

特 集

# 有限要素法による 3 次元連続体の応力解析

Three-dimensional Stress Analysis of Elastic Solids by Finite Element Method

坪井 善勝\*・川股 重也\*\*・塩屋 繁松\*\*・田中 伸幸\*\*

Yoshikatsu TSUBOI, Shigeya KAWAMATA, Shigematsu SHIOYA and Nobuyuki TANAKA

マトリックス法による有限要素解析の応用問題の一つとして、3 次元立体的弾性解析を取り上げ筆者らが行った Boussinesq の問題と、厚肉円筒容器の開孔まわりの応力解析の例を紹介する。

## はしがき

連続体の数値解析の有力な手段として有限要素法はすでに各分野で研究されている<sup>1)2)</sup>。ここでは、すでに発表した 2 次元問題<sup>3)</sup>、回転体の軸対称<sup>3)</sup>、非軸対称問題<sup>3)4)</sup>の拡張として、任意形状の 3 次元連続体を取り扱い、有限要素への分割が最も自由な 4 面体要素に対する剛性行列を直接法で求める。変位仮定では、要素の細分に伴って正解への収束を保証する 3 つの条件 (全ての剛体変位を含む。要素内で一定な応力の項を含む。要素間で変位が連続) を充たす 1 次関数を用いる。例題ではまず Boussinesq 問題について理論解と比較する。さらにほぼ実用的な規模の例として、内圧を受ける穴あき厚肉円筒について、解析解との重ね合わせ<sup>5)</sup>を利用して、局部応力の解析を行なう。多元連立方程式の解法は反復法により、450 節点 (未知量 1350)、2000 要素の立体がコアメモリー (65K 語) で解析できる。円筒の例では解の平均偏差  $3 \times 10^{-5}$  を得るのに 350 サイクルの反復で演算時間 14 分 (HITAC 5020 E) を要した。

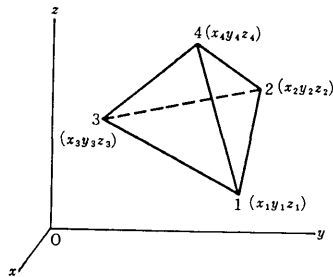


図 1 座標系と 4 面体要素

## 変位式

図 1 に示すような直交直線座標系に 4 面体要素を考え節点変位および節点力ベクトルを

$$d = \{u_1 u_2 u_3 u_4 : v_1 v_2 v_3 v_4 : w_1 w_2 w_3 w_4\} \quad (1)$$

および

$$f = \{f_{x1} f_{x2} f_{x3} f_{x4} : f_{y1} f_{y2} f_{y3} f_{y4} : f_{z1} f_{z2} f_{z3} f_{z4}\} \quad (2)$$

で定義する。いかなる節点変位に対しても要素内の変形状態が一義的に規定できるように変位  $u, v$  および  $w$  をそれぞれ座標関数の 1 次式

$$\begin{cases} u = \phi(A \ O \ O)d \\ v = \phi(O \ A \ O)d \\ w = \phi(O \ O \ A)d \end{cases} \quad (3)$$

で表わす。ここに  $\phi$  は 1 次の変位関数形、 $A$  は未定係数行列で 4 頂点の座標値から求める。すなわち

$$\begin{aligned} \phi &= [1 \ x \ y \ z] \quad (4) \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \quad (5) \end{aligned}$$

## ひずみおよび応力式

要素内のひずみ式は線形弾性理論によるひずみ-変位関係式から求めると

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \\ \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & O & O \\ O & \gamma & O \\ O & O & \delta \\ O & \delta & \gamma \\ \delta & O & \beta \\ \gamma & \beta & O \end{bmatrix} d = \bar{\epsilon} d \quad (6)$$

