m-1)\theta\quad(m=1,2,\cdots) \tag{17}$$

となる．したがって，(13)式より波無しポテンシャルの組は $\xi_0=K\cdot B/2$ とおくと

* 東京大学生産技術研究所　第２部

$$\phi_{2m}=\frac{1}{M}\Big[\frac{\xi_0}{1+a_1+a_3}\cdot\frac{e^{-(2m-1)\alpha}}{(2m-1)}\cdot\cos(2m-1)\theta$$
$$+\frac{\{e^{-(2m-2)\alpha}\cos 2m\theta+a_1e^{-2m\alpha}\cos(2m-2)\theta}{\{e^{2\alpha}+a_1^2e^{-2\alpha}+9a_3^2e^{-6\alpha}+(2a_1-6a_1a_3e^{-4\alpha})}$$
$$\frac{-3a_3e^{-(2m+2)\alpha}\cos(2m-4)\theta\}}{\times\cos 2\theta-6a_3e^{-2\alpha}\cos 4\theta\}}\Big] \tag{18}$$

半没円筒の場合は，$a_1=a_3=0$ であるので，Ursellの解に一致する．

次に，ϕ_{2m} に対応する流れ関数 ψ_{2m} を求めてみる．

$$\partial\tilde{w}/\partial x=\partial\tilde{w}/\partial y \tag{19}$$
$$\partial\tilde{w}/\partial x=-\partial w/\partial y \tag{20}$$

となる $\tilde{w}$ を導入すると，(4)，(5)，(8) 式と Cauchy-Riemann の関係より

$$\psi=K\tilde{w}=\frac{1}{D}\Big[\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}-\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial\alpha}\Big] \tag{21}$$

となる．

ところで，(17)式から

$$\tilde{w}_{2m}=\frac{e^{-(2m-1)\alpha}}{(2m-1)}\sin(2m-1)\theta \qquad (m=1,2,\cdots) \tag{22}$$

したがって，

$$\psi_{2m}=\frac{1}{M}\Big[\frac{\xi_0}{1+a_1+a_3}\cdot\frac{e^{-(2m-1)\alpha}}{(2m-1)}\sin(2m-1)\theta$$
$$+\frac{\{e^{-(2m-2)\alpha}\sin 2m\theta+a_1e^{-2m\alpha}\sin(2m-2)\theta}{\{e^{2\alpha}+a_1^2e^{-2\alpha}+9a_3^2e^{-6\alpha}+(2a_1-6a_1a_3e^{-4\alpha})}$$
$$\frac{-3a_3e^{-(2m+2)\alpha}\sin(2m-4)\theta\}}{\times\cos 2\theta-6a_3e^{-2\alpha}\cos 4\theta\}} \tag{23}$$

半没円筒の場合にはやはり，Ursell の解に一致する．

4. 流 体 力

以上の波無しポテンシャルを利用して，物体が自由表面上で上下揺れをしたときの造波による減衰係数あるいは付加質量等の流体力を求めてみることにする．記号等は田才に準じて記述する．ζ-面の原点に波無し特異点を，z-面の原点に発散波の特異点をおくことによって，流れ関数 ψ は次のように表わされる．

いま，発散波の流れ関数として

$$\psi_c=\pi\cdot e^{-Ky}\sin Kx \tag{24}$$
$$\psi_s=\int_0^\infty\frac{e^{-kx}}{K^2+k^2}\{k\sin ky+K\cos ky\}dk$$
$$-\pi\cdot e^{-Ky}\cos Kx \tag{25}$$

波無し流れ関数として (23) 式より

$$\psi_{2m}'=M\cdot\psi_{2m} \tag{26}$$

η：無限遠における発散波の振幅

とおくと，積分定数 p_{2m}，q_{2m} を導入することにより，流れ関数は

$$\Big(\frac{\pi\omega}{g\eta}\Big)\psi=\psi_c\cos\omega t+\psi_s\sin\omega t+\cos\omega t\sum_{m=1}^{\infty}p_{2m}(\xi_0)\psi_{2m}'$$
$$+\sin\omega t\sum_{m=1}^{\infty}q_{2m}(\xi_0)\psi_{2m}' \tag{27}$$

となる．

さらにこの式は，物体表面の境界条件

$$[\psi]_{\alpha=0}=-U\cdot M(\sin\theta+a_1\sin\theta-a_3\sin 3\theta) \tag{28}$$

を満足させねばならないことから次の関係式を得る．U は物体表面の上下速度とする．

$$\psi_{c0}-\frac{\sin\theta+a_1\sin\theta-a_3\sin 3\theta}{1+a_1+a_3}\cdot[\psi_{c0}]_{\theta=\pi/2}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}p_{2m}\cdot f_{2m} \tag{29}$$
$$\psi_{s0}-\frac{\sin\theta+a_1\sin\theta-a_3\sin 3\theta}{1+a_1+a_3}\cdot[\psi_{s0}]_{\theta=\pi/2}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}q_{2m}\cdot f_{2m} \tag{30}$$

