

非線形問題解析法の現状と展望

The Status and Outlook for the Solution of Nonlinear Problems by the Finite Element Method

山 田 嘉 昭*

Yoshiaki YAMADA

マトリックス法は応用力学、とくに材料力学の領域に衝撃を与えた。その大きな影響を受けて成就されたここ数年の進歩のあとで、非線形の問題は、今後に解決の期待される残された分野のうち、主要なものの一つである。本稿では日米マトリックス構造解析法セミナーにおいて、材料非線形および幾何学的非線形の問題をめぐって行なわれた発表および討論の主要点を述べ、さらに筆者が将来における進展の正しい方向と考えている点について解説する。

非線形問題は、普通は大別して、材料非線形性 (material nonlinearity) と、幾何学的非線形性 (geometric nonlinearity) の二つの分野にわけられている。前者は、弾性限度を越えてのち、主として、材料の塑性的性質 (plasticity) による非線形挙動を取扱う。弾性変形と塑性変形とが同程度の大きさで共存する弾塑性問題 (elastic-plastic problem) あるいは拘束流れ (contained plastic flow) の問題は、この分野に属している。材料非線形性を主体とするとき、普通は変形またはひずみを小さいものとする。すなわち弾性微小変形問題と同じく、要素の位置の変化あるいは物体の形状変化を無視し、幾何学的な変形に関する限りは、線形として問題を取扱うのである。

一方において、もっぱら幾何学的非線形性を対象としている有限変形の理論 (finite deformation theory) では、線形理論において2次以上の微小項として無視している幾何学的変化の項の影響を考える。そしてその発展の現段階では、主として弾性変形に取扱いが限定されているのが実状である。

上で述べた非線形問題の二つの分野、すなわち材料および幾何学的非線形性を統一的に解く手法はないであろうか。日米マトリックス構造解析法セミナーの第2日 (1969年8月26日) は、非線形問題の session であったが、そこで発表された論文および討論の焦点も、帰するところは、将来における非線形問題の統一的な取扱いにあったと思う。

本稿では、上記日米セミナーにおいて筆者が発表したところを中心として非線形問題に関する解析法の現状を要約し、さらに将来の動向について筆者の見解を述べることにしたい。筆者は、非線形問題の取扱いにおいて、純粋に増分的 (incremental) な立場をとっており、今後ともそれを続けてゆきたい。したがって以下の話題も、塑性変形において増分形で表示された応力-ひずみマトリックス、その土の力学への拡張、ならびに有限変形への応用の可能性など、増分理論を中心として展開すること

になろう。

1. 塑性応力-ひずみマトリックス $[D^p]$ (1) マトリックス $[D^p]$ の陽な表示

筆者は一連の研究^{1)~5)}において、塑性変形における応力増分とひずみ増分を結ぶ応力-ひずみマトリックスを追求してきた。そうして、現在では Hill の降伏条件を塑性ポテンシャルとする場合までについて、式の誘導を終えている。得られた結果は、次のようにマトリックス表示することができる。

$$\{d\sigma\} = [D^p] \{d\varepsilon\} \quad (1)$$

$$[D^p] = [D^*]$$

$$-\frac{1}{S} \left\{ \begin{array}{cccccc} S_1^2 & & & & & \\ S_1 S_2 & S_2^2 & & & & \\ S_1 S_3 & S_2 S_3 & S_3^2 & & & \\ S_1 S_4 & S_2 S_4 & S_3 S_4 & S_4^2 & & \\ S_1 S_5 & S_2 S_5 & S_3 S_5 & S_4 S_5 & S_5^2 & \\ S_1 S_6 & S_2 S_6 & S_3 S_6 & S_4 S_6 & S_5 S_6 & S_6^2 \end{array} \right\} \text{SYM. (対称)} \quad (2)$$

ただし、 $[D^*]$ は弾性変形の応力-ひずみマトリックスをあらわし、弾性変形についても塑性変形と同一の主軸をもつ直交異方性を仮定するとき、その表示式は次のようである。

$$\{d\sigma\} = [D^*] \{d\varepsilon\} \quad (3)$$

$$[D^*] = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{pmatrix} \quad (4)$$

(2)式においては、Hillが提案した2次形式の降伏条件を用い、相当応力 $\bar{\sigma}$ と相当塑性ひずみ増分 $d\bar{\varepsilon}^p$ を次のように定義している⁶⁾⁷⁾。

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \frac{F(\sigma_y - \sigma_x)^2 + G(\sigma_x - \sigma_z)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2}{F+G+H} \quad (5)$$

* 東京大学生産技術研究所 第1部

$$\bar{d}\varepsilon^p = \sqrt{\frac{2}{3}(F+G+H) \left[F \left(\frac{Gd\varepsilon_{yz}^p - Hd\varepsilon_{xz}^p}{FG+GH+HF} \right)^2 + \dots + \frac{(d\gamma_{yz}^p)^2}{2L} + \dots \right]^{1/2}} \quad (6)$$

また、(2)式の中の S, S_1, \dots, S_6 は次のように定義される量である。

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= d_{11}\sigma_x' + d_{12}\sigma_y' + d_{13}\sigma_z' \\ S_2 &= d_{12}\sigma_x' + d_{22}\sigma_y' + d_{23}\sigma_z' \\ S_3 &= d_{13}\sigma_x' + d_{23}\sigma_y' + d_{33}\sigma_z' \\ S_4 &= 2d_{44}\tau_{yz}' \\ S_5 &= 2d_{55}\tau_{xz}' \\ S_6 &= 2d_{66}\tau_{xy}' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$S = \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H' + S_1\sigma_x' + S_2\sigma_y' + S_3\sigma_z' + 2S_4\tau_{yz}' + 2S_5\tau_{xz}' + 2S_6\tau_{xy}' \quad (8)$$