応力式はフックの法則  $\sigma = D\epsilon$  ( $D$ : 弾性係数行列) から

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}\beta & E_{12}\gamma & E_{13}\delta \\ E_{12}\beta & E_{22}\gamma & E_{23}\delta \\ E_{13}\beta & E_{23}\gamma & E_{33}\delta \\ O & G_{44}\delta & G_{44}\gamma \\ G_{55}\delta & O & G_{55}\beta \\ G_{66}\gamma & G_{66}\beta & O \end{bmatrix} d \equiv \bar{\sigma} d (= D\bar{\epsilon}d) \quad (7)$$

等方性体では、 $E_{ij}$  および  $G_{ii}$  はラメの定数を用いて

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \lambda + 2\delta_{ij}\mu \quad (\delta_{ij}: \text{クロネッカーデルタ}) \\ G_{ii} &= \mu \end{aligned} \quad (8)$$

で表わせる。

## 剛性行列

仮想仕事の原理から釣合式を導く。すなわち、ひずみの係数  $\bar{\epsilon}$  は要素内で一定であることを考えて、

\* 東京大学名誉教授, 東北大学教授

\*\* 東京大学生産技術研究所 第 5 部

$$f = (\bar{\epsilon}^T D \bar{\epsilon} \cdot V) d \equiv kd \quad (V: \text{要素の体積}) \quad (9)$$

$k$  が求める要素の剛性行列で、式 (6) および (7) により

$$k = \begin{Bmatrix} E_{11}\beta^T\beta + G_{55}\delta^T\delta + G_{66}\tau^T\tau & E_{12}\beta^T\tau + G_{66}\tau^T\beta & E_{13}\beta^T\delta + G_{55}\delta^T\beta \\ E_{22}\tau^T\tau + G_{44}\delta^T\delta + G_{66}\beta^T\beta & E_{23}\tau^T\delta + G_{44}\delta^T\tau & \\ \text{SYM.} & E_{33}\delta^T\delta + G_{44}\tau^T\tau + G_{55}\beta^T\beta & \end{Bmatrix} \cdot V \quad (10)$$

構造全体の釣合方程式と節点処理

構造全体に対する各節点での釣合式は  $F, D$  および  $K$  を全体の節点力, 変位ベクトルおよび剛性行列として

$$F = KD \quad (11) \quad \nearrow$$

で表現される。実際の数値解析では各節点の変位 ( $u, v, w$ ) を小行列とする加速緩和方式を用い、加速係数  $\beta$  は変位成分別に与える。 $K$  は非零要素のみ扱い、対角部分の小行列は前もって節点条件により処理を行なう。  
すなわち

$$D_m^{(r+1)} = K_{mm}^{-1} \left[ F_m - \sum_{n=1}^{m-1} K_{mn} D_n^{(r+1)} + \sum_{n=m+1}^N K_{mn} D_n^{(r)} \right] \quad (12)$$

において、たとえば

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{1} \quad u, v, w \neq 0: K_{mn}^{-1} &= \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ \text{SYM.} & & k_{33} \end{Bmatrix}^{-1} \\ \textcircled{2} \quad w = 0: K_{mn}^{-1} &= \frac{1}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} \begin{Bmatrix} k_{22} & -k_{12} & 0 \\ & k_{11} & 0 \\ \text{SYM.} & & 0 \end{Bmatrix} \\ \textcircled{3} \quad v = u \tan \theta: K_{mn}^{-1} &= \frac{1}{k_{33}a_{11} - a_{13}^2} \begin{Bmatrix} k_{33} & k_{33}\tan\theta & a_{13} \\ & k_{33}\tan^2\theta & a_{13}\tan\theta \\ \text{SYM.} & & a_{11} \end{Bmatrix} \\ \textcircled{4} \quad v = u \tan \theta, w = 0: K_{mn}^{-1} &= \frac{1}{a_{11}} \begin{Bmatrix} 1 & \tan\theta & 0 \\ & \tan^2\theta & 0 \\ \text{SYM.} & & 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ただし、 $a_{11} = k_{11} + 2k_{12}\tan\theta + k_{22}\tan^2\theta$ ,  $a_{13} = -(k_{13} + k_{23}\tan\theta)$

