UDC 624.041 : 624.046.5

特　集

構造物の最適設計における最近の進歩

Recent Progress of Structural Optimization

田　中　　尚*
Hisashi TANAKA

"構造解析と設計のマトリックス法に関する日米セミナー"において発表された Schmit 教授の survey paper にしたがって，構造物の最適設計の概念について説明し，最近の進歩と将来の展望について述べる．

1. はしがき

昨年の8月下旬に東京で開かれた"構造解析と設計のマトリックス法に関する日米セミナー"のテーマには，アメリカ側の要望で Structural Synthesis が加えられていた．日本側では筆者が"Optimum Design of Structures"と題して，1960 年以降のわが国における研究を紹介したほか，加藤，中村，安楽による"An Approach to Optimum Design of Multi-story Building for Earthquake Motions"と題する研究が発表された．アメリカ側の発表は Case Western Reserve Univ. の Prof. Schmit, Jr. の"Structural Synthesis, 1959–1969, A Decade of Progress"と題する survey paper 1篇であったが，さすがはこの分野における第1人者のものだけあって，100 ページ近い長さで，直接引用の文献 82 のほか，111 篇の文献目録を付した堂々たるもので，わが国のこの分野の研究がアメリカに大きく水をあけられていることを，まざまざと見せつけられた感があった．

以下，Schmit 教授 の survey に従って，構造物の最適設計の概要を説明し，最近の進歩と将来の展望について述べる．

構造物の設計は，それが目的とする機能を十分に発揮できるような構造システムを構成することであり，設計にあたっては，構造システムの各構成要素の性能を解析 (analyze) し，その結果にもとづいて，システムを総合 (synthesize) する．したがって，構造総合 (structural synthesis) とは構造解析をサブルーチンとして含む全設計過程であり，構造解析は構造総合の成分にほかならない．設計（総合）の過程は，従来，経験や直感力創造力などによって行なわれていたが，計算機の発達と共に逐次量的な処理が行なわれるようになって来た．計算機を利用する設計には大きく分けて次の2つがある．まず第1は，計算機に試設計をさせ，それを補正しながら逐次よい結果を求めて行く方法で computer aided design と呼ばれるものであり，第2はあらかじめ最適を決定する量的情報を計算機に内蔵しておき，一挙に結果を得る方法で自働最適設計 (automated optimum design) と呼ばれるものである．

* 東京大学生産技術研究所　第5部

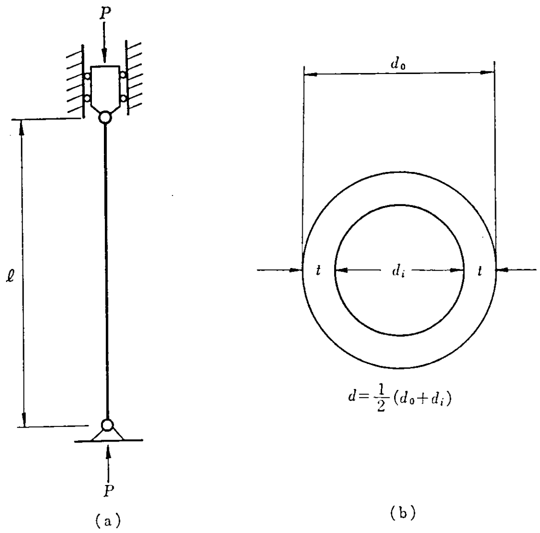

図 1　中空円柱の例

2. 簡単な例題

最適設計の概要を知るためにまず図1に示す中空円柱を安全で，重量が最小になるように設計せよという簡単な例題を説明しよう．

あらかじめ与えられている量は，長さ l，ヤング係数 E，降伏点 σ_y，比重 ρ で

$$l=100\,\text{in},\ E=10\times10^6\,\text{lbs/in}^2,$$
$$\sigma_y=20{,}000\,\text{lbs/in}^2,\ \rho=0.1\,\text{lbs/in}^3 \quad (1)$$