H' は相当応力 $\bar{\sigma}$ に対して $\int \bar{d}\varepsilon^p$ をプロットして得られる曲線のこう配をあらわし、材料から異方性主軸の方向に採取した試料を引張試験することなどによって求めることができる。また、同様の引張試験やねじり試験から異方性パラメータ F, G, H, L, M, N の比を定めることができる。(7)式と(8)式においてダッシュをつけてあらわした応力 $\sigma_x', \dots, \tau_{yz}', \dots$ は次のように与えられる量である。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x' &= \frac{H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)}{F + G + H} \\ \sigma_y' &= \frac{F(\sigma_y - \sigma_z) + H(\sigma_y - \sigma_x)}{F + G + H} \\ \sigma_z' &= \frac{G(\sigma_z - \sigma_x) + F(\sigma_z - \sigma_y)}{F + G + H} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz}' &= \frac{L\tau_{yz}}{F + G + H} \\ \tau_{xz}' &= \frac{M\tau_{xz}}{F + G + H} \\ \tau_{xy}' &= \frac{N\tau_{xy}}{F + G + H} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

等方性材料は、異方性パラメータの間に次の関係

$$3F = 3G = 3H = L = M = N \quad (11)$$

が成立する特別な場合である。このとき(9)式と(10)式の応力は、いわゆる偏差応力 (deviatoric stress) に帰一する。また等方性材料に対して、(2)式と(4)式の応力-ひずみマトリックスは次のように表示される。

$$[D^*] = [D^*] \quad \text{SYM. (対称)}$$

$$- \frac{2G}{S_0} \begin{pmatrix} \sigma_x'^2 & & & & & \\ \sigma_x'\sigma_y' & \sigma_y'^2 & & & & \\ \sigma_x'\sigma_z' & \sigma_y'\sigma_z' & \sigma_z'^2 & & & \\ \sigma_x'\tau_{yz}' & \sigma_y'\tau_{yz}' & \sigma_z'\tau_{yz}' & \tau_{yz}^2 & & \\ \sigma_x'\tau_{xz}' & \sigma_y'\tau_{xz}' & \sigma_z'\tau_{xz}' & \tau_{yz}\tau_{xz}' & \tau_{xz}^2 & \\ \sigma_x'\tau_{xy}' & \sigma_y'\tau_{xy}' & \sigma_z'\tau_{xy}' & \tau_{yz}\tau_{xy}' & \tau_{xz}\tau_{xy}' & \tau_{xy}^2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$[D^*] = 2G \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (13)$$

ただし、(12)式において、 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ は横弾性係数、 ν はポアソン比、 E は縦弾性係数をあらわす。また S_0 は次のようである。

$$S_0 = \frac{2\bar{\sigma}^2}{3} \left(\frac{H'}{3G} + 1 \right) \quad (14)$$

等方性材料の相当応力 $\bar{\sigma}$ は

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{xz}^2 + 6\tau_{xy}^2 \} \quad (15)$$

または次式で与えられる。

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} (\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{yz}'^2 + 2\tau_{xz}'^2 + 2\tau_{xy}'^2) \quad (16)$$

(2) 他の表示式との関係

アメリカにおける研究、とくに Marcal などの論文⁸⁾⁹⁾では、(1)式の関係が次のような形に表示されている。

$$\{d\sigma\} = \left([D^*] - \frac{[D^*] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right] [D^*]}{H' + \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right] [D^*] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \right) \{d\varepsilon\} \quad (17)$$

ただし、 $[D^*]$ は直交異方性材料に対して(4)式、等方性材料に対して(13)式で与えられる弾性応力-ひずみマトリックス、 $\bar{\sigma}$ は相当応力をあらわす。弾塑性問題の領域において今後、国際的な研究協力が強力に進展するであろう情勢から考え、わが国で広く用いられている塑性応力-ひずみ関係式の表示と、Marcal などの(17)式の対応を考察しておくことは価値がある。

等方性材料では、相当応力 $\bar{\sigma}$ が(15)式または(16)式で与えられる。したがってそのこう配を成分とする行ベクトルは

$$\left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right] = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \{ \sigma_x' \sigma_y' \sigma_z' 2\tau_{yz}' 2\tau_{xz}' 2\tau_{xy}' \} \quad (18)$$

(18)式と等方弾性体の $[D^*]$ すなわち(13)式とのマトリックス積は

$$\left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right] [D^*] = \frac{3G}{\bar{\sigma}} \{ \sigma_x' \sigma_y' \sigma_z' \tau_{yz}' \tau_{xz}' \tau_{xy}' \} \quad (19)$$

$[D^*] \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right]$ は $\left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right] [D^*]$ の転置マトリックスであるか

ら、(17)式の括弧内に含まれる項の分子は

$$\begin{aligned}
 [D^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right] [D^e] &= \frac{3G}{\bar{\sigma}} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x' \\ \vdots \\ \tau_{yz}' \end{array} \right\} \frac{3G}{\bar{\sigma}} [\sigma_x' \dots \tau_{yz}' \dots] \\
 &= \frac{9G^2}{\bar{\sigma}^2} \left[\begin{array}{cccccc} \sigma_x'^2 & & & & & \\ \sigma_x' \sigma_y' & \sigma_y'^2 & & & & \\ \sigma_x' \sigma_z' & \sigma_y' \sigma_z' & \sigma_z'^2 & & & \\ \sigma_x' \tau_{yz} & \sigma_y' \tau_{yz} & \sigma_z' \tau_{yz} & \tau_{yz}^2 & & \\ \sigma_x' \tau_{xz} & \sigma_y' \tau_{xz} & \sigma_z' \tau_{xz} & \tau_{yz} \tau_{xz} & \tau_{xz}^2 & \\ \sigma_x' \tau_{xy} & \sigma_y' \tau_{xy} & \sigma_z' \tau_{xy} & \tau_{yz} \tau_{xy} & \tau_{xz} \tau_{xy} & \tau_{xy}^2 \end{array} \right] \text{SYM. (対称)} \quad (20)
 \end{aligned}$$

同様に(17)式の括弧内に含まれる項の分母は

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right] [D^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} &= \frac{3G}{\bar{\sigma}} [\sigma_x' \dots \tau_{yz}' \dots] \frac{3}{2\bar{\sigma}} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x' \\ \vdots \\ 2\tau_{yz}' \\ \vdots \end{array} \right\} = 3G \quad (21)
 \end{aligned}$$

