

有限要素法研究の最近の動向

Recent Trends of Resaerches on the Finite Element Methods

川 井 忠 彦*

Tadahiko KAWAI

最近における有限要素法発展の動向を、著者の研究室において得られた二、三の研究成果と日米マトリックス構造解析セミナー、およびシンポジウムで受けた印象を中心に若干述べてみたいと思う

1. はし が き

わが国における有限要素法の研究も基礎固めの段階を脱脚し、複雑な実用上の問題や物理学、他の工学分野への応用研究が開こうとしている。また産業界のこの新技術に対する認識が急速に高まり、大形汎用構造解析プログラム開発の構想もようやく具体化の運びになってきた。このような最近における二、三の研究成果と日米マトリックス構造解析セミナーおよびシンポジウムで受けた印象を中心に述べてみたいと思う。

昨年5月の本誌“最近の数値計算特集—とくに力学と設計の関連において—”に“有限要素法の現状とその将来”と題する拙文を載せていただいてから約1年半を経過したわけであるが、爆発的な発展を続けている新分野であるだけに結構話題となる材料が集積され、その選択にとまどう位である。この1年半の間に著者の研究室においては三つの研究プロジェクトが並行して行なわれた。第一の研究課題は薄肉開断面材により構成された立体骨組構造の振動および座屈問題解析プログラムの開発、第二の研究課題は平板の幾何学的非線形問題の一般的解析プログラム、最後の研究課題は殻構造における応力集中問題の解析法の研究である。第一の研究プロジェクトについては紙面の都合で別の機会に述べることにし、第二、第三の研究成果について、その概要を述べることにする。

2. 平板の幾何学的非線形問題の解析

弾性平板の横荷重による大撓み、座屈後の安定性、初期撓みを有する平板の飛移り問題等は平板の大変形によって生ずる幾何学的非線形問題 (geometrical nonlinear problems) と呼ばれている。

これら一連の問題は T. von Kármán が有名な基礎方程式を導いて以来、数多くの優れた論文が発表され、その理論的基礎は固まったといっても過言ではない¹⁾⁴⁾。

しかしながらこれまでの研究のほとんどが解析しやすい形状の平板 (たとえば矩形板や円板など) で簡単な荷

重条件と境界条件下の問題に集中しており、また解析が複雑なため、静変形、熱応力、座屈、飛移り、非線形振動と個々別々に取扱われてきており、統一的な理論的考察はなされていなかった。さて、数多く提案されているエネルギー解法の中で K. Marguerre, E. Trefftz らの提案した方法が最も優れていると著者は思っているが²⁾、高速電子計算機の存在しなかった時代にはこの方法の適当範囲にもおのづから限界があったのである。

特にその解法の中で仮定した平板の撓みに適合する面内応力場を決定する問題を解析的にも近似的にも精度よく求めることがきわめて難しいのである。ところが変位法による二次元応力場の解析プログラムは骨組構造解析用の FRAN と同程度に開発が進展し普及しており、前述の問題はいわゆる初期歪問題 (initial strain problem) としてその解析法は既に標準化されている。又変位法による平板の曲げ解析は最も良く使われる三角形平板要素の剛性マトリックスで実用的なものが容易に求められないため、やゝ信頼性にかける面があるが、Rayleigh-Ritz の方法による平板の曲げ問題の解析法は完成していると考えられる。

以上のような考察から著者は形状、荷重分布、境界条件が任意に与えられる平板の各種幾何学的非線形問題の実用的解析法として平面応力分布は変位法、曲げ変形に対しては Rayleigh-Ritz の方法を組合せた一つの解析法を提案した。この方法は本質的には Marguerre および Trefftz らの方法と同じであるということができよう。

まずよく知られた Kirchhoff-Love の仮定を導入して平板の変位関数 (U, V, W) をつぎのように定義する。

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ V(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ W(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

こゝに (u, v, w) は板の中央面の変位を表わす。

(2.1)式より、つぎのような歪-変位の関係式が得られる。

* 東京大学生産技術研究所 第2部

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ 2e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (2.2)$$

この (2.2) 式を次式に代入、整理すれば平板の歪エネルギー式が求められる。

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{E}{(1-\nu^2)} [(e_{xx} + e_{yy})^2 + 2(1-\nu)(e_{xy}^2 - e_{xx}e_{yy})] dx dy dz \quad (2.3)$$

