特　集　UDC 624.041 : 512.83
624.042.7

最近の振動解析について

Recent Topics on Matrix Methods for Vibration Analyses

柴　田　碧*
Heki SHIBATA

マトリックス法を使用しての構造物の振動解析について，最近の問題点について述べる．8月下旬に行なわれた日米合同のマトリックス法による構造解析セミナで発表された論文を中心にした資料によっている．とくに遷移行列法，有限要素法と有限差分法との関係にも触れている．

1. まえがき

1969年8月末東京で行なわれた“マトリックス法の構造計算・設計への応用”についての日米合同セミナの第3日めは振動解析に関する論文の発表にあてられた．日本・アメリカから3編の展望的な論文を含めて8編が発表され討論された(表1)．以下，その概略を中心に，最近のこの方面の研究で気付いたことについて述べる．

2. 有限要素法の地位

振動解析に際し，有限要素法(finite element method)といった場合，2通りの意味がある．広い意味では，対象とする系を有限に分割し，その振動特性を行列のかたちで表示して，それを集めて系全体の特性とし解を求める方法の全体をいう．このなかには遷移行列法(transfer matrix method)も含まれる．狭い意味では，上述の系全体の特性の表示を，いわゆる“大きな行列”で行ない系の自由度に相当する寸法を有する行列の固有値問題などのかたちで解こうとするものである．現在のところ，アメリカでは狭い意味の有限要素法が広く使われ，日本では遷移行列法とも両者が使われているといった感じである．

表1　マトリックス法による構造解析日米セミナ第3日（8月27日）Dynamics セション発表論文題目

US 3-1	SP	R. W. Clough	Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response.
US 3-2	TP	S. Klein	A Static and Dynamic Finite Element Shell Analysis with Experimental Verification.
US 3-3	TP	J. S. Archer	A Two-Dimensional Axisymmetric Shell Fluid Model for Lunched Vehicle Longitudinal Dynamic Analysis.
J 3-1	SP	Y. Yamada	Dynamic Analysis on Civil Engineering Structures.
J 3-2	SP	H. Shibata	Dynamic Analysis on Mechanical Structures.
J 3-3	TP	K. Muto	Seimic Response Analysis of Buildings by the Matrix Method.
J 3-4	TP	T. Ichikawa	Some Considerations on Methods for Flutter Analysis.
J 3-5	TP	M. Hamada	A Numerical Calculation by Finite Difference Method for Free Vibration Problem of Axisymmetric Shells.

司会　山本　善之，M. J. Turner

振動解析は，固有値解析と応答解析とに分けられる．後者の応答解析は，実用面からみると未だ完全に定着しているとはいい難い．いちおうの解析手法は示されているものの，衝撃的な波の伝播など有限差分法ほど明確に検討され尽くしてはいない．実用とするにはその解の正当性について，確信が得られない場合もあるように思える．それゆえ今後，有限要素法を有限差分法に対応させて，計算精度，解の安定性その他後者についての知識を前者に取り入れて行くことが重要と思われる．

3. 遷移行列法

Pestel らの著書[1]にも詳しく述べられているこの方法は，わが国でもそれより以前1955年ころから早稲田大学，奥村によって理論的に解析整理されていた[2]．ただ当時は電子計算機の能力からも限られた条件でしか実用の段階へ持ち込むことはできなかった．1962年以降，IBM7090級の計算機の普及とともに，わが国ではいくつかの実用プログラムが開発され使用されるようになった．アメリカでは後で述べるような理由もあってか，それ程は使われていないようであって，まとまったプログラムとしては知られていない．

奥村の手法は振動関数を使うものであって，この関数の設定が可能な系の場合には高い精度の解が得られる．振動関数とは，厳密にいえば，系の一部についてそれを支配する微分方程式系の解析解が得られるときの，解関数のことである．遷移行列をこの解関数により記述することによって，連続体のある区間については厳密解を満たすように結果を与えることが可能となる．ただ梁の固有値解析のプログラムのように解析解が得られることはむしろすくないといえる．振動関数として採ることのできるのは，変形などの一般座標や一般力で表わされるものには限らない．防撓板の振動を扱った清水らの論文[3]に見られるように板の振動で，曲げに面内が加わった場