上の二つの式により、(17)式が(12)式に等価であることが容易にわかる。

次に直交異方性材料を考えると、その相当応力の表示式は(5)式である。したがって $\sigma_x', \dots, \tau_{yz}, \dots$ を(9)式および(10)式のように定義するときは、(18)式と全く同じく

$$\left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right] = \frac{3}{2\bar{\sigma}} [\sigma_x' \sigma_y' \sigma_z' 2\tau_{yz}' 2\tau_{xz}' 2\tau_{xy}'] \quad (22)$$

弾性応力-ひずみマトリックス $[D^e]$ は(4)式で与えられるので

$$\left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right] [D^e] = \frac{3}{2\bar{\sigma}} [S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6] \quad (23)$$

ただし、 S_1, \dots, S_6 は(7)式によって定義されるものとする。以下、等方性材料の場合と同様に

$$\begin{aligned}
 [D^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right] [D^e] &= \frac{3}{2\bar{\sigma}} \left\{ \begin{array}{c} S_1 \\ \vdots \\ S_6 \end{array} \right\} \frac{3}{2\bar{\sigma}} [S_1 \dots S_6] \\
 &= \frac{9}{4\bar{\sigma}^2} \left[\begin{array}{cccccc} S_1^2 & & & & & \\ S_1 S_2 & S_2^2 & & & & \\ S_1 S_3 & S_2 S_3 & S_3^2 & & & \\ S_1 S_4 & S_2 S_4 & S_3 S_4 & S_4^2 & & \\ S_1 S_5 & S_2 S_5 & S_3 S_5 & S_4 S_5 & S_5^2 & \\ S_1 S_6 & S_2 S_6 & S_3 S_6 & S_4 S_6 & S_5 S_6 & S_6^2 \end{array} \right] \text{SYM. (対称)} \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right] [D^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} &= \frac{3}{2\bar{\sigma}} [S_1 \dots S_6] \frac{3}{2\bar{\sigma}} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x' \\ \vdots \\ 2\tau_{xy}' \end{array} \right\} \\
 &= \frac{9}{4\bar{\sigma}^2} (S_1 \sigma_x' + S_2 \sigma_y' + S_3 \sigma_z' \\
 &\quad + 2S_4 \tau_{yz}' + 2S_5 \tau_{xz}' + 2S_6 \tau_{xy}') \quad (25)
 \end{aligned}$$

以上の結果を(17)式に代入し、(8)式に注意すれば、(17)式が(2)式と等価であることが直ちにわかる。

2. 土の力学への応用

(1) Drucker-Prager の降伏条件式

金属材料では、(5)式や(15)式などの相当応力 $\bar{\sigma}$ を塑性ポテンシャルとして応力-ひずみ関係式が導かれ、このことは第1近似として、金属の塑性変形を非圧縮性とみなし得ることに対応している。これに対して、土や岩石では塑性変形にともなって体積の変化が認められ、降伏条件においても、変形の圧縮性または膨張性に対応する項を考慮しなければならない。こうして金属材料の降伏条件を拡張し、土や岩石によく用いられているのは、次に示す Drucker と Prager の式である¹⁰⁾¹¹⁾。

$$f = \alpha J_1 + \sqrt{J_2} = k \quad (26)$$

ただし、(26)式は等方性材料に対するもので、 J_1 と J_2 は座標変換における応力の1次および2次の不変量、それぞれ

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3J_2} &= \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 \\
 &\quad + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{xy}^2)^{1/2}} \quad (28)
 \end{aligned}$$

をあらわす。 $\sqrt{3J_2}$ は(16)式の $\bar{\sigma}$ と同じである。

ここでは、Drucker-Prager の(26)式を異方性材料に拡張して、次の降伏条件式を用いることにしよう。

$$\bar{f} = \frac{3}{2} \bar{\alpha} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \bar{\sigma} = Y = \sqrt{3} k \quad (29)$$

ただし相当応力としては、(5)式で与えられる異方性材料の $\bar{\sigma}$ を用い、(26)式の α および k との対応は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \alpha \\ \bar{f} &= \sqrt{3} k \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

(29)式を塑性ポテンシャルとし、前節と同様に解析を進めると、ここで考えている圧縮性異方性材料についての塑性応力-ひずみマトリックスが次のように与えられることがわかる。

$$\begin{aligned}
 [D^e] &= [D^e] \\
 &= \frac{1}{\bar{S}} \left[\begin{array}{cccccc} \bar{S}_1^2 & & & & & \\ \bar{S}_1 \bar{S}_2 & \bar{S}_2^2 & & & & \\ \bar{S}_1 \bar{S}_3 & \bar{S}_2 \bar{S}_3 & \bar{S}_3^2 & & & \\ \bar{S}_1 \bar{S}_4 & \bar{S}_2 \bar{S}_4 & \bar{S}_3 \bar{S}_4 & \bar{S}_4^2 & & \\ \bar{S}_1 \bar{S}_5 & \bar{S}_2 \bar{S}_5 & \bar{S}_3 \bar{S}_5 & \bar{S}_4 \bar{S}_5 & \bar{S}_5^2 & \\ \bar{S}_1 \bar{S}_6 & \bar{S}_2 \bar{S}_6 & \bar{S}_3 \bar{S}_6 & \bar{S}_4 \bar{S}_6 & \bar{S}_5 \bar{S}_6 & \bar{S}_6^2 \end{array} \right] \text{SYM. (対称)} \quad (31)
 \end{aligned}$$

弾性異方性を考慮するとき、 $[D^e]$ は(4)式で与えられる。また、(31)式に含まれる量の定義は

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_1 &= S_1 + \bar{\alpha} T_1 \\ \bar{S}_2 &= S_2 + \bar{\alpha} T_2 \\ \bar{S}_3 &= S_3 + \bar{\alpha} T_3 \\ \bar{S}_4 &= S_4 \\ \bar{S}_5 &= S_5 \\ \bar{S}_6 &= S_6 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

S_1, \dots, S_6 は前節と同様に(7)式で与えられる。新しい

パラメータ T_1, T_2, T_3 は

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= (d_{11} + d_{12} + d_{13})\bar{\sigma} \\ T_2 &= (d_{12} + d_{22} + d_{23})\bar{\sigma} \\ T_3 &= (d_{13} + d_{23} + d_{33})\bar{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H' + \bar{S}_1\sigma_x' + \bar{S}_2\sigma_y' + \bar{S}_3\sigma_z' + 2\bar{S}_4\tau_{yz}' \\ &\quad + 2\bar{S}_5\tau_{zx}' + 2\bar{S}_6\tau_{xy}' + \bar{\alpha}\bar{\sigma}(\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3) \end{aligned} \quad (34)$$