すなわち

$$U = U_m + U_b \quad (2.4)$$

$$U_m = \frac{1}{2} \iint \frac{Eh}{(1-\nu^2)} [(e_{xx_0} + e_{yy_0})^2 + 2(1-\nu)(e_{xy_0}^2 - e_{xx_0}e_{yy_0})] dx dy \quad (2.5)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \iint D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} \right] dx dy \quad (2.6)$$

こゝに h は板厚、 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ で板の曲げ剛性を表わす。

また

$$\left. \begin{aligned} e_{xx_0} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad e_{yy_0} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ 2e_{xy_0} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (2.7)$$

である。 U_m は板の中央面の伸びに基づく膜応力歪エネルギー (membrane strain energy), U_b は板の曲げの歪エネルギー (bending strain energy) を表わしている。平板が面内力 (X, Y) を境界周辺上で又横荷重 q を平板の面内に受けて変形すると仮定しよう。

その時外力系のなす仮想仕事は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta W &= \delta W_p + \delta W_b \\ \delta W_p &= \int_C (X \delta u + Y \delta v) ds \\ \delta W_b &= \iint q \delta w dx dy \end{aligned} \right\} (2.8)$$

したがって、平板の平衡状態を支配する仮想仕事方程式は次式で与えられることになる。

$$\delta(U_m + V_b - W_p - W_b) = 0 \quad (u, v, w) \quad (2.9)$$

こゝに () 内は変分をとるべき変数を示している。

(2.9) 式の変分方程式が満足する変位 u, v, w の解を一遍に求めることは困難であるのでつぎに述べるような方法で近似解を求めて行く。

(1) 第一段階 線形解 (u^0, v^0, w^0) の解析

まず第一段階として変形が微小であるとすれば (2.9)

式はつぎの二つの仮想仕事方程式に分れる。

$$\delta(V_p - W_p) = 0 \quad (u, v) \quad (2.10)$$

$$\delta(V_b - W_b) = 0 \quad (w) \quad (2.11)$$

こゝに V_p は膜応力歪エネルギー U_m において $w=0$ とした場合、すなわち平板の面内変形による歪エネルギーを表わしている。

さて (2.10) 式は平板の微小面内変形、(2.11) 式は微小撓み変形を支配する基礎変分方程式で、前者は変位法、後者は Rayleigh-Ritz の方法により実用解を容易に求めることができる。これらの解をそれぞれ (u^0, v^0) および w^0 とする。

(2) 第二段階 平板の大撓み w による付加面内変位 (u^*, v^*) の解析

平板の撓みが大きくなると、もはや (u, v) とは互に独立ではなくなり、撓み w によって面内変位 (u, v) が影響をうけることになる。この w による付加面内変位を (u^*, v^*) とすると

$$u = u^0 + u^*, \quad v = v^0 + v^* \quad (2.12)$$

が全体の面内変位を表わす。今 (u, v, w^0) を (2.9) 式に代入すれば容易に

$$\delta(U_m - W_p) = 0 \quad (u, v) \quad (2.13)$$

であることがわかる。いま (2.12) 式を (2.13) 式に代入し (2.10) 式を参考にしながら整理していくと結局つぎの式が得られる。

$$\delta U_m^* = 0 \quad (u^*, v^*) \quad (2.14)$$

こゝで U_m^* は (2.7) 式、したがって (2.5) 式中に現れる (u, v) をそれぞれ (u^*, v^*) とした場合の膜応力歪エネルギーを表わしている。

すなわち

$$\begin{aligned} U_m^* &= \iint \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left[\left\{ \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} - \varepsilon_x^{(0)} \right) + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y} - \varepsilon_y^{(0)} \right) \right\}^2 \right. \\ &\quad + 2(1-\nu) \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} - \gamma_{xy}^{(0)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} - \varepsilon_x^{(0)} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial y} - \varepsilon_y^{(0)} \right) \right\} \right] dx dy \quad (2.15) \end{aligned}$$

こゝに

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y^{(0)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^0}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy}^{(0)} &= -\left(\frac{\partial w^0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w^0}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (2.16)$$

と書き直せば (2.14) 式は (2.16) 式で与えられる初期歪分布によって生ずる線形平面応力場を決定する方程式にほかならないことがわかる。したがって (2.16) 式の初期歪分布が数値的に与えられれば、再び変位法による二次元応力場解析用の計算プログラムを用いて容易に変位分布 (u^*, v^*) が決定されることになる。