ただし

$$\psi_{c0}=[\psi_c]_{\alpha=0},\quad \psi_{s0}=[\psi_s]_{\alpha=0} \tag{31}$$
$$f_{2m}=-\Big[\frac{\xi_0}{1+a_1+a_3}\cdot\frac{\sin(2m-1)\theta}{2m-1}$$
$$+\frac{\sin 2m\theta+a_1\sin(2m-2)\theta-3a_3\sin(2m-4)\theta}{1+2a_1\cos 2\theta+a_1^2-6a_1a_3\cos 2\theta-6a_3\cos 4\theta+9a_3^2}$$
$$-\frac{\xi_0}{(1+a_1+a_3)^2}\cdot\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}(\sin\theta+a_1\sin\theta$$
$$-a_3\sin 3\theta)\Big] \tag{32}$$

である．この連立方程式を解けば，p_{2m}，q_{2m} を求めることができる．

ここで，

$$A_0=[\psi_{c0}]_{\theta=\pi/2}+\sum_{m=1}^{\infty}p_{2m}\cdot\frac{\xi_0}{1+a_1+a_3}\cdot\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \tag{33}$$
$$B_0=[\psi_{s0}]_{\theta=\pi/2}+\sum_{m=1}^{\infty}q_{2m}\cdot\frac{\xi_0}{1+a_1+a_3}\cdot\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \tag{34}$$

とおくと，造波による減衰係数 $\bar{A}$ は

$$\bar{A}=\frac{\pi\xi_0}{\sqrt{A_0^2+B_0^2}} \tag{35}$$

となる．

次に

$$\phi_c=\pi e^{-Ky}\cos Kx \tag{36}$$
$$\phi_s=\pi e^{-Ky}\sin Kx-\int_0^\infty\frac{e^{-ky}}{K^2+k^2}\{k\cos ky-K\sin ky\}dk \tag{37}$$

とし，

$$M_0=\int_0^{\pi/2}\phi_s\cdot\frac{\cos\theta+a_1\cos\theta-3a_3\cos 3\theta}{1+a_1+a_3}d\theta$$
$$+\int_0^{\pi/2}\sum_{m=1}^{\infty}q_{2m}\cdot g_{2m}\cdot\frac{\cos\theta+a_1\cos\theta-3a_3\cos 3\theta}{1+a_1+a_3}d\theta \tag{38}$$

$$N_0=\int_0^{\pi/2}\phi_c\cdot\frac{\cos\theta+a_1\cos\theta-3a_3\cos 3\theta}{1+a_1+a_3}d\theta$$
$$+\int_0^{\pi/2}\sum_{m=1}^{\infty}p_{2m}\cdot g_{2m}\cdot\frac{\cos\theta+a_1\cos\theta-3a_3\cos 3\theta}{1+a_1+a_3}d\theta \tag{39}$$

とおく．

ただし

$$g_{2m}=\left[\frac{\xi_0}{1+a_1+a_3}\cdot\frac{\cos(2m-1)\theta}{2m-1}\right.$$
$$\left.+\frac{\cos 2m\theta+a_1\cos(2m-2)\theta-3a_3\cos(2m-4)\theta}{(1+a_1{}^2+9a_3{}^2)+(2a_1-6a_1a_3)\cos 2\theta-6a_3\cos 4\theta}\right] \tag{40}$$

以上から，付加質量係数 K_4 は次のように表わされる．

$$K_4=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{M_0B_0+N_0A_0}{A_0{}^2+B_0{}^2}\cdot\frac{(1+a_1+a_3)^2}{(1+a_1)^2+3a_3{}^2} \tag{41}$$

5. 周波数が無限大の場合

田才法においては，周波数が無限大の場合には，積分定数を r_{2m} とおくと

$$M(\sin\theta+a_1\sin\theta-a_3\sin 3\theta)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_{2m}}{1+a_1+a_3}\left\{\frac{\sin(2m-1)\theta}{2m-1}+\frac{a_1\sin(2m+1)\theta}{2m+1}\right.$$
$$\left.-\frac{3a_3\sin(2m+3)\theta}{2m+3}\right\} \tag{42}$$

となる．この式が θ のいかんを問わず成り立つためには

$$r_2=M(1+a_1)(1+a_1+a_3) \tag{43}$$

$$r_4=-3Ma_3(1+a_1+a_3)-Ma_1(1+a_1)(1+a_1+a_3) \tag{44}$$

$$r_{2m+4}=3a_3r_{2m}-a_1r_{2m+2}\quad(m=1,2,\cdots) \tag{45}$$

となる．これに対して本法では，$\xi_0\to\infty$ の場合には，(27) (28) より，

$$M(\sin\theta+a_1\sin\theta-a_3\sin 3\theta)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_{2m}}{1+a_1+a_3}\cdot\frac{\sin(2m-1)\theta}{2m-1} \tag{46}$$

したがって

$$r_2=M(1+a_1+a_3)(1+a_1) \tag{47}$$

$$r_4=-3M(1+a_1+a_3)a_3 \tag{48}$$

$$r_{2m+4}=0\quad(m=1,2,\cdots) \tag{49}$$

(45) (49) を比較してみればわかる通り，本法による方が周波数が大きい場合の収束がよい．

6. お わ り に

以上，波無し分布の手法を導入して，自由表面を有する二次元流体問題の一解法について，また，本法は運動の周波数が大きくなった場合に田才法より解の収束がよいことについて述べた．いろいろご討論を賜わった一色浩氏に深謝します．

(1970 年 2 月 24 日受理)

文　　献

1) 田才福造：造船協会論文集 105 号
2) 別所正利：造船協会論文集 117 号