であり，定めるべき量を，厚さ t と平均直径 d であるとする．この柱の受ける荷重 P は

$$P=5{,}000\,\text{lbs} \quad (2)$$

で，設計の条件として，示されている安全とは，降伏，Euler 座屈，局部座屈に対するもので，応力度を σ，降伏応力度を σ_y，Euler 座屈応力度を σ_e，局部座屈応力度を σ_c としたとき

$$\sigma-\sigma_y\leq0,\ \sigma-\sigma_e\leq0,\ \sigma-\sigma_c\leq0 \quad (3)$$

で，もう一つの設計条件は重量 M を最小にすることで

M は

$$M=\rho l\pi dt=10\pi dt \tag{4}$$

であらわされる．

ここで構造システムを記述する量の中で，後で必要になる術語の説明をしておく．式(1)に示されるように構造物の形状や材料についてあらかじめ指定されて，変化しない量を preassigned parameter といい，d, t のように設計過程で変化する量を設計変数(design variable)という．また構造物がさらされる環境の効果をあらわす量（ここでは単純に荷重 P である）を荷重条件 (load condition) といい，荷重条件によって起こる構造物の挙動のうち，設計者が制限しようとする対象を破損形式 (failure mode) といい，ここでは降伏，Euler 座屈，局部座屈が破損形式としてとりあげられている．荷重条件に対して安全な設計の中から，最適なものとしてこの例では重量 M の最小なものを選ぼうとしているわけであるが，このような選択の基準となる関数（式(4)）を目的関数 (objective function) という．

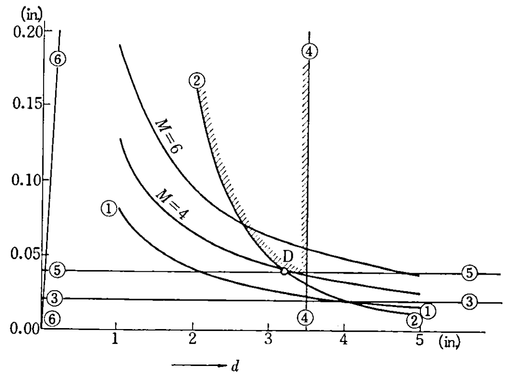

図 2　円柱の設計空間

次に図2に示すような d, t を座標軸とする設計空間を考え，設計空間の点を $\overrightarrow{D}(d, t)$ であらわすことにすると式(4)は

$$M(\overrightarrow{D})=10\pi dt \tag{5}$$

となり，また $t \lll d$ として式(3)を書きなおすと

$$h_1(\overrightarrow{D})=(5000/\pi dt)-20,000\leq 0 \tag{6}$$

$$h_2(\overrightarrow{D})=(5000/\pi dt)-125\pi^2 d^2\leq 0 \tag{7}$$

$$h_3(\overrightarrow{D})=(5000/\pi dt)-4\times 10^6 t/d\leq 0 \tag{8}$$

となる．ここで与えられた問題を書きなおすと

「$h_j(\overrightarrow{D})\leq 0 \quad (j=1, 2, 3, \cdots\cdots, J)$　(9)

$M(\overrightarrow{D})\to\min$　(10)

を満足する $\overrightarrow{D}$ を求めよ」

となり，最適設計の問題は数理計画 (mathematical programming) の問題に帰着することがわかる．

式(9)の形式の制限は，設計においては他にも考えられる．たとえば，機能上の要求からあまり太い柱は困るなら

$$h_4(\overrightarrow{D})=d-3.5\leq 0 \tag{11}$$

また，工作上の要求から，あまり薄い管はできないなら

$$h_5(\overrightarrow{D})=0.04-t\leq 0 \tag{12}$$

の制限が必要であり，幾何学的な制限として，厚さが直径より大きいことはないから

$$h_6(\overrightarrow{D})=t-d\leq 0 \tag{13}$$

も必要である．このような制限を補助制限 (side constraints) という．

以上の制限の限界は図2に記入してある（h の添字番号 n と図の ⓝ とが対応している）が，これらすべての制限を満足する設計は，図のハッチの領域内にあればよい．

このような制限を満す設計を，許容設計 (acceptable design) といい，許容設計の中から式(10)の条件を満すものを選ぶと，図に示す点 D が得られる．なぜなら，図に記入してあるように M が増加するにつれて，$M=$ const. の線は右上の方向に移動するから，$M=4.0$lbs の場合が M 最小の設計である ($d=3.2$in, $t=0.04$in)．

3. 最適設計法の分類

構造物は，時間と共に複雑に変動する環境にさらされる．したがって荷重条件を表現する変数は本来確率変数であるべきであり，また構造物を構成する材料の性質や寸法などもバラツキをもっているため，設計変数もまた確率変数である．しかしながら，現在実際設計では荷重条件も設計変数も確定論的に取扱われているのが実状である．したがって，最適設計においても，変数の取扱いにおいて確定論的立場と確率論的立場に分類される．