(3) 第三段階 未定係数 c_i の導入とそのエネルギー原理による極値化

前の段階の解析において w^0 と (u^*, v^*) の量的な問題

には触れなかったが、今 w^0 に未定係数 c_1 を掛けてやると、それに適合すべき面内変位は $(c_1^2 u^*, c_1^2 v^*)$ であることは (2.16) 式から容易にわかるであろう。すなわち (2.9) 式を満足すべき近似解をして

$$\left. \begin{aligned} u &= u^0 + c_1^2 u^*, \quad v = v^0 + c_1^2 v^* \\ w &= c_1 w^0 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

が仮定されたことになる。したがって残された問題は、(2.17) 式を (2.9) 式に代入して得られる系の全ポテンシャルエネルギー Π を

$$\Pi = U_m + V_b - W_p - W_b \quad (2.18)$$

とおいて、それを c_1 に関して極値化することである。すなわち

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = 0 \quad (2.19)$$

ところが Π は一般に c_1 の 4 次式で与えられるから (2.19) 式は c_1 に関する 3 次方程式となるのでそれを解いて実根を求め

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial c_1^2} \cong 0 \quad (2.20)$$

を調べれば平衡点の安定 $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial c_1^2} > 0\right)$ 、中立 $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial c_1^2} = 0\right)$ 、

不安定 $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial c_1^2} < 0\right)$ を論ずることができる。

さて以上の方法で求められた近似解は、注意深く計算すればかなり広い範囲にわたって良い精度の変形や応力分布を与えるであろうが、外荷重が大きくなるにつれて次第に精度が悪くなって行く。そのような場合には平板の撓み変形の自由度をふやして以下のような方法で解析を進めてやればよい。

いま平板の撓み w が未定係数を含んだつぎのような級数の形で表わせたと仮定する。

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n(x, y) \quad (2.21)$$

ここに c_n は未定係数である。 $w_n(x, y)$ は少なくとも与えられた幾何学的境界条件を満足する関数列で、少ない項数で実際の撓み形が十分近似できるものでなければならない。まず初項 w^0 は静変形問題においては線形曲げ問題の解を、安定問題の場合には座屈波形、振動問題に関しては基本振動モードを選べばよい。さらに高次の関数列は一般に安定問題には座屈固有波形、その他の場合には振動固有関数をとることが望ましい。これらの固有関数列は Rayleigh-Ritz の方法により精度よく組立てることができる。

(2.21) 式に対応する初期歪分布はつぎのように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_j}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_y^{(0)} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \left(\frac{\partial w_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_j}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

$$\left. \gamma_{xy}^{(0)} = -\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_j}{\partial y} \right) \right\}$$

そこで

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xij}^{(0)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_j}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{yij}^{(0)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_j}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xyij}^{(0)} &= -\left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_j}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

とおき、初期歪分布 $(\varepsilon_{xij}^{(0)}, \varepsilon_{yij}^{(0)}, \gamma_{xyij}^{(0)})$ に対する面内変位の解を $u_{ij}(x, y)$ 、 $v_{ij}(x, y)$ とすると (2.14) 式に対す解は

$$\left. \begin{aligned} u^*(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j u_{ij}(x, y) \\ v^*(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j v_{ij}(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

と決定される。したがって平板の変位 (u, v, w) は一般に次式のごとく表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u^0(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j u_{ij}(x, y) \\ v(x, y) &= v^0(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j v_{ij}(x, y) \\ w(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i w_i(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

ここに (u^0, v^0) は平板の面内変位の線形解である。

さて (2.25) 式を (2.9) 式に代入すれば次式のごとき c_n に関する連立 3 次方程式が得られるから、それを数値的に解くことによって c_n が決定し、(2.25) 式に代入して変位 (u, v, w) が近似的に決定されることになる。

$$\frac{\partial}{\partial c_n} (U_m + V_b - W_p - W_b) = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.26)$$

以上に述べた方法を平板が初期歪分布や温度分布あるいは初期撓みを有する場合の問題へ拡張することは容易である。また運動のエネルギー T を考慮することにより平板の非線形振動問題も解くことができる。

以上の解析法の実用性を検討するため、周辺単純支持または固定された正方形板について次のような 3 種類の問題を第 1 近似より第 3 近似まで解析してみた。

- (a) 一様分布荷重による大撓み
- (b) 初期撓みを有する平板の圧縮による変形
- (c) 一様分布荷重を受ける浅い曲面板の飛び移り

その結果をそれぞれ図 1~3 に示してある。この場合 $w_n(x, y)$ としては周辺条件のみを満たす Fourier 級数解を用いたが、すべての問題において第一近似解が非常に高い精度をもっていることを十分実証することができた。この方法はまだ問題点の多い殻の座屈、大変形非線形振動問題の解析にも偉力を発揮し得るものと著者は信