弾性等方性材料に対して

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 2G\sigma_x', \quad S_4 = 2G\tau_{yz}' \\ S_2 &= 2G\sigma_y', \quad S_5 = 2G\tau_{zx}' \\ S_3 &= 2G\sigma_z', \quad S_6 = 2G\tau_{xy}' \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$T_1 = T_2 = T_3 = \frac{E}{1-2\nu}\bar{\sigma} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H' + 2G(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 \\ &\quad + 2\tau_{yz}'^2 + 2\tau_{zx}'^2 + 2\tau_{xy}'^2) + 3\bar{\alpha}^2\bar{\sigma}^2 \frac{E}{1-2\nu} \end{aligned} \quad (37)$$

とくに塑性的性質についても等方性の場合、(37)式を次のように書きあらわすことができる。

$$\bar{S} = \frac{4}{3}\bar{\sigma}^2 \left(\frac{H'}{3} + G + \frac{9}{4} \frac{\bar{\alpha}^2 E}{1-2\nu} \right) \quad (38)$$

上の諸式において、 H' は降伏応力 (f)-相当塑性ひずみ $\int d\epsilon^p$ 曲線のこう配 $d\bar{\sigma}/d\epsilon^p$ をあらわす。塑性的に等方性の材料では、相当塑性ひずみ増分 $d\epsilon^p$ が次の式で与えられる。

$$d\epsilon^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\epsilon_{y^p} - d\epsilon_{z^p})^2 + \dots + \frac{3}{2}(d\gamma_{yz^p})^2 + \dots} \quad (39)$$

これは、塑性的に非圧縮性の金属における(6)式に、 $3F=3G=3H=L=M=N$ とおいて得られる式と全く同じである。ただし詳細は省略するが、圧縮性でしかも異方性の材料における相当塑性ひずみ増分の表示式は、金属における(6)式とは異なったものになることを述べておきたい。

(2) 降伏条件式のパラメータの決定

土などでは、もしそれが異方性であれば、異方性パラメータのほかに、(29)式の f および $\bar{\alpha}$ を、いわゆる粘着力 (cohesion) および休止角 (pose angle) の関数として、どのように決定するかが問題である。普通は、平面ひずみ状態の試験が用いられ、 $d\epsilon_z^p=0$ と近似的におくことができるような状態を考えるものとしよう*。

(29)式を塑性ポテンシャルとして

$$\begin{aligned} d\epsilon_z^p &= (\bar{\alpha}\bar{\sigma} + \sigma_z') d\lambda = 0 \\ \sigma_z' &= \frac{G(\sigma_x - \sigma_z) + F(\sigma_x - \sigma_y)}{F + G + H} \end{aligned}$$

ゆえに次の結果が得られる。

* 平面ひずみ条件は、厳密には $d\epsilon_z=0$ である。ここでは永久変形量が大きく、近似的に $d\epsilon_z^p=0$ とみなし得る状態まで、変形を与えたものとする。

$$\sigma_z = \frac{G\sigma_x + F\sigma_y - (F+G+H)\bar{\alpha}\bar{\sigma}}{F+G} \quad (40)$$

ここで考えている平面ひずみ圧縮試験では、 $\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ であるから、(5)式の相当応力 $\bar{\sigma}$ は

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} \frac{F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_x - \sigma_z)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2N\tau_{xy}^2}{F+G+H}$$

(40)式を代入して、 σ_z を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(F+G+H)\bar{\sigma}^2 &= \frac{FG+GH+HF}{F+G}(\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ &\quad + \frac{(F+G+H)^2}{F+G}\bar{\alpha}^2\bar{\sigma}^2 + 2N\tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

したがって

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\frac{3}{2} \frac{FG+GH+HF}{F+G}(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 3N\tau_{xy}^2}{(F+G+H)\left(1 - \frac{3}{2} \frac{F+G+H}{F+G}\bar{\alpha}^2\right)} \quad (41)$$

また、(40)式により

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{(F+2G)\sigma_x + (2F+G)\sigma_y - (F+G+H)\bar{\alpha}\bar{\sigma}}{F+G} \quad (42)$$

以上により、平面ひずみ条件下の試験に対して(29)式は次のように書きあらわされることになる。

$$\begin{aligned} f &= \frac{3}{2}\bar{\alpha} \frac{(F+2G)\sigma_x + (2F+G)\sigma_y}{F+G} \\ &\quad + \frac{\left[\frac{3}{2} \frac{FG+GH+HF}{F+G}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 3N\tau_{xy}^2 \right]^{1/2}}{\sqrt{F+G+H}} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{3}{2} \frac{F+G+H}{F+G}\bar{\alpha}^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (43)$$

等方性材料に対して、(43)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sqrt{3}k &= f = \frac{9}{4}\bar{\alpha}(\sigma_x + \sigma_y) \\ &\quad + \sqrt{3} \left[\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \left(1 - \frac{9}{4}\bar{\alpha}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} &= \frac{k}{\sqrt{1-9\bar{\alpha}^2/4}} \\ &\quad - \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{\bar{\alpha}(\sigma_x + \sigma_y)}{\sqrt{1-9\bar{\alpha}^2/4}} \end{aligned} \quad (44)$$

土の力学では、等方性材料に対して、降伏条件が次のように表示される (図1を参照)。

$$R = c \cos \phi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \phi \quad (45)$$

または

$$\tau = c - \sigma \tan \phi \quad (46)$$

(44)式と(45)式を比較すると

$$\left. \begin{aligned} c \cos \phi &= \frac{k}{\sqrt{1-9\bar{\alpha}^2/4}} \\ \sin \phi &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{1-9\bar{\alpha}^2/4}} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