次に構造システムはある機能の遂行を目的としているが，目的遂行のためには，通常種々の破損形式の発生を避けることを条件として用いている．そして破損を起こす原因である荷重条件としては，正常に使用されている状態において起こる荷重すなわち使用荷重 (service load) と，予想される異常状態において起こる荷重すなわち超過荷重 (over load) の2種が考えられる．たとえば作用荷重条件に対しては破損形式として，降伏開始，撓みの増大，局部座屈などを採り，超過荷重条件に対しては破損形式として，亀裂，崩壊，不安定状態などを採るのが普通である．

設計変数は数学的立場からは，連続変数と離散変数に分類される．たとえば，規格材の断面寸法などは厳密には離散形であるのを簡単のために擬似連続として取扱うことが多いが，杭の本数や補強材の数などは整数形である．

また設計変数は物理的には次のような種類がある．まず断面の性質（たとえば断面2次モーメント I や断面積 A）を定める寸法変数 (sizing)，節点の位置などの幾何学的配置を定める形状変数 (configuration)，合成材の弾性係数や，比重などを定める物質設計変数 (material design variable)，また節点間の部材の有無を定める位

相変数 (topological variable) などがある.

許容設計の中から，最適設計を選び出すとき，選択の基準となる目的関数は，設計の最も重要な性質を示すものでなければならず，また慎重に数量化されるものでなければならない．目的関数として考えられるのはまず費用である．費用には材料費，製作費，維持費，保険などを含めて考えなければならないが，数量化に難しさがあり，通常材料費が重量に比例するところから，目的関数として重量が採られることが多く，最適設計は最小重量設計を意味すると誤解される程である．このことは最適設計が宇宙工学に支えられて発達し，宇宙船においては重量軽減が重要であることとも関係があるが，目的関数が決して重量独占でないことは銘記すべきである．

4. 定式化と計算法

最適設計の問題はすでに式(9)，(10)のように定式化されることを示した．もし両式共に線形であれば，線形計画法 (linear programming, 以下 L.P. と書く) と呼ばれ，また，非線形であれば，非線形計画法 (non-linear programming, 以下 N.L.P. と書く) と呼ばれることは既によく知られている．N.L.P の場合には，計算を容易にするためにこれを他の形に定式化することが行なわれる．その第1は反復線形計画法 (sequence of linear programming method, 以下 S.L.P と書く) で，式(9) 式(10)の $h_j(\vec{D})$，$M(\vec{D})$ を点 $\vec{D}_p$ について Taylor 展開し，最初の試設計を $\vec{D}_0$ とし，$\vec{D}_p(p=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を次に示す L.P. の解として逐次近似して行く．

すなわち

$$「\tilde{h}_j^{(p)}(\vec{D})\leq 0 \tag{14}$$

$$M^{(p)}(\vec{D})\to\min. \tag{15}$$

を満足する $\vec{D}$ を求めよ．ただし

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{h}_j^{(p)}(\vec{D})=h_j(\vec{D}_p)+\nabla h_j(\vec{D}_p)\cdot[\vec{D}-\vec{D}_p]\\ \tilde{M}^{(p)}(\vec{D})=M(\vec{D}_p)+\nabla M(\vec{D}_p)\cdot[\vec{D}-\vec{D}_p]\\ p=0, 1, 2, \cdots\cdots\end{array}\right\}」 \tag{16}$$

の形に定式化する．

第2には罰金関数 (penalty function) を用いて，制限式をもたない最小問題に定式化し，反復計算を行なうもので，無制限最小化反復法 (sequnce of unconstrained minimization technique, 以下 SUMT と書く) である．その中の代表的な一つFiacco-McCormick 法を示すと次のようになる．

「スカラー r_p の初期値 $r_p=r_1$ と設計変数ベクトル $\vec{D}$ の初期値 $\vec{D}=\vec{D}_0$ を $h_j(\vec{D}_0)<0$ なるように与えて，設計変数 $\vec{D}_p(p=1,2,\cdots\cdots)$ を次式を満足するように求めよ．

$$\left.\begin{array}{l}\phi(\vec{D},\ r_p)\to\min.\\ h_j(\vec{D})\leq 0\end{array}\right\} \tag{17}$$