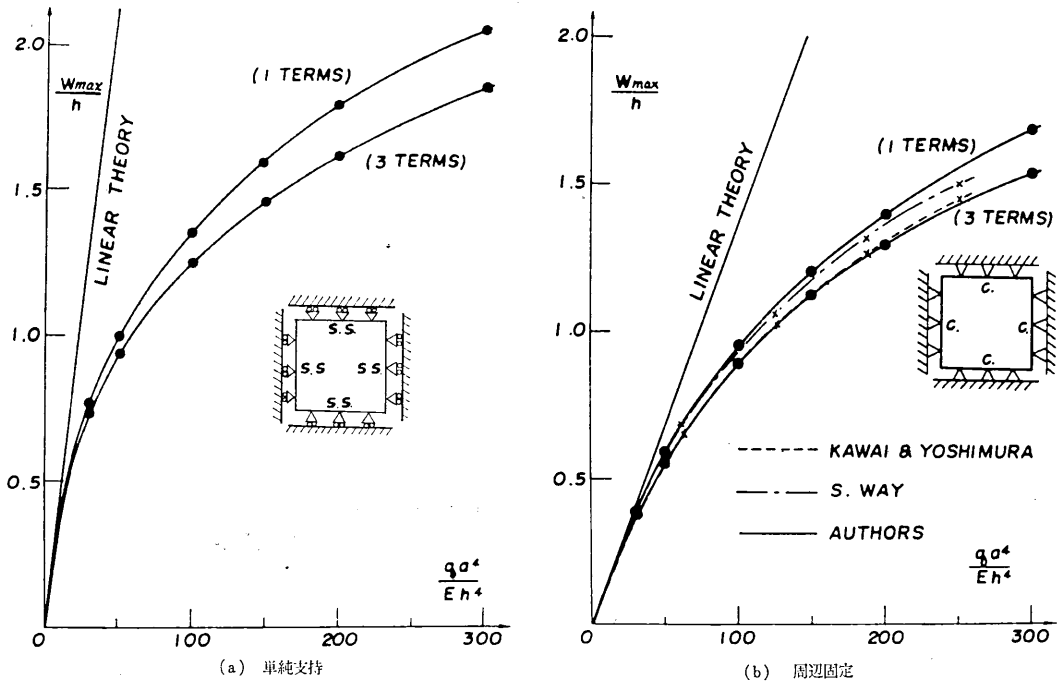


図 1 一様分布荷重を受ける q 正方形板の大撓み

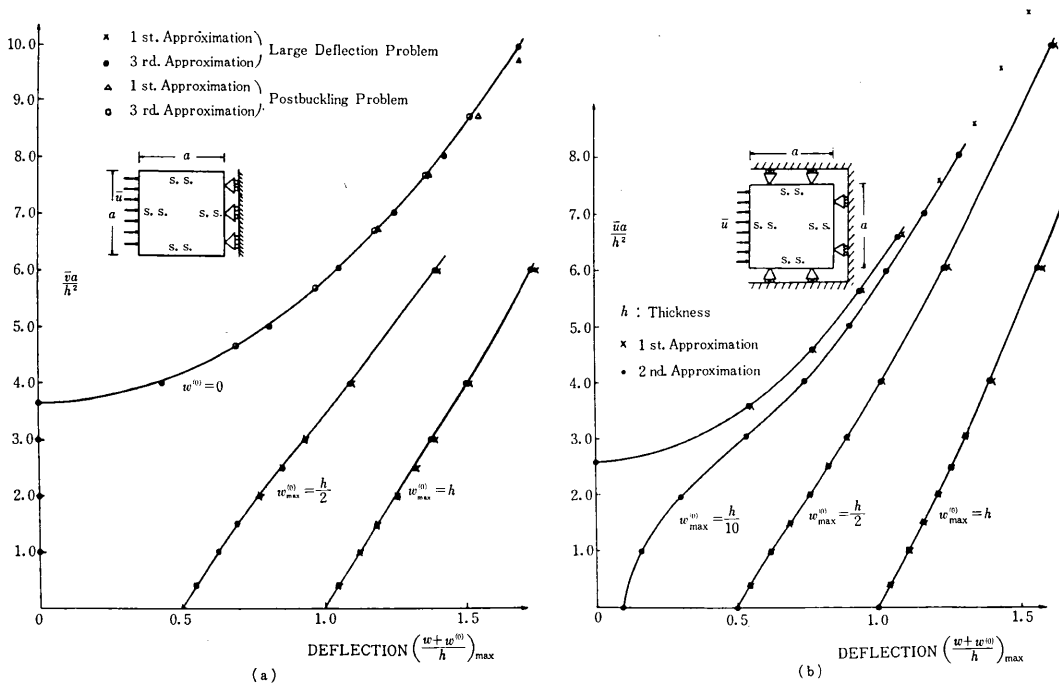


図 2 初期撓みを有する正方形板の座屈曲げ

じている⁵⁾⁶⁾。

3. 有孔円筒殻の応力集中問題の解析

最近、原子力工業、宇宙開発、海洋開発の進展に伴って殻構造が、各種圧力容器、ロケット、建築ドーム等広

い産業分野でますます重要視されるようになり、殻構造力学はめざましい進歩を遂げつつあるが、問題は依然として山積している。現在の殻理論に立脚して有限要素を考え、その剛性マトリックスを導く場合に問題点があることをまず認識していただきたい。こゝでは従来の工学

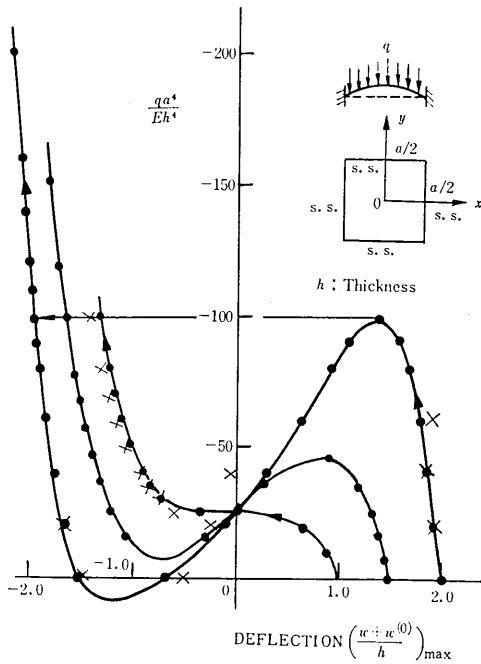


図1 一様分布荷重を受ける正方形曲面板の飛移り問題 (Snap-through problem)

的理論に立脚した変位法による殻構造解析法について概説し有孔円筒殻の応力集中問題に応用した実例について簡単に述べてみよう。よく知られた殻の工学的理論はほとんど大部分のものが有名な Kirchhoff-Love の仮定をその出発点としている¹⁾⁷⁾⁸⁾。今殻曲面の中央面に引かれた主曲率線の方向に直交曲線座標 α, β をとりそれと右手系をなす様板厚方向に ζ 座標をとると殻の任意点の変位 $(U(\alpha, \beta, \zeta), V(\alpha, \beta, \zeta), W(\alpha, \beta, \zeta))$ は Kirchhoff-Love の仮定に立脚するとつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U(\alpha, \beta, \zeta) &= u(\alpha, \beta) \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) - \frac{\zeta}{A} \frac{\partial w(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \\ V(\alpha, \beta, \zeta) &= v(\alpha, \beta) \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right) - \frac{\zeta}{B} \frac{\partial w(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \\ W(\alpha, \beta, \zeta) &= w(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

こゝに $(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta), w(\alpha, \beta))$ は中央面上の一点 $(\alpha, \beta, 0)$ における変位を表わし、曲線上の線素を ds とすると、 $ds^2 = A(d\alpha)^2 + B(d\beta)^2$ (曲面の第一次基本量)、 R_α, R_β は α, β 曲線方向の曲面の主曲率半径を表わしている。これらの変位関数から線形の歪成分 $(\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta, \epsilon_\zeta, \gamma_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha\zeta}, \gamma_{\beta\zeta})$ を導くと次式のごとく与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{V}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{W}{R_\alpha} \right) \\ \epsilon_\beta &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{U}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{W}{R_\beta} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)} \left\{ \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) \left(\frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{V}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right) \left(\frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{U}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right\} \\ \epsilon_\zeta &= 0, \gamma_{\alpha\zeta} = 0, \gamma_{\beta\zeta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

すなわち、Kirchhoff-Love の仮定に立脚した殻の線形理論では板厚方向の直歪 $\epsilon_\zeta = 0$ 、剪断歪 $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha} = 0$ の歪分布状態になることがわかる。材料を等方性の弾性体と仮定すればつぎのような応力-歪の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_\alpha + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon \right) & \tau_{\alpha\beta} &= G \gamma_{\alpha\beta} \\ \sigma_\beta &= \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_\beta + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon \right) & \tau_{\alpha\zeta} &= \tau_{\beta\zeta} = 0 \\ \sigma_\zeta &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon & \epsilon &= \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

