

有限要素法による平板曲げの解析

Finite Element Formulations for Plate Bending Analysis

吉 田 裕*

Yutaka YOSHIDA

有限要素法を平板の曲げの解析に適用することについては、本質的な問題点が内在し、したがって、非常に多くの研究が発表されてきた。この間の事情を理解し、現状を認識するために、有限要素法による平板曲げの解析に対する研究を概括する。

1. はじめに

構造解析の分野における近年の飛躍的發展の様相は目ざましい。その第一の要因はいうまでもなく電子計算機の出現であり、その普及である。それは、解析法の可能性の範囲を急速に拡大すると共に、電子計算機自体の大型化、高速化といった面での高度の改良を要求し、また改良された計算機が解析法の進歩を促進するといった形で進んでいる。

平板曲げの問題は、構造系の中で重要な位置を占めており、また基礎微分方程式が導かれてから百年余の歴史があるために、その間に発表された理論面、応用面の研究は膨大な数に上り、この問題を体系づける参考書も数多く出版されている。それにもかかわらず、これまでに解析的に解決されてきた問題はごく限られた範囲にとどまっており、従来の解析法の煩雑さと相まって実際面での遅れは大きい。

境界値問題の近似解法として有力な方法に差分方程式による方法がある。この方法は、連続的な領域を一連の格子点で代表することによって、支配方程式と境界条件を差分方程式で置き換え、多元連立一次方程式の解法を適用して解く方法であり、差分による近似の範囲内において特別な工夫を必要とせずに解を得ることができるという利点がある。しかし、この方法によって任意の形状の板の解析を行なう場合には、支配方程式が拘束される座標系による境界条件の表現が困難になり適用可能な範囲は限定される。いずれにしても、差分方程式による解法は、多元連立一次方程式を解くことに帰着するのであるから、Relaxation 法や反復法など連立方程式の解法の開発によって可能性の範囲が拡大されてきたのであって、その価値を飛躍的に増大させたのは、やはり電子計算機の出現であり、その普及の結果である。

対象の形状や境界条件を考慮する上で最も自由度が高いのは有限要素法である。この方法は、連続体としての構造物を長方形や三角形などの単純な形状の要素に分割し、構造物をこのような有限要素の集合体と考えて解析する方法である。骨組構造のような場合には、ある仮定

のもとで、このような方法によって正解が得られるが、二次元応力問題や平板曲げの問題などの解析においては変位型や応力分布に関して無限の自由度を有する実際の構造系を、有限の自由度で限定される変位型などを仮定して解析するのであるから、要素の大きさある程度まで細かくして構造系としての自由度を高めると、必要な精度の解が得られるということを目指した解析法である。

以下に、平板曲げの解析について有限要素法による研究を概括する。

2. 有限要素法による平板曲げの解析の変遷

有限要素法を板の曲げの解析に適用することについては本質的な問題点が内在し、したがって、非常に多くの研究が発表されてきた。この間の事情を理解するために研究の過程を概括する。

この問題に関する有効な剛性マトリックスを開発しようとするとき問題となるのは、要素の縁の適合条件を満足するような要素の変形の型を選ぶことである。曲げモーメントが要素内で直線的に変化するものと仮定すれば変位関数を x, y に関する三次式で表わすことができる。完全な三次の多項式は

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \\ + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3$$

と表わされるので10個の係数が決定されれば多項式は確定する。いま各節点に、3つの成分 ($w, \partial w / \partial x, \partial w / \partial y$) を有する節点変位を導入して解析するものとすれば、矩形要素では12、三角形要素では9の自由度がある。矩形要素を用いる場合には、完全な三次の変位関数にさらに四次の項を2つ追加することができるが¹⁾、三角形要素の場合には完全な三次の変位関数を用いることができない。そこで、多項式の係数を9個に通減するために、たとえば $\alpha_5 xy$ の項を取り除いた関数を用いたり⁸⁾、 $x^2 y$ と xy^2 の係数を一つにしたり⁹⁾、変分原理を適用して変位関数の自由度を減じたり⁹⁾¹⁰⁾ して剛性マトリックスを誘導することが行なわれた。その結果、12の自由度を有する矩形要素では、かなりよい精度が期待できるが、三角形要素に関しては、その変位関数の決め方によって著