など各種の条件が考えられる。

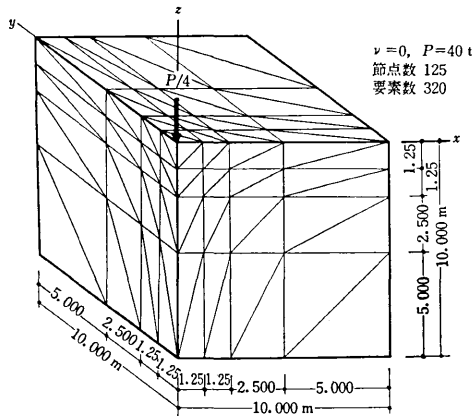


図 2 分割形式

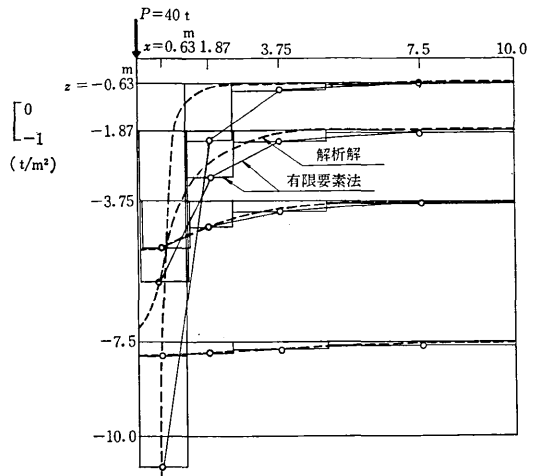


図 3  $\sigma_x$

例 1 Boussinesq 問題——半無限弾性体が集中荷重を受けるとき、有限要素法では有限境界を考え、内部を予想される応力分布性状により適当な大きさの要素に分割する(図 2)。本例では 1/4 の部分を 64 個の 6 面体に、さらに 1 個の 6 面体を 5 個の 4 面体に分割した。図 3 は  $z = \text{一定}$  で 6 面体の中央にある 4 面体の応力  $\sigma_x$  を示す。荷重近傍では Boussinesq の解と比べ大きく、さらに要

素を細分すべきであるが、 $z = -2.5\text{m}$  より離れた所ではほとんど一致する。

例 2 内圧を受ける穴あき厚肉円筒——円孔を有する無限円筒が内・外および円孔部表面に垂直応力を受ける場合(図 4-a)の解析例を示す。i) 円孔のない無限円筒の解析解があるので、これを利用する(状態 I, 図 4-