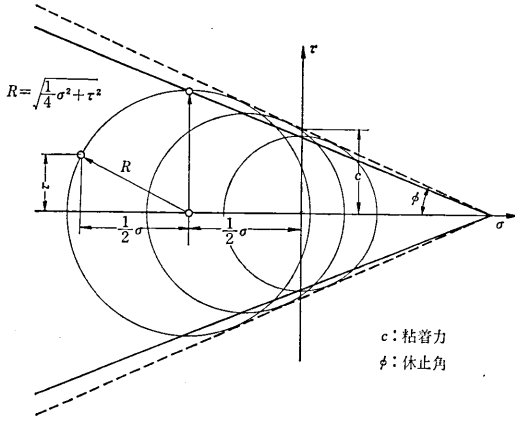


図 1 土などの圧縮性材料の降伏条件

$\bar{\alpha}$ の代わりに, (30)式に従って慣用の $\alpha = \sqrt{3}\bar{\alpha}/2$ を用いると

$$\left. \begin{aligned} c \cos \phi &= \frac{k}{\sqrt{1-3\alpha^2}} \\ \sin \phi &= \frac{3\alpha}{\sqrt{1-3\alpha^2}} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

α と k について解けば

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\sin \phi}{\sqrt{9+3\sin^2 \phi}} \\ k &= \frac{3c \cos \phi}{\sqrt{9+3\sin^2 \phi}} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

粘着力 c および休止角 ϕ が実験で求められると, (49)式により α と k , (30)式により降伏条件(29)式の表示に必要な $\bar{\alpha}$ と f が定まることになる。

異方性材料では, たとえば x 方向に荷重を加えて平面ひずみ圧縮試験を行なったものとすれば, (43)式から

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{3}{2} \frac{FG+GH+HF}{(F+G)(F+G+H)} \sigma_x^2 + \frac{3N}{F+G+H} \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{f}{\sqrt{1 - \frac{3}{2} \frac{F+G+H}{F+G} \bar{\alpha}^2}} - \frac{3}{2} \frac{\bar{\alpha}(F+2G)\sigma_x}{(F+G)} \end{aligned} \quad (50)$$

この場合, 図2のように実験結果を描くと, 図の記号を用いて, 次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} c_x \cos \phi_x &= \frac{\frac{f}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 - \frac{3}{2} \frac{F+G+H}{F+G} \bar{\alpha}^2}} \\ \sin \phi_x &= \frac{\frac{F+2G}{F+G} \bar{\alpha}}{\sqrt{1 - \frac{3}{2} \frac{F+G+H}{F+G} \bar{\alpha}^2}} \\ & \quad \times \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(F+G)(F+G+H)}{FG+GH+HF}} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

上の式を $\bar{\alpha}$ と f について解けば

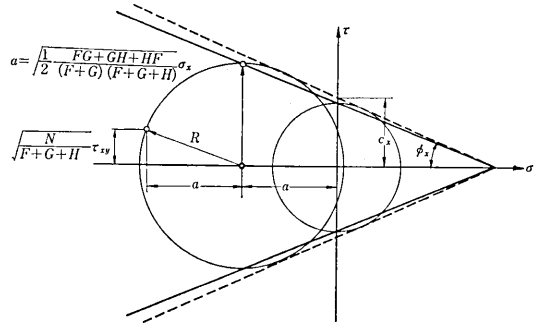


図 2 圧縮性の異方性材料の降伏条件

$$\bar{\alpha} = \frac{2 \sin \phi_x}{\sqrt{3}} \left[\frac{2(F+2G)^2(F+G+H)}{(F+G)(FG+GH+HF)} + \frac{2(F+G+H)}{F+G} \sin^2 \phi_x \right]^{1/2} \quad (52)$$

$$f = \sqrt{3} k \frac{\sqrt{3} c_x \cos \phi_x}{\sqrt{1 + \frac{FG+GH+HF}{(F+2G)^2} \sin^2 \phi_x}} \quad (53)$$

x 方向に圧縮の荷重 σ_x を加えてせん断試験を行ない, 図2の c_x および ϕ_x を決定したものとすれば, (52)式と(53)式により異方性降伏条件(29)式の表示に必要な $\bar{\alpha}$ および f を決定することができる。 y 方向の圧縮を加えてせん断試験を行なったときも, 同様にして $\bar{\alpha}$ および f を求めることができる。 y 方向の試験結果から, 図2のようにして得られる c_y と ϕ_y の値は x 方向のそれと異なったものになるが, (29)式が成立する限りにおいて, 最後に得られる $\bar{\alpha}$ と f とは, 同一値でなければならない。

3. 接線係数法と初期ひずみ法

(1) 連続体の弾塑性問題の二つの解法

アメリカにおける文献で, Marcal など³⁹⁾によって接線係数法 (tangent modulus method) とよばれている弾塑性解析法は, わが国において, 陽な塑性応力-ひずみマトリックス(1)式を用いて広く行なわれている解析法^{20,4)}とまったく同じである。すなわち接線係数法においては, 降伏によって塑性状態となった要素に対して, (17)式の括弧中の項で与えられる塑性-応力ひずみマトリックス $[D^*]$ をそのままの形で使用し, 数値解析法を組立てる。

これに対して, 別に初期ひずみ法 (initial strain method) とよばれている方法では, (17)式を次の形に書きあらわす。

$$\{d\sigma\} = [D^*] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_i\}) = [D^*] \{d\varepsilon\} - \{d\sigma_a\} \quad (54)$$

ただし $\{d\sigma_a\}$ は

$$\{d\sigma_a\} = [D^*] \{d\varepsilon_i\} = \frac{[D^*] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \right\} [D^*]}{H' + \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \right\} [D^*] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \right\}} \{d\varepsilon\} \quad (55)$$

$\{d\varepsilon_i\}$ は材料の降伏による要素の見掛けの剛性の低下のために現われる項であるが、計算上では、ちょうど熱膨張、クリープ、残留ひずみなどで代表される初期ひずみと同様に取扱うことができる。そうして $\{d\varepsilon_i\}$ に対して、(55) 式のように見掛けの応力増分 (apparent stress increment) $\{d\sigma_a\}$ を生じているとみなすことができるのである。