ところが従来の工学的理論では、さらに $\sigma_\zeta = 0$ と仮定して応力分布を二次元化している。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_\alpha + \nu \epsilon_\beta) \\ \sigma_\beta &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\nu \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta) & \sigma_\zeta &= \tau_{\alpha\zeta} = \tau_{\beta\zeta} = 0 \\ \tau_{\alpha\beta} &= G \gamma_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

こゝに従来の工学的理論には一つの大きな飛躍があることがわかるであろう。さて (3.4) 式を容認すれば、殻の有する歪エネルギー V は次式のごとく与えられる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \iiint (\sigma_\alpha \epsilon_\alpha + \sigma_\beta \epsilon_\beta + \tau_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}) \\ &\quad \times AB \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right) d\alpha d\beta d\zeta \end{aligned} \quad (3.5)$$

また物体力 $\mathbf{p}(\alpha, \beta, \zeta)$ 、表面力 $\mathbf{F}(\alpha, \beta, \zeta)$ のなす仮想仕事 δW_{ex} は次式のごとく与えられる。

$$\begin{aligned} \delta W_{ex} &= \iiint \left\{ p_\alpha(\alpha, \beta, \zeta) \delta U + p_\beta(\alpha, \beta, \zeta) \delta V \right. \\ &\quad \left. + p_\zeta(\alpha, \beta, \zeta) \delta W \right\} AB \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right) d\alpha d\beta d\zeta \\ &\quad + \iint \left\{ f_\alpha(\alpha, \beta, \zeta) \delta U + f_\beta(\alpha, \beta, \zeta) \delta V \right. \\ &\quad \left. + f_\zeta(\alpha, \beta, \zeta) \delta W \right\} dS \end{aligned} \quad (3.6)$$

こゝに $(p_\alpha, p_\beta, p_\zeta), (f_\alpha, f_\beta, f_\zeta)$ は物体力、表面力の α, β, ζ 方向の成分をそれぞれ示している。

(3.5) 式と (3.6) 式を仮想仕事の式 $\delta V - \delta W = 0$ に代入し、GauB の定理を用いて方程式を変換して行くと、殻の基礎平衡方程式と境界条件が求められるわけであるが、その誘導の過程で種々の省略を行なわないと基礎方程式が見やすい形で求められない。こゝで最も普通に用いられる省略は殻の板厚が薄いとして $\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) \doteq 1, \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right) \doteq 1$ とおくことである。したがって歪-変位の関

係式(3.2)式は次式のごとく簡単化される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \varepsilon_{\alpha_0} - \zeta \kappa_\alpha \\ \varepsilon_\beta &= \varepsilon_{\beta_0} - \zeta \kappa_\beta \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta_0} - 2\zeta \kappa_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

こゝに

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha_0} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{R_\alpha} \\ \varepsilon_{\beta_0} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\nu}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{w}{R_\beta} \\ \gamma_{\alpha\beta_0} &= \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\nu}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \\ \kappa_\alpha &= \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \\ \kappa_\beta &= \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \\ 2\kappa_{\alpha\beta} &= \frac{2}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \\ &\quad - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

したがって殻の歪エネルギー V の式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} V &= V_m + V_b \\ V_m &= \iint \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ (\varepsilon_{\alpha_0} + \varepsilon_{\beta_0})^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\gamma_{\alpha\beta_0}}{4} - \varepsilon_{\alpha_0} \varepsilon_{\beta_0} \right) \right\} AB d\alpha d\beta \\ V_b &= \iint \frac{D}{2} \left\{ (\kappa_\alpha + \kappa_\beta)^2 + 2(1-\nu) (\kappa_{\alpha\beta}^2 \right. \\ &\quad \left. - \kappa_\alpha \kappa_\beta) \right\} AB d\alpha d\beta \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