* 東京大学生産技術研究所　第2部

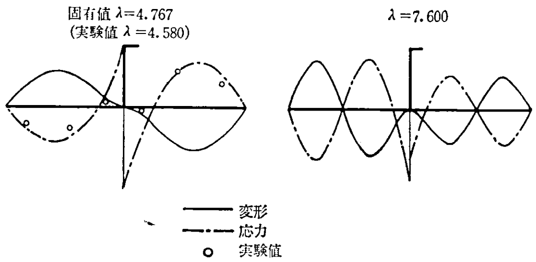

図 1　防撓材つき平板の振動〔文献(3)清水茂俊より引用〕

合，応力関数 F を導入している．

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0 \qquad (1)$$

を，撓み w の

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{\rho h}{D}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \qquad (2)$$

とともに系を支配する微分方程式として，防撓材と板との接合点間の関係を，梁の場合に似た双曲線関数などを含む解関数で記述している．図1に示すように応力解析と実験結果はかなりよく合っている．

しかしながら．この振動関数は場合によっては，厳密な解でなくともよく，またその置き方によっても種々の計算法をあみ出すことができる．その一例として三菱造船（発表当時）藤野らが用いた方法[4]がある．この論文の発表された 1957 年には使用可能な電子計算機は非常にわずかであった．シュラウド・リングで連結されたタービン翼の振動解析を各翼の変形を

$$u(x)=v_l\varphi(x)+v_l'\psi(x)+v_l''v(x) \qquad (3)$$

のかたちで記し，翼端でのシュラウドによる接続をただ一つの座標，傾斜角 θ_i で行なうことに成功している．ここに v_l, v_l', v_l'' はシュラウド側翼端：$x=l$ での変形とその1次，2次導関数であり，$\varphi(x)$ などは $\varphi(l)=1$ などの値を有するよう，規準化された片持梁の固有(変形)関数である．i 番めの翼の v_l などはシュラウドの変形を仮定することにより，θ_i とその前後の傾斜角で書くことができる．この論文ではシュラウドの変形として静的にその曲げに関する微分方程式を満たす関数を使っている．

上述の手法は，境界条件の接続については満足しているが，一部の微分方程式については，それを満たすということを放棄しているわけである．これを極端にすすめた例は，前述の梁のように遷移行列の要素が，

$$\frac{1}{2}\{\cos\lambda\xi+\cosh\lambda\xi\},\quad \frac{1}{2}\{\sin\lambda\xi+\sinh\lambda\xi\} \qquad (4)$$

といった形をしている系の数値計算である．これを展開して $\lambda\xi$ が小さいとして，第2項程度までとって計算を進めることも形式の上からは可能である．しかしながら一般の梁の例などでは，いろいろやっかいでおかしい問題が生ずる[5][6]〔文献6) にある例はおもしろい〕．ここで重要なことは，数値計算の面で行なわれたこのような近似操作について，計算過程で力学的な面から再検討されないことを意味する．エネルギ法的な考え方が遷移行列をつくる過程に入っていない一般の遷移行列法の欠陥である．近似操作の誤差がそのまま結果の誤差へ連なり，それが力学的に意味を有さないので，Rayleigh 法などのように誤差について一般的傾向をいうことはできないという結果になる．

軸対称殻体の固有値解析プログラム SHELVIA[7]は殻体の変形を

$$\left.\begin{aligned} u&=(\alpha_1+\alpha_2 s)\cos n\theta\\ v&=(\alpha_3+\alpha_4 s)\sin n\theta\\ w&=(\alpha_5+\alpha_6 s+\alpha_7 s^2+\alpha_8 s^3)\cos n\theta \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

と母線上の座標 s の関数で置き，円錐台形に分割して，各区間ごとの剛わさ行列〔K〕，質量行列〔M〕をエネルギ積分で求めている．

$$[K]=[B^{-1}]^T\left\{\int_v [CA]^T[E][CA]dv\right\}[B^{-1}] \qquad (6)$$

$$[M]=[B^{-1}]^T\left\{\int_v [A]^T(-\rho\omega^2)[A]dv\right\}[B^{-1}] \qquad (7)$$

ここに

$$\{\varepsilon\}=[C]\{u\} \quad (\text{ひずみ}) \qquad (8)$$

$$\{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\} \quad (\text{応力}) \qquad (9)$$

$$\{u\}=[A]\{\alpha\} \quad (\text{変形}) \qquad (10)$$

$$\{q\}=[B]\{\alpha\} \quad ((10)\text{の境界での値}) \qquad (11)$$

によって〔A〕〔B〕〔C〕〔E〕などは定義されている．このようにして求めた円錐台形の剛わさ行列などを，そのまま全体の系へ組み立てて行けば“大きな行列”が得られ，有限要素法になるが，これから遷移行列を得ることもできる．