* 東京大学生産技術研究所 第5部

しい違いが生じ、また要素の大きさを小さくしてもかならずしも正解に収斂するとは限らないものも存在することが分った。

その根本的原因は、仮定した変位形が要素の縁に沿っての適合条件を満足しないためである。すなわち、二節点間を結ぶ要素の縁の直線に沿って変位は一般に三次式で支配されるので、その変位形は 4 つの係数によって決定される。両端の二節点でそれぞれ変位と勾配が与えられるから、その線に沿った変位は完全に決定され、したがって、その線を共有する 2 つの要素間の変位の連続性は保証される。

一方、変位関数が三次の多項式の場合は、その勾配は二次方程式によって決定されるので、それを決定するためには 3 つの係数を決めることが必要である。しかし、二節点を結ぶ線の法線方向の勾配に関しては両端で二つの条件しか与えていないので、この条件だけではこれを一義的に決定することができない。したがって、その線を共有する 2 つの要素間の、その線に直角方向の勾配の連続性は保証されない。この要素の縁の勾配の適合の欠陥が、よい解析結果が得られない原因である。

矩形要素については比較的良好な結果が得られるのは、矩形要素の変位関数が x, y の 12 項の多項式で仮定され、対象がその変位関数の座標系に無理を与えないように選ばれるために、要素間の勾配の不一致が顕著に影響を与えなかったためである。

しかし、要素間の境界上の全ての点で完全にたわみおよび勾配が連続となるような変位関数をつくることは、一般に困難である。たとえば、境界線上で法線方向のたわみの勾配が直線的に変化するものと仮定して変位関数を決定すると、その境界線の両端で与えられる法線方向の勾配に関する 2 つの条件によって線上の全ての点の法線方向の勾配が一義的に決定されるから、その境界線を共有する 2 つの要素に関してその線に直角方向のたわみの勾配の連続性が確保される。しかし、このような場合には節点における捩れ ($\partial^2 w / \partial x \partial y$) の値は、一般に一義的に決めることができない¹¹⁾。したがって、要素全体を一つの多項式で定義することができない。そこで、原三角形要素をさらに要素内の一点と原要素の三頂点を結ぶ線で分割される 3 つの部分三角形に分け、それぞれの部分三角形について、原三角形要素の辺方向に \bar{x} 軸を、それに直角方向に \bar{y} 軸をとり、各部分三角形の変位関数を、 \bar{y} 方向のたわみの勾配が \bar{x} に関する一次式で表わされるように定義して、3 つの部分三角形に対して導入された任意定数を部分三角形間の適合条件を考慮して選定し自由度 9 の剛性マトリックスが誘導されたりした⁹⁾。

変位関数について注意しなければならないのは、求めた剛性マトリックスが特定の座標系に拘束され、座標変換が不可能になる場合が起こることである。そのような

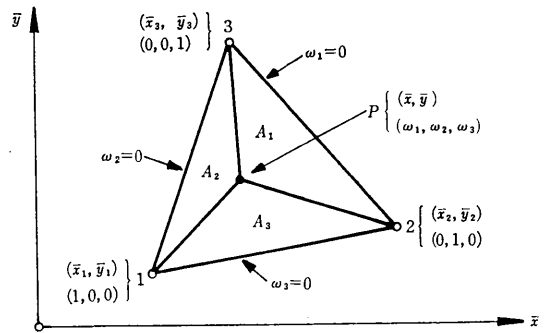


Fig. 1 Area coordinates

欠点を除くために、三角形要素に面積座標の考えを導入することができる。すなわち、原三角形要素 (1-2-3) 内の任意の点の位置 $P(\bar{x}, \bar{y})$ を、その点と原三角形の各頂点を結ぶ線で分割される 3 つの部分三角形の面積 A_1, A_2, A_3 と原三角形の総面積 A との比によって定義する方法である¹¹⁾。