初期ひずみ法では、(54) 式を基礎にして解法を組立て見掛けの応力増分 $\{d\sigma_a\}$ に対して、見掛けの荷重増分 $\{dF_a\}$ を生じるものとする。したがって、物体または構造物全体が弾性状態にとどまっているとしたときに得られる剛性マトリックスを $[K^*]$ とすれば

$$\{dP\} = [K^*] \{du\} - \{dF_a\} \quad (56)$$

ただし、 $\{dP\}$ は構造物全体について与えられる外力増分、 $\{du\}$ は節点変位増分をあらわす。上の式を用い、初期ひずみ法では次のように計算を行なう。

(i) 最初に適当な初期ひずみ $\{d\varepsilon_i\}$ を仮定し、各要素についてそれに対応する見掛けの応力増分 $\{d\sigma_a\}$ および荷重増分 $\{dF_a\}$ を求める。

(ii) 次に構造物全体について剛性方程式(56)式を組立て、これを解いて $\{du\}$ を求める。この場合、 $[K^*]$ は弾性変形のそれと同じであるから、構造物全体についての $\{dF_a\}$ を修正するほか、計算はすべて前段とまったく同様である。

(iii) 次に $\{du\}$ から各要素の $\{d\varepsilon\}$ または $\{d\varepsilon_i\}$ を求めて、最初に仮定した初期ひずみおよび見掛けの応力増分を修正し、解が収束するまで計算を繰り返す。

以上の初期ひずみ法に対抗して、最初に述べた接線係

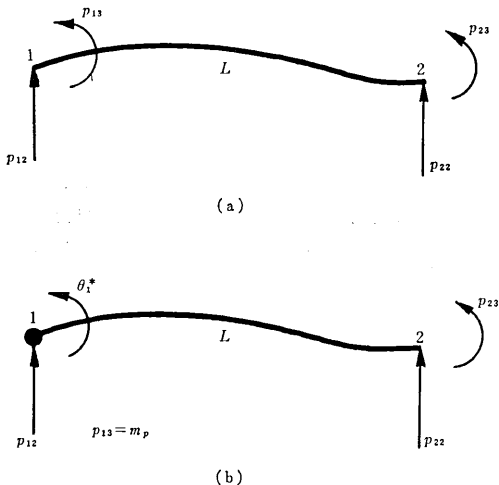


図3 はり要素と塑性関節

数法では、要素が降伏することに剛性マトリックスのほうを修正し、(56) 式の代わりに

$$\{dP\} = [K^*] \{du\} \quad (57)$$

の形で問題を解くことになる。

(3) 骨組の弾塑性解析との類似

マトリックス構造解析法に統一的な解釈を与えるためここで骨組構造の弾塑性解析においても、上で述べた接線係数法と初期ひずみ法に対応して、二つの解法が考えられることに注意を喚起しておきたい。図3に示す一様断面のはり要素に対して、部材座標系における剛性方程式は次のように書きあらわすことができる¹²⁾¹³⁾。簡単のため軸方向成分を省略すると、弾性変形に対して

$$\{p\} = [K^*] \{d\} \quad (58)$$

ただし

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_{12} \\ p_{13}/L \\ p_{22} \\ p_{23}/L \end{Bmatrix}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{13}L \\ d_{22} \\ d_{23}L \end{Bmatrix}$$

$$[K^*] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (59)$$

ただし、 E は縦弾性係数、 I は断面2次モーメント、 L はスパンの長さをあらわす。

ここで、たとえば図3 (b) のように、部材端1に塑性関節 (plastic hinge) を発生したものとすれば、(58) 式に代わり、次のような剛性方程式が成立することになる。ただし、 m_p は全塑性モーメントをあらわし、反時計まわりの関節を生じたとき、 m_p の複号を正とする。

$$\{p\} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \{d\} \pm \begin{Bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \left(\frac{m_p}{L} \right) \quad (60)$$

したがって弾性状態のはり要素に(58)式、塑性状態すなわち一端または両端に塑性関節を持つ要素に(60)式などの剛性方程式を用い、節点におけるつり合い方程式を記述すれば、構造物全体について得られる関係式は

$$\{P\} = [K^*] \{d\} + \{f\} m_p \quad (61)$$

の形となる。この場合は、はり要素が降伏することにマトリックス $[K^*]$ の内容が変わり、それから(61)式により $\{d\}$ を求めることになるので、解法は前項で接線係数法とよんだものに相当している。

骨組構造のもう一つの解法では、塑性関節を生じたとき、関節における傾斜角の不連続量を θ^* として、それを独立変数に選ぶ。すると図3 (b) の例では、(60) 式の

代わりに次の剛性方程式が成立する。

$$\{p\} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \{d\} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} \theta_1^* L \quad (62)$$

ただし、 θ_1^* は節点 1 における傾斜角の不連続量をあらわす。(62)式において $\{d\}$ にかかっている剛性マトリックスは、(59)式すなわち弾性変形の場合と全く同じである。したがって要素の方程式を組合せ、節点におけるつり合いを考えて得られる構造物全体の剛性方程式は

$$\{P\} = [K^e] \{d\} + \sum \{c_i\} \theta_i^* \quad (63)$$

(63)式では、弾性マトリックス $[K^e]$ を全変形過程に対し用いる。すなわち(63)式は(56)式に類似し、 $\sum \{c_i\} \theta_i^*$ を(56)式の見掛けの荷重 $\{dF_i\}$ に相当すると考えることができるのである。したがって骨組構造において角度不連続 θ^* を独立変数とする弾塑性解析法は、前項で述べた初期ひずみ法に対応することになる。

4. 幾何学的非線形問題と増分理論

(1) 簡単な例題による序説

ワシントン大学の Martin 教授は、日米マトリックス構造解析法セミナーにおいて、図 4 に示す簡単ではあるが興味ある例題を用い、幾何学的非線形問題に付随する問題点を説明しようと試みた¹⁴⁾。本節では同じ例題によって、塑性力学の分野で従来から用いられている純粋に増分的な取扱い (incremental method) の意味を考察することにしたい。いわゆる有限変形理論 (finite deformation theory) の立場からも、最近ではいろいろな増分的な取扱いが提案されている。しかしそれらは、塑性力学という増分論と多少趣きを異にし、筆者には考え違いをしている場合も多いように思われるのである。幾何学的非線形の問題では、物体の形状変化のために、外力のなす仕事の式などが、形状変化を考えない場合とは異なる表示式であらわされることに注意する必要がある。また純粋に増分的な立場では、仮想仕事の原理や最小ポテン