ただし

$$\left.\begin{array}{l}\phi(\vec{D},\ r_p)=M(\vec{D})-r_p\sum_{j=1}^{J}\dfrac{1}{h_j(\vec{D})}\\ r_{p+1}<r_p\end{array}\right\}」 \tag{18}$$

第3は古典的定式化 (classical formulation) で，スラック変数 (slack variable) β_j と Lagrange 乗数 μ_j を用いて，もとの問題を次のように定式化する．

「$\Omega(\vec{D},\ \vec{\beta},\ \vec{\mu})$ が停留値をとる $(\vec{D},\ \vec{\beta},\ \vec{\mu})$ を求めよ．ただし

$$\Omega(\vec{D},\ \vec{\beta},\ \vec{\mu})=M(\vec{D})+\sum_{j=1}^{J}\mu_j[\beta_j^2+h_j(\vec{D})]」 \tag{19}$$

上の問題は次の連立非線形方程式と同じである．

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\Omega}{\partial D_i}=\dfrac{\partial M}{\partial D_i}+\sum_{j=1}^{J}\mu_j\dfrac{\partial h_j}{\partial D_i}=0\\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial\mu_i}=\beta_j^2+h_j(\vec{D})=0\\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial\beta_j}=2\mu_j\beta_j=0\end{array}\right\} \tag{20}$$

上式は一般に多くの解を有し，その中から最適解を探すことは容易でないが，どの制限式が critical であるか判別する知識をあらかじめ持っている時には利用し易い．

さて，以上で問題は LP, NLP, SLP, SUMT, Classical に定式化されたわけであるので，次に数値解を得る方法が問題になる．すでによく知られているように，LP には simplex 法や dual simplex 法があり，したがって SLP にもこれらの方法を用いることができる．ただ SLP の場合には収束をよくするための工夫 (たとえば move limit, selective constraint accumulation, adoptive move limit など) をする必要がある．

NLP と SUMT は許容設計を遂次改良してゆくが，q 番目の試設計を $\vec{D}^q$ であらわすと，$(q+1)$ 番目の設計は

$$\vec{D}^{q+1}=\vec{D}^q+\alpha_q\vec{S}^q \tag{21}$$

となり，設計の修正が $\alpha_q\vec{S}^q$ であらわされる．NLP では $\vec{S}^q$ を選ぶ方法として，最大傾斜法 (steepest descent method) や投影傾斜法 (gradient projection method) があるが，Schmit 教授は，Zoutendijk による "good" feasible direction method が優れているとしている ("Methods of Feasible Directions" Elsevier Press, Amsterdam, 1960).

また SUMT でも $\vec{S}^q$ の選び方に conjugate gradient algorithm など広範な方法が研究されているが，最も有力な方法として，Dadison による variable metric method をあげている (Box, M. J., "A Comparison of Several Current Optimization Method and the Use of Transformations in Constrained Problems" Computer J., Vol. 9, 1966).