いま、図 1 を参照して、 P の 3 つの面積座標を次のように定義する。

$$\omega_i = \frac{A_i}{A} \quad i=1, 2, 3$$

ここで、 $A = A_1 + A_2 + A_3$ であるから $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$ である。また $\omega_i = \text{const.}$ は、頂点 i に相対する辺に平行な線を表わし、頂点 i は $\omega_i = 1$ および $\omega_j = \omega_k = 0$ ($i \neq j \neq k$) によって与えられる。

いま、三角形要素の全ての辺上で値が零となり、一つの着目する辺上で、その法線方向の勾配 $\partial \phi / \partial n$ が二次式で与えられ、その着目する辺以外の全ての辺上でその法線方向の勾配が零となり、要素内でその値および勾配が連続な値をとるような関数 ϕ が定義できるならば、各辺に対するそのような関数を補正関数として、一般の変位関数に加えることによって、境界線上の法線方向の勾配の適合条件を満足する変位関数を見いだすことができる。このような条件を満足する補正関数として、たとえば、

$$\phi_{ijk} \equiv \phi_i = \frac{\omega_i \omega_j^2 \omega_k^2}{(\omega_i + \omega_j)(\omega_i + \omega_k)}$$

のような関数が与えられた¹²⁾。また、四辺形要素に対しても、このような補正関数によって適合関数を求める研究が行なわれた¹³⁾。

また、辺上にも付加節点を導入したり¹³⁾⁻¹⁵⁾、頂点の節点変位としてたわみの二次導関数を含めたり¹⁵⁾¹⁶⁾して自由度の高い剛性マトリックスを誘導する研究や変断面要素の剛性マトリックスの誘導¹⁷⁾なども行なわれている。

3. 種々の変分原理によるアプローチ

これまでに述べてきた研究は全て、構造全体に連続と

なるような変位関数を求めようとするものであった。したがって、そこから得られる基本マトリックス方程式はそのような変位型の仮定のもとに、最小ポテンシャルエネルギーの原理から導かれる“compatible model”である。T. H. H. Pian の論文¹⁸⁾に基づいてこのモデルが誘導される過程をたどってみる。

すなわち、連続体が有限の数の要素 V_n に分割されている場合には、ポテンシャルエネルギー関数は

$$\Pi_p = \sum_n \left(\int_{V_n} \left[\frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \bar{F}_i u_i \right] dV - \int_{S_{\sigma n}} \bar{T}_i u_i dS \right) \quad (1)$$

のように表わされる。ここに、 ε_{ij} は歪テンソルの成分、 E_{ijkl} は弾性定数、 V は体積、 \bar{F}_i は体力 (body force) の成分、 u_i は変位、 S は表面、 $S_{\sigma n}$ は S のうちの表面力 T_i が与えられている n 番目の要素の境界の部分、 \bar{T}_i は与えられた表面力である。

有限要素法を適用する場合には、近似変位関数 u_i が要素の有限個の、節点における一般化変位の関数として表わされる。この変位関数は、隣接する2つの要素に対して節点変位が連続している場合に、それに相当する境界線に沿って変位が連続するようなものでなければならぬ。そのような変位型を

$$u = [A_q A_r] \begin{Bmatrix} q \\ r \end{Bmatrix} \quad (2)$$

と表わす。ここに、 q は隣接する要素間で連続することが必要な節点変位、 r は連続することが必要でない節点変位を表わす。次に、この変位型に相当する歪分布を

$$\varepsilon = [B_q B_r] \begin{Bmatrix} q \\ r \end{Bmatrix} \quad (3)$$

と表わす。式(2)、(3)を式(1)に代入して

$$\Pi_p = \sum_n \left(\frac{1}{2} q^T k_{qq} q + r^T k_{rq} q + \frac{1}{2} r^T k_{rr} r - \bar{Q}_q^T q - \bar{Q}_r^T r \right) \quad (4)$$