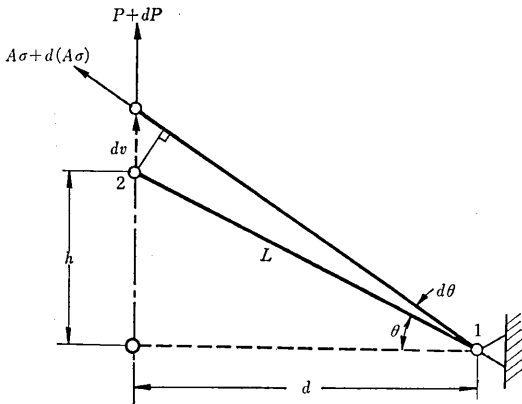


図 4 幾何学的非線形問題の簡単な例

シャルエネルギーの原理などの表示式が、応力増分とひずみ増分によって (普通に行なわれているように) 応力とひずみ増分によってではなく) 書かれたものでなければならぬ。

図 4 の例題を考え、水平軸と θ の傾角をなす棒の断面積を A 、応力を σ 、棒の一端 2 に外力を加えて鉛直方向に動かすものとすれば、力のつり合いから

$$P = A\sigma \sin \theta \quad (64)$$

σ は真応力をあらわし、 P は鉛直方向の荷重である。角度 θ の状態から、さらに棒の一端 2 を鉛直方向に動かすものとすれば、そのときの荷重増分は(64)式により

$$dP = d(A\sigma) \sin \theta + A\sigma \cos \theta d\theta \quad (65)$$

またそのとき、棒の伸びひずみ増分を $d\varepsilon$ 、部材端 2 の鉛直方向の変位増分を dv とすれば、幾何学的関係から

$$\left. \begin{aligned} dv \cos \theta &= L d\theta \\ dv \sin \theta &= L d\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

ゆえに

$$d\varepsilon = \tan \theta d\theta \quad (67)$$

棒の変形が弾性範囲内にあるものとすると、応力増分は

$$d\sigma = E d\varepsilon = E \frac{\sin \theta}{L} dv = E \tan \theta d\theta \quad (68)$$

(66)式と(68)式を用いると、(65)式の荷重増分 dP は次のように書きあらわされる。

$$\begin{aligned} dP &= \sigma \sin \theta dA + A \sin \theta d\sigma + A\sigma \cos \theta d\theta \\ &= \sigma \sin \theta dA + \frac{AE}{L} \sin^2 \theta dv + \frac{A\sigma}{L} \cos^2 \theta dv \end{aligned} \quad (69)$$

ゆえに荷重増分 dP と変位増分 dv を結ぶ剛性マトリックスは

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dv} &= K_0 + K_1 + \sigma \sin \theta \frac{dA}{dv} \\ K_0 &= \frac{AE}{L} \sin^2 \theta, \quad K_1 = \frac{A\sigma}{L} \cos^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

(70)式において K_1 は、考えている変形段階において応力 σ が存在するための項であり、初期応力が存在する場合に類似しているので、Martin などにより、初期応力マトリックス (initial stress matrix) とよばれている。

(70) 式の第 3 項は、棒の断面積 A の変化による項で、従来の有限変形理論による取扱いには現われていない。断面積の変化は、ポアソン比を ν とし、また(66)式を用いると

$$\frac{dA}{A} = -2\nu d\varepsilon = -2\nu \frac{\sin \theta}{L} dv$$

ゆえに

$$\sigma \sin \theta \frac{dA}{dv} = -2\nu \frac{A\sigma}{L} \sin^2 \theta \quad (71)$$

棒の傾斜角 θ が大きいとき、この断面積の変化による項は(70)式の K_1 に比較して無視し得ない大きさとなる。

(2) 増分形の変分原理

ここでふたたび図4の例について、次のような積分を考える。すなわち公称応力を s 、ひずみを ε とし、それらの増分の積 (スカラー積) として定義される量の体積積分を考えると

$$\int ds d\varepsilon dV \quad (72)$$

真応力増分 $d\sigma$ ではなく、このように公称応力増分 ds を用いるのは、のちに一般の連続体に拡張する場合、つり合い方程式などの表示が簡単となり、式の取扱いに便利だからである。図4の例題では応力とひずみの分布が均一であるから

$$\int ds d\varepsilon dV = AL ds d\varepsilon \quad (73)$$

公称応力 s と真応力 σ の間には、 A_0 を原断面積として次の関係がある。

$$sA_0 = \sigma A \quad (74)$$

したがって考えている時刻において $A_0 = A$ とすれば

$$A_0 ds = Ad s = Ad\sigma + \sigma dA$$

または

$$ds = d\sigma + \sigma dA/A \quad (75)$$

次に図4の鉛直方向の力 P とその増分は

$$\left. \begin{aligned} P &= A_0 s \sin\theta, \quad A_0 = A \\ dP &= Ad s \sin\theta + As \cos\theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

(73)式の $d\varepsilon$ に(66)式の関係を用いると

$$\begin{aligned} \int ds d\varepsilon dV &= AL ds \frac{\sin\theta}{L} dv = Ad s \sin\theta dv \\ &= dP dv - As \cos\theta d\theta dv \quad (77) \end{aligned}$$

すなわち幾何学的な変化、ここでは変形にともなう棒の回転 θ のために、仮想仕事は(77)式のような形となり、一般に

$$\int ds d\varepsilon dV \approx dP dv, \quad \int d\sigma d\varepsilon dV \approx dP dv \quad (78)$$

となることに注意を要する。

以上の結果を一般の3次元問題に拡張し、(77)式に相当する仮想仕事の原理を Hill¹⁶⁾に従って以下に記述することにしよう (軸対称問題における同様の原理の表示式は、塑性不安定問題の研究の中で、筆者により記述されている¹⁶⁾¹⁷⁾)。

原理の記述を簡潔にするため、ここでは公称応力 (ラグランジェの応力) s_{ij} を用いる。すると s_{ij} およびその増分 ds_{ij} に対して、次のつり合い方程式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial (ds_{ij})}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

ただし、 x_i は時刻 t における物体要素の座標をあらわし、同じ時刻において

$$s_{ij} = \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} \text{ は真応力} \quad (80)$$