表1 文 献 内 容 一 覧

	著 者 発表年	確定的 確率的	破損形式	荷重条件	設計変数	目的関数	定 式 化	計 算 法	構造形式
(1)	Klein 1955	確 定	応 力 変 位	使用荷重 一種類	連 続 寸 法	重 量 非線形	Classical	…………	は り
(2)	Pearson 1958	確 定	塑性崩壊	過荷重 多種類	連 続 寸 法	重 量 線 形	Extended space	Random Step	平面トラス 平面ラーメン
(3)	Schmit 1960	確 定	応 力 変 位	使用荷重 多種類	連 続 寸 法	重 量 非線形	N.L.P.	Alternate Steps	簡単なトラス
(4)	Hilton, Feigen 1960	確 率	応 力	使用荷重 一種類	連 続 寸法(A)	重 量 線 形	Classical	…………	2部材の構造
(5)	田 中 1962	確 定	塑性崩壊	過荷重 多種類	連 続 寸 法	重 量 線 形	L.P.	Simplex Dual Simplex	平面ラーメン
(6)	Schmit, Kicher, Morrow 1963	確 定	座 屈 応 力	使用荷重 多種類	連 続 寸法, 形状	重 量 非線形	N.L.P.	Alternate Steps	ワッフル板
(7)	Dorn, Gomory, Greenberg 1964	確 定	塑性崩壊	過荷重 一種類	連 続 寸法, 位置	重 量 線 形	L.P.	Simplex	平面トラス
(8)	Moses 1964	確 定	応 力 変 位	使用荷重 多種類	連 続 寸 法	重 量 線 形	S.L.P.	Simplex	平面トラス 平面ラーメン
(9)	棚 橋 中村(恒) 1965	確 定	塑性崩壊	過荷重 一種類	連 続 寸 法	重 量 線 形	L.P.	Simplex	多層ラーメン
(10)	Cornell, Reinschmidt, Brochie 1965	確 定	応 力	使用荷重 多種類	連 続 寸法 (A, I)	重 量 線 形	S.L.P.	Simplex	平面トラス 平面ラーメン
(11)	Brown, Ang 1965	確 定	応力, 変位 (AISC Code)	使用荷重 多種類	疑連続 寸法 (A, I)	重 量 非線形	N.L.P.	Gradient Projection	平面トラス 平面ラーメン
(12)	川 井 1966	確 定	塑性崩壊	過荷重 一種類	連 続 寸 法	重 量 線 形	L.P.	Simplex Iteration	多層ラーメン
(13)	Goble DeSantis 1966	確 定	AASHO Code	移動荷重	離 散 寸法, 形状 物 質	費 用 非線形	Heuristic Decompos.	Dynam. Prog.	連続溶接桁
(14)	Melosh, Luik 1967	確 定	応 力	使用荷重 多種類	離 散 寸法(A)	重 量 線 形	N.L.P.	Unvariate Search	平面トラス 立体トラス
(15)	Moses, Kinser 1967	確 率	応 力	使用荷重 多種類	連 続 寸法(A)	重 量 線 形	N.L.P.	Alternate Steps	静定トラス
(16)	Moses Stevenson 1968	確 率	塑性崩壊	使用荷重 多種類	連 続 寸法(I)	重 量 非線形	N.L.P.	"Good" Feasible Direction	平面ラーメン
(17)	中村(雄) 1968	確 定	塑性崩壊 変 位	過荷重 使用荷重 多種類	連 続 寸法(I)	重 量 非線形	S.L.P.	Simplex	多層ラーメン
(18)	Karnes Tocher 1968	確 定	応 力 変 位	使用荷重 多種類	連 続 寸法(A, t)	重 量 線 形	N.L.P.	"Good" Feasible Direction	棒 三角膜
(19)	Morrow Schmit 1968	確 定	座 屈 組合せ応力	使用荷重 多種類	連 続 寸法, 形状	重 量 非線形	SUMT	Variable Metric	整数補強材をもつ円筒殻
(20)	Fox, Kapoor 1969	確 定	動的応力 動的変位	使用荷重 一種類	連 続 寸法(D)	重 量 線 形	N.L.P.	"Good" Feasible Direction	管状平面トラス ラーメン
(21)	Shinozuka Yang 1969	確 率	応 力	使用荷重 Proof Loading 多種類	連 続 寸法(A)	費 用 非線形	N.L.P.	"Good" Feasible Direction	静定トラス
(22)	加藤, 中村(雄) 安 楽 1969	確 定	動的応力	使用荷重 一種類	連 続 寸法(I)	重 量 非線形	S.L.P.	Simplex	多層ラーメン

発表誌

(1) Operations Research, Vol. 3　(2) Proc. of Ist Confer. on Electronic Computation, ASCE (3) Proc, of 2nd National Confer. on Electronic Computation, ASCE　(4) J. of the Aerospace Sciences, Vol. 27, No. 9　(5) 生研報告 12, 3　(6) AIAA Jour., Vol. 1, No. 12　(7) Journal de Mechanique, Vol. 3, No. 1　(8) J. of the Structural Div., ASCE Vol. 90, No. St 6　(9) Proc. 15th National Congress for Appl. Mech.　(10) Research Report R 65-26, Part 2, Dept. of Civil Engr. M. I. T. (11) Structural Research Series No. 298, Univ. of Ill., Civil Engr. Studies　(12) 1965 Summer Conference on Plastic Design of Multi-story Frames, Lehigh Univ.　(13) J. of Structural Div., ASCE, Vol. 92, No. St 6　(14) AFFDL TR-67-59　(15) AIAA Journal Vol. 6, No. 6　(16) Case Western Reserve Univ. DSMSMD Report No. 16　(17) Tech. Rept. R-68-12, Dept. of Civil Engr. M. I. T.　(18) ASCE Joint Speciality Conference on Optimization and Nonlinear Problems, Chicago　(19) NASA CR-1217 (20) AIAA Structural Dynamics and Aeroelasticity Conference, New Orleans　(21) JPL Report, Pasadena Calif.,　(22) Japan-U. S. Seminar on Matrix Method of Structural Analysis and Design, Tokyo