こゝに、 V_m は平板の場合と同様膜応力による歪エネルギー、 V_b は曲げ応力による歪エネルギーであることはいふ

こゝに

$$[B] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{A} & 0 & \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} & \frac{\alpha}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} & \frac{\beta}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} & -\frac{1}{R_\alpha} & -\frac{\alpha}{R_\alpha} & -\frac{\beta}{R_\alpha} \\ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & \frac{\alpha}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & \frac{\beta}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & 0 & 0 & \frac{1}{B} & -\frac{1}{R_\beta} & -\frac{\alpha}{R_\beta} & -\frac{\beta}{R_\beta} \\ -\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} & -\frac{\alpha}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} & \frac{1}{B} \left(1 - \frac{\beta}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) & -\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & \frac{1}{A} \left(1 - \frac{\alpha}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) & -\frac{\beta}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$[D] = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$[A^{-1}] = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

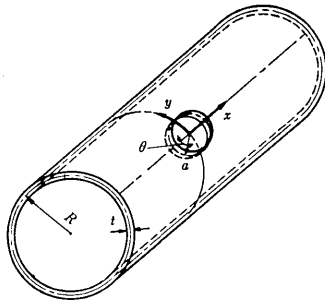
$$[a] = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 & \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 & \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_2 \\ \beta_2 - \beta_3 & \beta_3 - \beta_1 & \beta_1 - \beta_2 \\ \alpha_3 - \alpha_2 & \alpha_1 - \alpha_3 & \alpha_2 - \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

ノまでもないであろう。 h は板厚、 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ は板の曲げ剛性を表わしている。(3.9)式を見ればわかるように $\varepsilon_{\alpha_0}, \varepsilon_{\beta_0}$ に板厚方向の撓み w が関係しており、殻においては変形が微小であっても膜応力状態と曲げ応力状態とは、一般に独立ではあり得ないことがわかるであろう。さて(3.10)式で与えられる歪エネルギー式を用いて殻構造要素の剛性マトリックスを一般的に求めることができるわけであるが、平板の場合でよく知られているように、三角形曲面要素に対しては相隣る要素間の変位の連続性を保証し得る変位関数が容易に求められず、実用上の面でまだ十分とはいえないのが現状である。しかしながら薄い殻の応力解析においては境界や開口部の近傍などを除いて、まず膜応力分布を求めることが重要であることはよく知られている。殻の膜応力解析に対しては平板の面内応力解析の場合に実用性が確立されている線形変位関数を拡張使用することにより、高精度の剛性マトリックスを求めることができる。すなわち中央面の変位関数をつぎのようにおく。

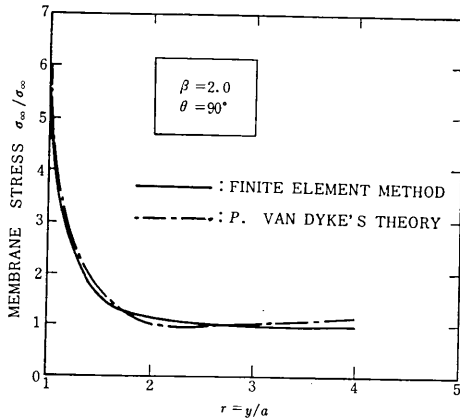
$$\left. \begin{aligned} u(\alpha, \beta) &= a_1 + a_2 \alpha + a_3 \beta \\ v(\alpha, \beta) &= b_1 + b_2 \alpha + b_3 \beta \\ w(\alpha, \beta) &= c_1 + c_2 \alpha + c_3 \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

この変位関数を用いて(3.9)式より膜応力状態に対する歪成分 $(\varepsilon_{\alpha_0}, \varepsilon_{\beta_0}, \gamma_{\alpha\beta_0})$ を求め(3.10)式より V_m が一般化座標 $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3)$ の関数、したがって節点変位 $(u_i, v_i, w_i) (i=1, 2, 3)$ の関数として表わされる。すなわちつぎのような剛性マトリックスが求められる。

$$\left. \begin{aligned} K &= [A^{-1}]^T [\bar{K}] [A^{-1}] \\ [\bar{K}] &= \iint [B]^T [D] [B] AB d\alpha d\beta \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$



(a) 使用座標系



(b) 円周応力分布

図 4 一様な引張りを受ける有孔直円筒殻の膜応力分布

図 4 は引張り荷重を受ける有孔円筒殻内の円周方向の膜応力分布を示す。本解析結果と P. Van Dyke の解析解と良く一致しているのがわかるであろう⁹⁾。

曲げ変形を考慮した殻有限要素としては矩形平板曲げ要素に対して Greene, Bogner らの提案した変位関数を拡張して曲面矩形板の剛性マトリックスを求める¹⁰⁾ (図 5)。この場合の変位関数としては Hermite の多項式を用いて次式のごとく表わす。