公称応力 s_{ij} を用いるのは、その増分 ds_{ij} に対して、つり合い方程式が(79)式のように簡単な形に表示できるからである。時刻 t における物体要素の密度を ρ とすると、 ds_{ij} と $d\sigma_{ij}$ の間には次の関係が成立する¹⁸⁾。

$$ds_{ij} = d\sigma_{ij} - \frac{d\rho}{\rho} \sigma_{ij} - \sigma_{ij} \frac{\partial (du_i)}{\partial x_i} \quad (81)$$

ただし、 u_i は物体要素の変位をあらわす。また変位増分を du_i とすれば、ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ は

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (du_j) \right\} \quad (82)$$

(79)式と(82)式およびその微小変形理論との類似により、公称応力増分 ds_{ij} とひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ であらわした仮想仕事の原理は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int ds_{ij} d\varepsilon_{ij} dV &= \int ds_{ij} \frac{\partial (du_j)}{\partial x_i} dV \\ &= \int l_i ds_{ij} du_j dS \quad (83) \end{aligned}$$

(83)式は微小変形理論で普通に用いられている表示式と同じであるが、積分は時刻 t すなわち各瞬間における変形前の体積 dV 、表面積 dS について行なう。したがって l_i は、変形前の物体表面にたてた法線の方法線方向余弦をあらわしている。

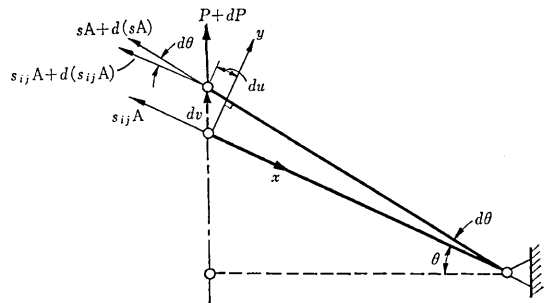


図5 幾何学的非線形問題と仮想仕事の原理

前に図4で考えたのと同じ例題 (図5を参照) に対して、上で得た仮想仕事の原理を適用すると次のようになる。最初に(83)式の左辺は

$$\int ds_{ij} d\varepsilon_{ij} dV = AL ds d\varepsilon \quad (84)$$

ただし、高次の微小項を無視した近以において、 $ds_{ij} = ds$ および $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon$ が成立することに注意する (座標系は時刻 t における棒の方向に x 軸を持ち、したがって $ds_{ij} = ds_x$ および $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_x$ と考えればよい)。一方において(83)式の右辺の積分は、 $l_i = 1, du_j = dv \sin\theta$ および近似的に $ds_{ij} = ds$ の関係から

$$\int l_i ds_{ij} du_j dS = Ad s \sin\theta dv \quad (85)$$

こうして(84)式と(85)式から、(77)式と一致する結果が得られる。荷重 P の棒軸方向への成分は、幾何学的

非線形性, すなわち棒の傾斜角 θ の変化によっても変わり, それによる成分を含んでいるので, $\int ds d\epsilon dV$ と $dPdV$ の間に等号は成立しないのである.

む す び

本稿では, 日米マトリックス構造解析法セミナーにおける発表と討論の中から, 非線形問題に関連した話題をとりあげ, 現段階までの進歩を紹介すると同時に, 将来における発展の方向について展望を試みた. マトリックス法が材料力学の領域に衝撃を与えて以来ここ数年の間に, われわれは非常に急激な変革を経験した. そのあとで, 今後は非線形問題, 板とシェルの問題, および動的問題の三つの分野が焦点となり, 一方ではコンピュータ技術の詳細にわたり, 他方では変分原理などの基礎にさかのぼって, 深さを増した研究が進展するものと考えられる.

本稿が今後の一そうの進歩の手がかりとなり, またこのたびの日米マトリックス構造解析法セミナーが新しい構想の国際協力研究に発展することを念願してむすびの言葉としたい.

(1969年10月28日受理)

文 献

- 1) 山田嘉昭: 生産研究, 19-3 (1967), 75.
- 2) Y. Yamada, N. Yoshimura and T. Sakurai: *Int. J. Mech. Sci.* 10 (1968), 343.
- 3) Y. Yamada, T. Kawai, N. Yoshimura and T. Sakurai: *Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. of Technology, Wright

- Patterson A.F. Base, Ohio (1968), in press.
- 4) Y. Yamada: "Recent Japanese Developments in Matrix Displacement Method for Elastic-plastic Problems", *U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, Tokyo (1969), to appear in the proceedings of the seminar.
- 5) 山田嘉昭・横内康人・笹岡源蔵: マトリックス構造解析講演論文集, 日本鋼構造協会 (1969), 412.
- 6) R. ヒル原著: 塑性学, 邦訳 培風館 (1954).
- 7) 山田嘉昭: 塑性力学, 日刊工業新聞社 (1965).
- 8) P.V. Marcal: *Proc. 1st. Pressure Vessel and Piping Conf.*, ASME Computer Seminar, Dallas, Texas (1968).
- 9) P.V. Marcal: "Finite Element Analysis with Material Nonlinearities-Theory and Practice", *U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, Tokyo (1969), to appear in the proceedings of the seminar.
- 10) D. C. Drucker and W. Prager: *Q. Appl. Math.* 10 (1952), 157.
- 11) O. C. Zienkiewicz, S. Valliappan and I. P. King: *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 1-1 (1969), 75.
- 12) 山田嘉昭: 生産研究, 20-5 (1968), 243.
- 13) 山田嘉昭: 機械学会誌, 72-601 (1969), 214.
- 14) H. C. Martin: "Finite Elements and the Analysis of Geometrically Nonlinear Problems", *U.S.-Japan Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, Tokyo (1969), to appear in the proceedings of the seminar.
- 15) R. Hill: *J. Mech. Phys. Solids* 5 (1957), 153.
- 16) Y. Yamada and I. Aoki: *Int. J. mech. Sci.* 8 (1966), 665.
- 17) 山田嘉昭・青木至: 塑性と加工, 7-67 (1966), 393.
- 18) 山田嘉昭: 塑性学, 機械学会第5回特別講義会テキスト (1964), pp. 145.