三次元的な形状を有する梁の固有振動数振動形を求めるプログラムとして開発された DYNAPS[8] は振動関数-遷移行列法の典型的な例である．前述した SHELVIA とともに原子力発電所の耐震設計のため開発されたのである[9]．この二つのプログラムには似かよったいくつかの問題があった．これを考えてみると，遷移行列法が有限要素法ほど一般に使われていない理由がわかる．それは桁落ちに関するもので，前にもちょっと触れたように表面は数値計算技術で解決できるようにみえる．しかしながら，実際は力学的な現象と結び付いており，それを徹底的に解明することはなかなか困難な仕事である．もうすこし詳しくいうなら，たとえば梁の曲げ振動の解に含まれる $e^{a\xi}$, $e^{-a\xi}$(ただし $a>0$) の二項の関係である．前の項は ξ が大きくなるに従い発散する．一端で境界条件に入るわずかな誤差を拡大する役割を果たす．遷移行列法が対象とする系の大きさに無関係に，伝達される座標・力の自由度のみによって定まる寸法の行列を扱えばよいという利点を持つのに対する他の一面である．したがって2階の微分方程式で表わされる曲げを含まない

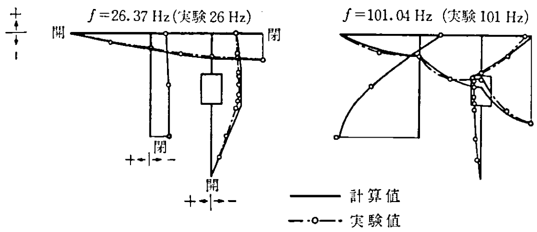

図 2　流体柱の振動解析例〔文献(10)酒井敬之より〕

ばね・質量系などの方が扱いやすくよく使われている．それに反し殻体のような問題は扱い難いのである．高圧ガス管系の流体柱の振動問題なども比較的扱いやすい問題であろうか，計算と実測がよく合うと三井造船，酒井らによって報告されている[10](図2)．

表 2　直円柱 (径 44in) の固有振動数計算例
〔文献 (11) R. W. Clough より〕

振動形	円振動数 (rad/s)				
	理　論	集中質量行列〔LM〕		厳密な質量行列〔CM〕	
		計算値	誤　差	計算値	誤　差
No. 1	83.03	83.00	−0.04%	83.01	−0.02%
2	249.1	248.2	−0.36	249.9	0.32
3	415.2	411.1	−0.97	419.6	1.06
4	581.2	570.0	−1.93	593.4	2.10
5	747.3	723.0	−3.25	764.7	2.34
6	914.0	867.6	−5.07	961.4	5.19

4.　有限要素法

California 大学 R. W. Clough により “Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response”[11] という論文が出された．この内容は有限要素法による振動解析法の概略と，その問題点を要領よく述べている．問題点について手短に紹介しつつ筆者の意見を述べる．その一つは質量行列〔M〕についてである．遷移行列のところで述べた方法で導かれる質量行列は対角行列となっていない．このようなものを “consistent mass matrix” とよんでいる．これは対角行列のもの，いわゆる lumped mass matrix といわれる，分布質量を計算上の節点に分割集中した質量行列による計算法に比し，精度が高いと思われる．しかしながら，Clough は表2のように精度は両者ほぼ同様であるといっている．演算時間からいえば対角行列による方が有利である．また許された記憶容量を有利に使うことからも対角行列がよいことは当然である．Clough が述べているような精度の関係が他の問題についていえるのなら，集中質量化を行なうのがよいと思われる．しかし，このことについてさらに考えるなら，十分細かく分割した場合に，より利点があるといえよう．もし，分割が非常にあらければ分布質量の集中化が直観にたよって行なわれるようになり，それだけ精度を失う機会が多くなる．このような場合は “consistent mass matrix” によれば，そのようなことが防止できるのであろう．非対称行列の場合についての計算の高速化についても述べているが，これは別の機会にゆずり，次に減衰行列〔C〕について触れよう．