を得る。ここに、

$$k_{qq} = \int_{V_n} B_q^T E B_q dV$$

$$k_{rq} = \int_{V_n} B_r^T E B_q dV$$

$$k_{rr} = \int_{V_n} B_r^T E B_r dV$$

$$\bar{Q}_q = \int_{V_n} A_q^T \bar{F} dV + \int_{S_{\sigma n}} A_{qb}^T \bar{T} dS$$

$$\bar{Q}_r = \int_{V_n} A_r^T \bar{F} dV + \int_{S_{\sigma n}} A_{rb}^T \bar{T} dS$$

である。 A_{qb} 、 A_{rb} の B は境界に沿って評価することを示している。いま、変位 r は異なった要素に対しては独立であるから、その変分に関する停留条件から

$$k_{rq} q + k_{rr} r - \bar{Q}_r = 0 \quad (5)$$

を得る。 r に関して式(5)を解いて、式(4)に代入して

$$\Pi_p = \sum_n \left(\frac{1}{2} q^T k q - \bar{Q}^T q + C_n \right) \quad (6)$$

を得る。ここに、 k は要素の剛性マトリックスで

$$k = k_{qq} - k_{rq}^T k_{rr}^{-1} k_{rq}$$

\bar{Q} は等価節点力で

$$\bar{Q} = \bar{Q}_q - k_{rq} k_{rr}^{-1} \bar{Q}_r$$

であり、

$$C_n = -\frac{1}{2} \bar{Q}_r^T k_{rr}^{-1} \bar{Q}_r = \text{constant}$$

である。

節点変位 q は異なった要素に対して完全には独立でない。したがって、要素の節点変位を構造全体の系の独立な変位に変換する必要がある。すなわち、

$$\{q_1 q_2 \dots q_N\} = J q^* \quad (7)$$

ここに J は変換マトリックスである。このようにして、 Π_p は

$$\Pi_p = \frac{1}{2} q^{*T} K q^* - q^{*T} \bar{Q}^* + \sum_n C_n \quad (8)$$

と表わすことができる。ここに、 K は構造全体の剛性マトリックスで $K = J^T [k_1 k_2 \dots k_N] J$ であり、 \bar{Q}^* は仮定した変位関数に対応する一般化された作用節点力の列マトリックスで、 $\bar{Q}^* = J^T \{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \dots \bar{Q}_N\} J$ である。

いま、変位 q^* のうち幾何学的境界条件として与えられているものを \bar{q}_2^* 、未知のものを q_1^* として分割すると

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \{q_1^{*T} \bar{q}_2^{*T}\} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^* \\ \bar{q}_2^* \end{Bmatrix} - \{q_1^* \bar{q}_2^*\} \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1^* \\ \bar{Q}_2^* \end{Bmatrix} \quad (9)$$

となる。ここに、 \bar{Q}_1^* は与えられている節点力、 \bar{Q}_2^* は未知節点力である。ここで、最小ポテンシャルエネルギーの原理を適用して、 $\delta \Pi_p = 0$ より

$$K_{11} q_1^* = \bar{Q}_1^* - K_{12} \bar{q}_2^* \quad (10)$$

を得る。

このような“compatible model”に対して、釣合条件を満たす応力分布の仮定のもとに、最小コンプレメンタリエネルギーの原理から導かれる“equilibrium model”も誘導されている²⁰⁾²¹⁾。また、板の曲げの問題と平面応力問題の間の力学的、幾何学的な相似性に基づいて基本マトリックスを誘導することも行なわれている²²⁾。すなわち、“equilibrium model”による板の曲げの問題は、“compatible model”による平面応力問題と同じように扱うことができる。この点に関する議論は他の研究者によっても行なわれた²³⁾。