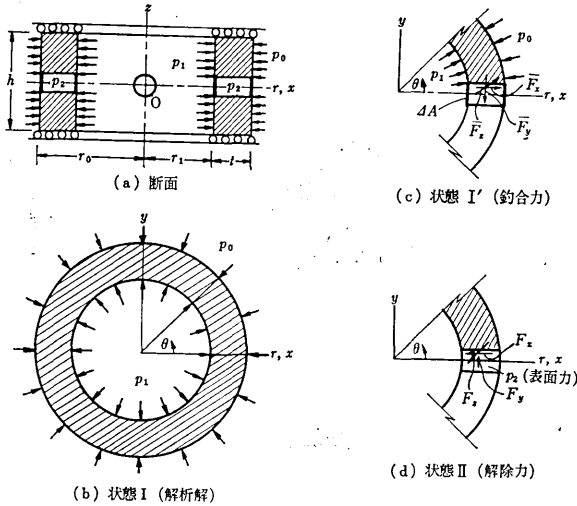


図 4

b). ii) 円孔を有する無限円筒に対しては、状態 I において円孔を仮想し、円孔により応力の乱れる領域について、有限要素への分割を行なう。仮想円孔表面上の各点で、状態 I で生じている応力と釣合う表面を支配面積について各成分ごとに積分する (状態 I', 図 4-c)。iii) 状態 I' で求めた作用力 ( $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$ ) の符号を反対にして、円孔部分の解除力  $F$  とする (状態 II, 図 4-d)。iv) 円孔表面に垂直応力 ( $p_2$ ) が作用している場合は、これに面積成分を掛けて、状態 II で求めた解除力  $F$  に成分別に加える。また状態 I で開口面積 ( $\Delta A$ ) に作用している内圧はキャップ、ダクトなどによって受けられるから、それらの固定法に応じて、開口周辺に作用される。v) 状態 II の  $F$  を荷重項として釣合式  $F=KD$  から、節点条件を考慮して、節点変位  $D$  を求め、応力を算定する。vi) 状態 I および II の変位および応力をそれぞれ加え合わせ、円孔を有する無限円筒の変位および応力が求められる。

次に解除力  $F$  の算定について述べる。まず状態 I での応力を円孔表面での 3 角形 (図 5) の重心  $m(x, \bar{y}, \bar{z})$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x_1 + x_2 + x_3)/3, \quad \bar{y} = (y_1 + y_2 + y_3)/3 \\ \bar{r} &= \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \end{aligned} \quad (21)$$

について、 $(r, \theta, z)$  系で表わすと

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= [(-\bar{r}^{-2} + r_1^{-2})p_0 \\ &\quad + (\bar{r}^{-2} - r_0^{-2})p_1]/(r_1^{-2} - r_0^{-2}) \\ \bar{\sigma}_\theta &= [(\bar{r}^{-2} + r_1^{-2})p_0 \\ &\quad + (-\bar{r}^{-2} - r_0^{-2})p_1]/(r_1^{-2} - r_0^{-2}) \\ \bar{\sigma}_z &= 2\nu[r_1^{-2}p_0 - r_0^{-2}p_1]/(r_1^{-2} - r_0^{-2}) \end{aligned} \right\} (22)$$

または  $(x, y, z)$  系に変換して

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \bar{\sigma}_r \cos^2 \theta + \bar{\sigma}_\theta \sin^2 \theta \\ \bar{\sigma}_y &= \bar{\sigma}_r \sin^2 \theta + \bar{\sigma}_\theta \cos^2 \theta \\ \bar{\tau}_{xy} &= (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta) \sin \theta \cos \theta, \quad \bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_z (\text{不変}) \end{aligned} \right\} (23)$$

で表わせる。ただし、 $\cos \theta = \bar{x}/\bar{r}$ ,  $\sin \theta = \bar{y}/\bar{r}$  を用いる。

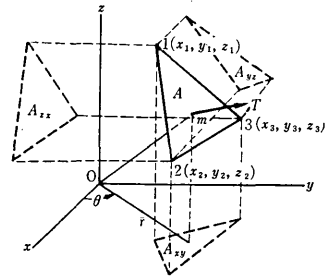


図 5

円孔表面での合力  $T$  の各成分  $\bar{F}_x, \bar{F}_y$  および  $\bar{F}_z$  は

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_x &= T_x A = (\bar{\sigma}_x \cos \hat{n}_x + \bar{\tau}_{xy} \cos \hat{n}_y + \bar{\tau}_{xz} \cos \hat{n}_z) A \\ &= \bar{\sigma}_x A_{yz} + \bar{\tau}_{xy} A_{xx} \\ \bar{F}_y &= T_y A = (\bar{\tau}_{xy} \cos \hat{n}_x + \bar{\sigma}_y \cos \hat{n}_y + \bar{\tau}_{yz} \cos \hat{n}_z) A \\ &= \bar{\tau}_{xy} A_{yz} + \bar{\sigma}_y A_{xx} \\ \bar{F}_z &= T_z A = (\bar{\tau}_{xz} \cos \hat{n}_x + \bar{\tau}_{yz} \cos \hat{n}_y + \bar{\sigma}_z \cos \hat{n}_z) A \\ &= \bar{\sigma}_z A_{xy} \end{aligned} \right\} (24)$$

ただし、 $A$  は 3 角形 (1, 2, 3) の面積、 $A_{yz}, A_{xx}, A_{xy}$  はそれぞれ  $yz, zx, xy$  面への射影面積である。