〔C〕は質量行列〔M〕に比例するもの，剛わさ行列〔K〕に比例するもの，それに臨界減衰にもとずくものとあるが，時間軸での応答を求める場合には前の二つが主として使われてきた．しかし，最後の臨界減衰にもとずくものは，振動形解析に際しては一般的でよく使われている．実際の系について振動計測を行なって得られる減衰値の分布も振動数の関数として与えられるので，これと同種の表現であるといえる．Clough は振動形ごとに与えられている減衰係数〔C^*〕から〔C〕を得る式を定めた．

$$〔C^*〕=\begin{bmatrix} C_1^* & & \\ & C_2^* & 0 \\ 0 & & C_n^* \end{bmatrix} \tag{12}$$

$C_i^*=2\zeta_i\omega_i M_i^*$: i 次の減衰係数

$$〔C〕=〔M〕\left[\sum_{i=1}^{n}\zeta_i〔X_i〕〔X_i〕^T\right]〔M〕 \tag{13}$$

と，固有振動形行列〔X_i〕から求めることができる 減衰の置き方については討論も行なわれたが遷移行列－振動形解析の手法を使ってきた筆者には，時間関数としての応答解析を行なうことを考えた場合，この Clough の方法がいちばん取り入れやすく思われる．

減衰行列については，もう一つの問題がある．通常の有限要素法で応力の変動まで求めると，高い振動数領域の波が含まれてくる．これは分割の方法などによって変る有限要素化したことによって生ずる無縁な解である．これを除去するには，減衰の配置を高い振動数域で実際の系のそれとは別に数値計算上の技巧として，大きな値となるようにしてやらねばならぬ．有限差分法で波動の数値解析を行なう際に “artifical viscosity” と称する項を付加するのと類似の手法である．波動伝播の問題は有限要素法自体にとってこれからの問題で，一部の文献[12]でも論じられている Clough が応力波について試算した例などでも，実験値との間に意味のありそうなずれが認められる(図3)．

有限要素法で，地盤上にある剛わい構造物の計算をする際の逸散減衰の設定の仕方も今後のことであろう (図4)．セミナでも京都大学の山田はその報告[13]の中で計算例を示し，この点についてかなりの討議が行なわれた．減衰の問題は計算の容易さ，数値計算上の安定性などと力学的な系の構成がからみあって，おもしろい問題を含んでいる．とくに構造物から離れた側での境界条件は自由としても固定としてもそこで波の反射が生じ，その波が戻ってきた時刻以後の解は，求めるものとは異なったものとなる．そこで境界で無反射となるよう処理することが必要となろう．

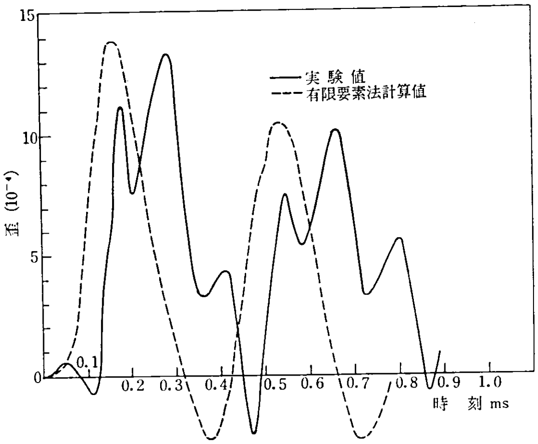

図 3　鋼製円筒殻内の歪波の時間的変化の例
〔文献 (11) R.W Clough より引用〕

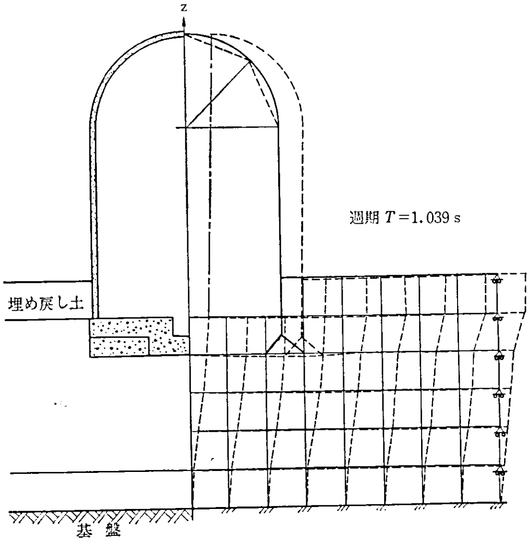

図 4　原子力発電所の地盤との連成振動(軸対称モデル)
〔文献 (11) R.W. Clough より引用〕

5.　有限差分法

大阪大学，浜田の論文[14]は有限差分法による軸対称殻体の固有値の解き方を示している．手法としては，計算点をはさんで分割した区間両端の状態量 Z_i を行列表示の平衡方程式で表わしている．この方程式は連立の2階微分方程式より誘導されたものである．