また、個々の要素内で応力分布を仮定し、要素の境界に沿って適合変位関数を仮定して、修正したコンプレメンタリエネルギーの原理から導く“assumed stress hybrid model”も板の曲げの問題に対して導かれている²⁴⁾。これに対して、要素内で変位関数を仮定し、要素の

境界に沿って、釣合条件を満たす力を仮定して、最小ポテンシャルエネルギーの原理から誘導する“assumed displacement hybrid model”も求められている²⁶⁾。

また、構造全体に連続となるような変位関数を仮定し個々の要素に対して応力分布を仮定して、Reissnerの変分原理から基本マトリックスを誘導することもできる。このような基本式を“mixed model”と呼ぶ。Herrmannは三角形要素に対し、変位 w を線形分布に仮定し、モーメント M_x , M_y , M_{xy} は線形分布を仮定するもの²⁷⁾と、要素内で一定であると仮定するもの²⁸⁾について基本式を導いた。このモーメントを一定と仮定するモデルは未知数が少いにもかかわらず比較的良好な結果が得られている。

上記のように、有限要素法においては連続体としての対象を有限要素の集合体と考え、その個々の要素内で変位あるいは応力分布またはその両方を仮定し、変分原理を適用して基本マトリックス方程式を求める。その誘導の内容に関しては、T. H. H. Pian の論文¹⁸⁾¹⁹⁾に詳しく解説されている。また、弾性体および塑性体における変分法の取り扱いに関しては、鷺津教授の著書⁶⁾に詳しく述べられている。

4. 平板曲げの剛性マトリックスの誘導

ここでは、三角形要素に対する具体的な平板曲げの剛性マトリックスの誘導の過程を K. Bell の論文¹⁵⁾に基づいて解説する。

薄い板の曲げの弾性理論に基づけば、モーメントと曲率の関係は次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{,xx} \\ W_{,yy} \\ 2W_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここに、 D は板の曲げ剛性で $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ である。また、 $W_{,xx} = \partial^2 W / \partial x^2$, $W_{,yy} = \partial^2 W / \partial y^2$, $W_{,xy} = \partial^2 W / \partial x \partial y$ である。式(11)を $m = -Dc$ のように書く。

いま、変位関数を完全な五次の多項式で表わすものとするれば

$$W(x, y) = \langle 1 \ x \ y \ x^2 \dots x^2 y^3 \ x y^4 \ y^5 \rangle \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{21} \end{Bmatrix} = \phi^T q \quad (12)$$

として与えられる。また、変位関数を仮定すれば、それを微分することによって、要素の曲率は

$$c = \begin{Bmatrix} W_{,xx} \\ W_{,yy} \\ 2W_{,xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2y^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6x^2y & 12xy^2 & 20y^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 12xy^2 & 8y^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{21} \end{Bmatrix} = Pq \quad (13)$$

のように表わすことができる。したがって、要素内のモーメントは

$$m = -DPq \quad (14)$$

と表わされる。

いま、要素が仮想変位 $\tilde{W}(x, y) = \phi^T \tilde{q}$ を受けるものとして、仮想仕事の原理から次の関係式が得られる。

$$\tilde{q}^T Q = - \int_A \tilde{c}^T m dA = \tilde{q}^T \int_A P^T D P dA q \quad (15)$$