ゆえに解除力は円孔内部の垂直表面応力  $p_2$  をも考慮して、

$$\left. \begin{aligned} F_x &= p_2 A_{yz} - \bar{F}_x, \quad F_y = p_2 A_{xx} - \bar{F}_y \\ F_z &= p_2 A_{xy} - \bar{F}_z \end{aligned} \right\} (25)$$

これが状態 II における、式 (18) の荷重ベクトル  $F$  となり、そのときの 4 面体の応力を  $\bar{\sigma}(x, y, z)$  系とする。

状態 I の応力  $\sigma_0(x, y, z)$  系) は解析解 (式 (22) および (23) で  $\bar{r}$  を  $r$  とした) から得られる。したがって求める応力  $\sigma(x, y, z)$  系) は次式となる。

$$\sigma = \sigma_0 + \bar{\sigma} \quad (26)$$

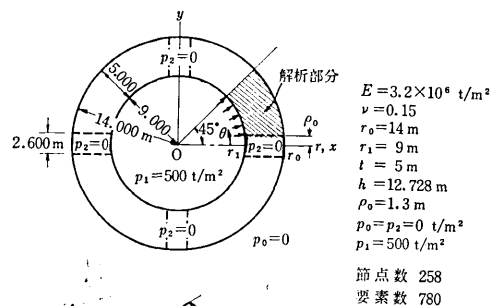


図 6 円孔を有する無限円筒の諸定数と分割形式

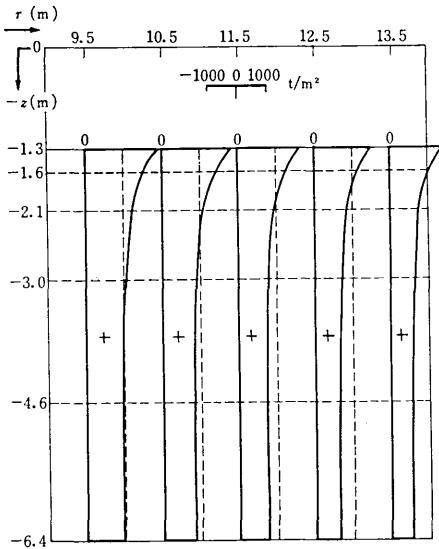


図 7  $\theta_r(\theta=0)$

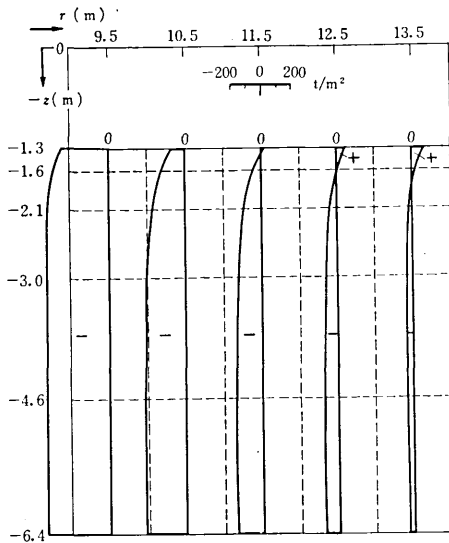


図 8  $\sigma_r(\theta=0)$

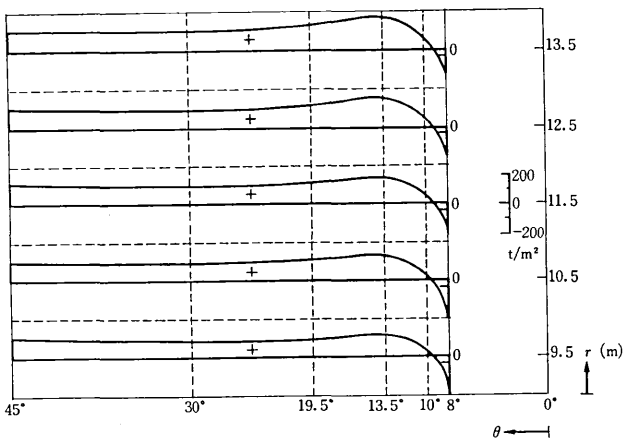


図 9  $\sigma_z(z=0)$

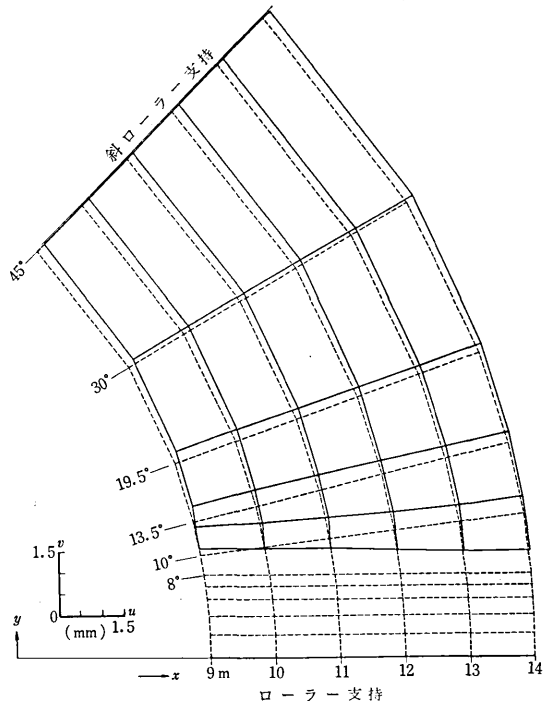


図 10 変位図(解除力のみによる,  $z=0$ )

図 6 に解析に用いた円筒の諸定数と分割形式を示す。  
 図 7~9 に代表的応力を, 図 10 に変形略図を示す。  
 円孔近傍(図 6)の応力集中率は, 無限円筒の解より  
 A 点近傍:  $\bar{\sigma}_r/\bar{\sigma}_r = -350.9/(-500) = 0.70$  ( $\rho/\rho_0 = 2.0$ )  
 "  $\bar{\sigma}_\theta/\bar{\sigma}_\theta = 2572.5/1204.3 = 2.13$  ( $\rho/\rho_0 = 2.5$ )  