5. 最近の進歩

表1は，Schmit 教授が選んで作った文献の内容の一覧に，2，3のわが国の研究を筆者が書き入れたもので，この表によって，構造物の最適設計の最近の進歩が概観され，この 10 年の進歩の特徴はおおよそ次のように総括される．

(1) 採りあげる荷重条件や破損形式が複雑多岐になり，設計思想の拡張が行なわれている．

(2) 目的関数の表現が，複雑で精密になって来ている．

(3) 設計変数の拡張が，数学的見地（連続，擬連続，離散，整数）物理的見地（寸法，形状，物質，位相）の双方から行なわれている．

(4) 複雑な数理計画法の応用が行なわれ，新しい定式化や，計算法の導入がなされている．

(5) 複雑で大きな構造システムに適用され始めた．

6. 将来の展望

最適設計法は，次第に適用範囲を拡げつつあるが，まだまだこれから克服されなければならない幾多の難題を抱えていることもまた事実である．

その第1は局所最小（relative minima）の問題である．図2にハッチを施して示してある許容設計空間は凸形をしているが，この許容空間が凹な部分を持つと，得られた解が，全体的な最適値にならないことがある．この難点は最初の試設計の選定や補助制限式の採用などである程度克服できる筈であるが，依然として難問題で，計算機の scope display と light-pen input などの利用による man-machine interface をとり入れた computer aided design との協力が期待されている．

第2は設計変数の整数形，離散形または連続変数と整数変数の混在する場合の問題の重要性と困難さの問題である．この問題は，表1に見るようにすでに研究され始めているが，まだこれから研究すべき問題である．

第3には，制限式がパラメーターを含む問題である．たとえば，移動荷重がある場合には，制限式が荷重の作用位置 Z をパラメーターとして含み，式(17) の下式が

$$h_j(Z,\ \vec{D}) \leq 0,\quad Z_1 \leq Z \leq Z_2 \tag{22}$$

の形をしている．このような場合には，式(18)の上式の代りに

$$\phi(\vec{D},\ r_p) = M(\vec{D}) - r_p \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{1}{(Z_2 - Z_1)} \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{dZ}{h_j(Z,\ \vec{D})} \right] \tag{23}$$

とすることも一つの方法であるが，まだこれからの研究課題の一つである．

第4は大きな構造システムの設計解析を取扱いやすいサブシステムに分解する問題（decomposition）である．従来は構造解析と構造設計に分解したり，また航空機では，重量とバランス，空気力学，動力などに分け，これらの相互の関連の調整を繰り返しながら設計に総合していたが，この分解の体系を考え直す必要がある．

第5には信頼度（reliability）の問題がある．破壊の確率の解析や破壊の確率に基づく設計の研究は，この十年にすでに始ってはいるが(表1)，まだ多くの問題を残している．特にこの方面の研究は，従来の安全率に基づく設計思想に大きな影響を与えることになるだろう．また従来の設計規準にしたがって最適設計を行なうことは，普通の設計に比べて，安全の確率の低いものを得ることにもなり，現行の設計規準の再検討を迫ることにもなろう．

第6には，動的応答に対する最適設計の問題が注目され始めたことである．たとえばフラターを避ける制限式を導入した研究などが行われ始め，今後の発展が予想される．

第7に，まだこれから研究する必要のある問題として反復近似解の方法がある．大きなシステムを取扱うにはどうしても反復近似法（iterative solution method）を用いる必要があり，いくつかの方法が開発されているが，今後の研究の発展に待つところも大きい．

む す び

数理計画法を応用した構造総合の方法は急速に発展しつつあるが，それはあくまで，創造的設計活動に対する科学的な助けとして認識しなければならない．なぜならたとえいかに巧妙な手法に頼ろうとも設計変数の選定，荷重条件と破損形式の選定，目的関数の設定などは，すべて技術者の責任において定めなければならず，これらを選定する設計者の創造的力量が，最後に得られる設計の良否を支配することになるからである．

(1969 年 10 月 29 日受理)