ここに、 Q は一般化変位 q に対応する一般化力を表わしている。また、 A は要素の面積である。式(15)より

$$Q = k_q q \quad (16)$$

を得る。ここに、 k_q は要素の一般化剛性マトリックスで

$$k_q = \int_A P^T D P dA \quad (17)$$

である。

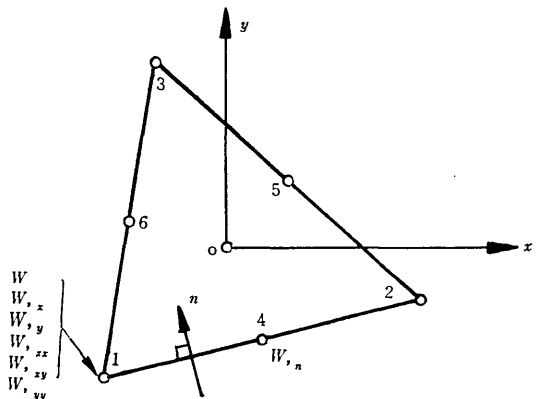


Fig. 2 Nodal point system and nodal parameters

いま、図2に示したように三角形の各頂点で6つ、各辺の中央で1つずつの計21の節点変位 v を考えるものとするれば

$$v = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

ここに

$$v_i = \begin{Bmatrix} W \\ W_{,x} \\ W_{,y} \\ W_{,xx} \\ W_{,xy} \\ W_{,yy} \end{Bmatrix}_i \quad i=1, 2, 3$$

であり、

$$v_j = \{ W, n \}_j \quad j=4, 5, 6$$

と表わされる。

節点変位 v と一般化変位 q との関係は

$$v = Aq \quad (18)$$

のように表わすと、マトリックス A は変位関数またはそれを微分したものに各節点の座標を代入することによって次のように表わされる。すなわち

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_6 \end{Bmatrix} q$$

として、

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & \cdots & x_i^2 y_i^3 & x_i y_i^4 & y_i^5 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_i & \cdots & 2x_i y_i^3 & y_i^4 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 6x_i y_i^2 & 4y_i^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 6x_i^2 y_i & 12x_i y_i^2 & 20y_i^3 \end{pmatrix}$$

$$i=1, 2, 3$$

$$A_j^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -s_j \\ c_j \\ -2s_j x_j \\ \vdots \\ 3c_j x_j^2 y_j^2 - 2s_j x_j y_j^3 \\ 4c_j x_j y_j^3 - s_j y_j^4 \\ 5c_j y_j^4 \end{pmatrix} \quad j=4, 5, 6$$

のように与えられる。ここに、 $s=\sin\alpha$ 、 $c=\cos\alpha$ であり、 A_j の成分は次のようにして求められる。すなわち、要素の各辺の法線の正の方向を、図3を参照して、

$$0 \leq \beta_j < \pi$$

となるように決める。したがって、

$$0 \leq \alpha_j < \frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{3}{2}\pi \leq \alpha_j < 2\pi$$