 "  $\bar{\sigma}_z/\bar{\sigma}_z = 393.9/105.7 = 3.54$   
 B 点近傍:  $\bar{\sigma}_r/\bar{\sigma}_r = 2110.1/760.6 = 2.78$  ( $\rho/\rho_0 = 2.5$ )  
 "  $\bar{\sigma}_z/\bar{\sigma}_z = 408.4/105.7 = 3.86$   
 C 点近傍:  $\bar{\sigma}_r/\bar{\sigma}_r = -601.3/(-500) = 1.20$  ( $\rho/\rho_0 = 1.5$ )  
 "  $\bar{\sigma}_z/\bar{\sigma}_z = -330.8/105.7 = -3.13$  ( $\rho/\rho_0 = 2.0$ )  
 D 点近傍:  $\bar{\sigma}_z/\bar{\sigma}_z = 235.2/105.7 = 2.23$  ( $\rho/\rho_0 = 2.5$ )  
 ただし,  $\rho_0$  は円孔半径,  $\rho$  は応力擾乱範囲である。

(1969 年 11 月 8 日 受理)

参考文献

- 1) O. C. Zienkiewicz & Y. K. Cheung, "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", McGraw-Hill, 1967
- 2) R. J. Melosh, "Structural Analysis of Solids" J. of the Structural Div., Proc. of the ASCE, Aug. 1963
- 3) 坪井・川股・塩屋・田中: 「Finite Element Method による連続体の解析」, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和 42, 43, 44 年
- 4) 川股・塩屋: 「回転体の非対称問題に対する剛性行列」, 生産研究 20-1, 昭和 43 年 1 月
- 5) 山本善之・一色 浩・谷口雅春: 「解析解と有限要素法」, 日本鋼構造協会, マトリックス構造解析講演論文集, 昭和 44 年 5 月