$$[A_j]\{Z_{j-1}\}+[B_j]\{Z_j\}+[C_j]\{Z_{j+1}\}\equiv 0 \quad (14)$$

これから“大きな行列”を構成させて解く方法もあるが，ここでは遷移行列の方式をとり終端 N では

$$\{Z_{N-2}\}=[Y_{N-2}]\{Z_{N-1}\} \quad (15)$$

と $[Y_{N-2}]$ に集約して

$$\begin{vmatrix} I & -Y_{N-2} & 0 \\ A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ A_N & B_N & C_N \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

の形で固有値根を求めている．ここで $[I]$ は単位行列，$[A_N]$ などは境界における差分の関係式である．

この方法は固有値方程式に相当する行列式の数値の挙動に特徴があり，根の場合により初期値が発見仕難いことがある．しかしながら，これは有限差分法の欠陥ではなく，むしろ固有値方程式のたて方によるものであろう．有限要素法と有限差分法のどちらが優れているかの議論がセミナであったが，当面絶対的な優劣はいえず各自が持っている経験やプログラム・ライブラリの厚みによるのではないかと考えられる．誤差論などについての研究は有限差分法の方が古いだけあって蓄積も多いようである．NASA の R.E. Fulton[15] (8月のセミナ・メンバ) の論文に両者についてそのような立場から比較しているものがある．これらの内容については未検討なのでここでは紹介できない．

6.　あ と が き

本稿を執筆するのに十分な時間がないため，トピックスとそれに対する筆者の意見を散発的に記すこととなってしまった．これらの方面のことについて，補足的説明がないと判り難い内容となってしまったかと思われるがニュース性も考えて，いちおうまとめることとした．

Clough の論文の紹介，わが国における遷移行列法の進展[16]，DYNAPS, SHELVIA など詳細については別の機会に個別に行ないたい．

最後につねづねこの問題でご指導いただいている東大工学部山本教授，本所川井助教授，それに日米セミナに出席する機会を与えてくださった吉識名誉教授ほか諸先生に厚くお礼申し上げる．　(1969年11月7日受理)

参 考 文 献

1) E. C. Pestel and other: *Matrix Method in Elastomechanics*, McGraw-Hill (1963) 435 pp.
2) A. Oknmura: *Memories of the school of Science and Eng'g.*, Waseda Univ., No 21 (1957) 59 pp.
3) 清水茂俊ほか：日本造船学会論文集．No. 123, 3-16 (1968.6) 347.
4) 藤野勉ほか：三菱造船技報，Vol. 5, No. 24 (1957) 21.
5) 柴田碧：マトリックス構造解析講座，鋼構造協会誌，Vol. 3, No 24 (1967.12) 71; Vol. 4, No. 26 (1968.2) 48.
6) R. A. Rosanoff: Survey of Modern Nonsense as Applied to Matrix Computations, **US 4-3**
7) 奥村敦史ほか：マトリックス構造解析講演論文集，日本鋼構造協会 (1969.5) 605.
8) 文献(5)後半参照．
9) 日本機械学会：原子炉容器及び配管系の耐震設計に関する試験研究成果報告書 (昭和42年度) (1969.3) ほか3冊．
10) 酒井敏之：日本機械学会第 45 期通常総会講演論文集，No. 190 (1968.4) 69 ほか．
11) R.W. Clough: **US 3-1**
12) J.S. Przemieniecki: *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill (1968) 468 pp.
13) Y. Yamada: **J 3-1**
14) M. Hamada: **J 3-5**
15) R.E. Fulton ほか: Accuracy and Convergence of Finite Element Approximations, *Rivised Paper presented to USAF 2nd Conferense on Matrix Methods in Structural Mechanics* (1968.12) 40 pp.
16) H. Shibata: **J 3-2**
註 **J 3-2** などと記した文献は日米セミナに提出された論文である．