となる。このように、各辺の x 軸となす角 α_j を求め、 $W_{,n} = -s W_{,x} + c W_{,y}$ より A_j の成分が求められる。

式(18)から

$$q = Bv \quad (19)$$

が得られる。ここに、

$$B = A^{-1} \quad (20)$$

である。

したがって、求める要素の剛性マトリックスは次式で定義される。すなわち、

$$k = B^T k_s B \quad (21)$$

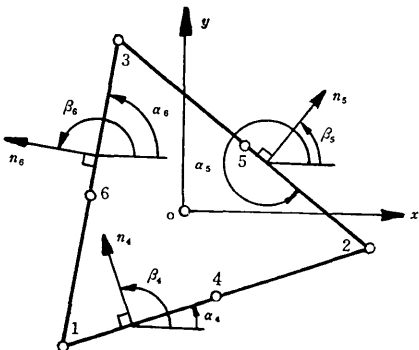


Fig. 3 Angle notation and sign convention

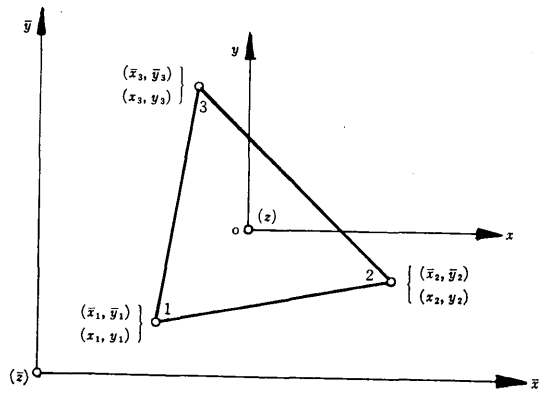


Fig. 4 Global and local cartesian system

ここで、式(17)の積分について考える。マトリックス P は式(13)のように与えられるから

$$P_{rs} = \int_A x^r y^s dA$$

を求めることが必要となる。いま、座標の原点を要素の重心の位置にとるものとする(図4)。

面積座標 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を導入すると、三角形の頂点の座標 (x_i, y_i) $i=1, 2, 3$ によって座標 x, y は

$$x = x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + x_3 \omega_3$$

$$y = y_1 \omega_1 + y_2 \omega_2 + y_3 \omega_3$$

と表わされる。したがって、

$$P_{rs} = \int_A (x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + x_3 \omega_3)^r (y_1 \omega_1 + y_2 \omega_2 + y_3 \omega_3)^s dA$$

を求めることになる。

面積座標における多項式の三角形の面積全体にわたる積分は、三角形の形に無関係に次のように表わされる。

$$\int_A \omega_i^{m_i} \omega_j^{m_j} \omega_k^{m_k} dA = \rho A$$

ここに、

$$\rho = 2 \frac{(m_i)! (m_j)! (m_k)!}{(m_i + m_j + m_k + 2)!}$$

である。

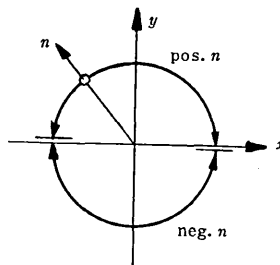
また、座標の原点が要素の重心の位置にあるので

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

である。したがって、 P_{rs} を求めることは容易である。

次に、作用節点力 S について考える。 S は要素に実際に作用する荷重を表わさなければならない。したがって、節点力としての S は要素に作用する分布荷重 $p(x, y)$ と静的に等価であるように決められる。すなわち、要素に仮想変位



$$\tilde{W}(x, y) = \phi^T \tilde{q} = \phi^T B \tilde{v}$$

を与え、仮想仕事の原理から、

$$\begin{aligned} S^T \tilde{v} &= \int_A p(x, y) \tilde{W}(x, y) dA \\ &= \int_A p(x, y) \phi^T dA B \tilde{v} \end{aligned}$$

したがって、

$$S = B^T \int_A p(x, y) \phi dA$$

を得る。

5. おわりに

以上に有限要素法による平板曲げの解析について概括したわけであるが、精度を上げるために未知変位の数を増大させることは、要素の大きさを小さくすることによって高められる精度との比較で評価されるべきであり、また、解析法の改良が解析の過程を非常に複雑にすることは、実際問題への一般的普及という点で問題である。

その意味で Herrmann の “mixed model”²⁸⁾などは注目に値すると思う。また、差分点の位置およびそのグリッドの選択に自由度を持たせた差分法による研究なども行なわれて^{29)~31)}、よい結果が得られている。

(1969年11月11日受理)

参考文献

- O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics; McGraw-Hill Publishing Co. Ltd. 1967
- O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister: Stress Analysis; John Wiley & Sons Ltd. 1965
- B. Fraeijs de Veubeke: Matrix Methods of Structural Analysis; Pergamon Press 1964
- J. S. Przemieniecki: Theory of Matrix Structural Analysis; McGraw-Hill Book Co. 1968
- 橋原二郎: 薄板構造の解析について、コンピュータ使用によるマトリックス構造解析、講習会テキスト、日本鋼構協会 1968
- K. Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity; Pergamon Press, Oxford, 1968
- R. J. Melosh: Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method; AIAA Jnl., 1, 7, 1631-1637 (1963)
- R. W. Clough and J. L. Tocher: Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, 515-546 (1965)
- T. H. H. Pian: Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions; AIAA Jnl., 2, 1333-1336 (1964)
- G. C. Best: Derivation of Element Stiffness Matrices; AIAA Jnl. 2, 8 (1964)
- B. M. Irons and K. J. Draper: Inadequacy of Nodal Connections in a Stiffness Solution for Plate Bending; AIAA Jnl. 3, 5 (1965)
- G. P. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz: Triangular Elements in Plate Bending-Conforming and Non-conforming Solutions; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, 547-576 (1965)
- B. Fraeijs de Veubeke: Bending and Stretching of Plates—Special Models for Upper and Lower Bounds; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, 863-886 (1965)
- B. M. Irons: A Conforming Quartic Triangular Element for Plate Bending; Int. J. for Numerical Meth. in Eng., 1, 1, 29-45 (1969)
- K. Bell: A Refined Triangular Plate Bending Finite Element; Int. J. for Numerical Meth. in Eng., 1, 1, 101-122 (1969)
- F. K. Bogner, R. L. Fox and L. A. Schmit, Jr.: The Generation of Inter-element Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulae; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, 397-444 (1965)
- 梶田建夫、成岡昌夫: 変断面長方形板の曲げ、および振動に対する有限要素法の応用; 土木学会論文報告集, 第 161 号 (1969)
- T. H. H. Pian and P. Tong: Basis of Finite Element Methods for Solid Continua; Int. J. for Numerical Meth. in Eng., 1, 1, 3-28 (1969)
- T. H. H. Pian: Formulations of Finite Element Methods for Solid Continua; Paper Presented at Japan-U. S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo (1969)
- B. Fraeijs de Veubeke and G. Sander: An Equilibrium Model for Plate Bending; Int. Jnl. Solids & Structures (G. B.), 4, 447-468 (1968)
- G. Sander and B. Fraeijs de Veubeke: Upper and Lower Bounds to Structural Deformations by Dual Analysis in Finite Elements; AFFDL-TR-66-199 (1967)
- L. S. D. Morley: The Triangular Equilibrium Element in the Solution of Plate Bending Problems; Aeronaut. Q., 19, 149-169 (1968)
- B. Fraeijs de Veubeke and O. C. Zienkiewicz: Strain-Energy Bounds in Finite-Element Analysis by Slab Analogy; Jnl. Strain Analysis, 2, 4, 265-271 (1967)
- T. H. H. Pian: Element Stiffness Matrices for Boundary Compatibility and for Prescribed Boundary Stresses; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80 (1965)
- R. T. Severn and P. R. Taylor: The Finite Element Method for Flexure of Slabs when Stress Distributions are Assumed; Proc. Instn Civ. Engrs., 34, 153-170 (1966)
- Y. Yamamoto: A Formulation of Matrix Displacement Method; Dept. of Aeronautics and Astronautics, M. I. T. 1966
- L. R. Herrmann: A Bending Analysis for Plates; Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, 577-604 (1965)
- L. R. Herrmann: Finite Element Bending Analysis for Plates; J. of Mech., Div. ASCE, 93, EM 5 (1967)
- 久保慶三郎、吉田 裕: 任意形状の平板曲げの数値解析法; 土木学会論文報告集, 第 167 号 (1969)
- Y. Yoshida: Discrete Triangular Approximation of Moment and Displacement Surfaces for Plate Bending Analysis; Paper Presented at Japan-U. S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo (1969)
- 杉原健児: 不等距離差分法による応力解析; 建築学会論文報告集, 第 147 号 (1968), 第 158 号, 第 159 号 (1969)