$$\left. \begin{aligned}
 u(\xi, \eta) &= u_1(1-\xi) + u_2\xi(1-\eta) + u_3\xi\eta \\
 &\quad + u_4(1-\xi)\eta \\
 v(\xi, \eta) &= v_1(1-\xi)(1-\eta) + v_2\xi(1-\eta) + v_3\xi\eta \\
 &\quad + v_4(1-\xi)\eta \\
 w(\xi, \eta) &= w_1\varphi_1(\xi)\varphi_1(\eta) + a\theta_{\alpha 1}\varphi_3(\xi)\varphi_1(\eta) \\
 &\quad + b\theta_{\beta 1}\varphi_1(\xi)\varphi_3(\eta) + w_2\varphi_2(\xi)\varphi_1(\eta) \\
 &\quad + a\theta_{\alpha 2}\varphi_4(\xi)\varphi_1(\eta) + b\theta_{\beta 2}\varphi_2(\xi)\varphi_3(\eta) \\
 &\quad + w_3\varphi_2(\xi)\varphi_2(\eta) + a\theta_{\alpha 3}\varphi_4(\xi)\varphi_2(\eta) \\
 &\quad + b\theta_{\beta 3}\varphi_2(\xi)\varphi_4(\eta) + w_4\varphi_1(\xi)\varphi_2(\eta) \\
 &\quad + a\theta_{\alpha 4}\varphi_3(\xi)\varphi_2(\eta) + b\theta_{\beta 4}\varphi_1(\xi)\varphi_4(\eta)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

こゝに

$$\xi = \frac{\alpha}{a}, \quad \eta = \frac{\beta}{b}$$

a, b はそれぞれ矩形要素の辺の長さを表わしている。

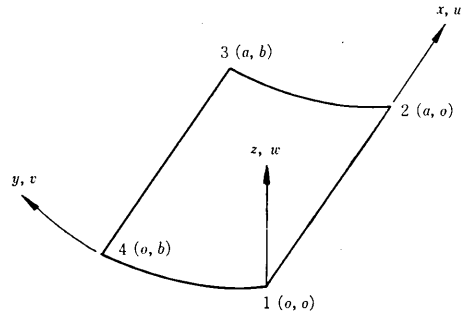


図 5 矩形同筒殻有限要素の座標系

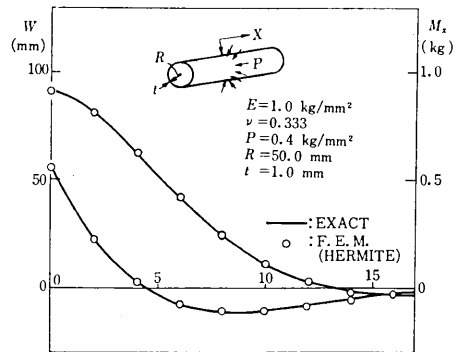
また $u_i = u(\alpha_i, \beta_i)$, $v_i = v(\alpha_i, \beta_i)$, $w_i = w(\alpha_i, \beta_i)$,

$$\theta_{\alpha i} = \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}(\alpha_i, \beta_i), \quad \theta_{\beta i} = \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}(\alpha_i, \beta_i) \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

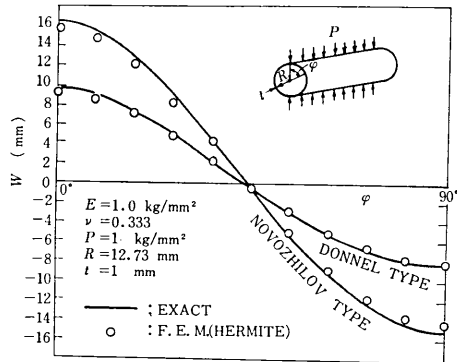
$\varphi_\kappa(s)$ ($\kappa=1, 2, 3, 4$) は次式で与えられる Hermite の多項式である。

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_1(s) &= 1 - 3s^2 + 2s^3, \quad \varphi_2(s) = 3s^2 - 2s^3 \\
 \varphi_3(s) &= s - 2s^2 + s^3, \quad \varphi_4(s) = -s^2 + s^3
 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

(3.17) 式を (3.9) 式に代入して歪成分 ($\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta, \gamma_{\alpha\beta}$) が求められれば (3.10) 式より殻の有する歪エネルギー V が前と同様節点変位 ($u_i, v_i, w_i, \theta_{\alpha i}, \theta_{\beta i}$) ($i=1, 2, 3, 4$) の 2 次関数として求められ、したがって剛性マトリックスも陽に求めることができる。しかし計算が相当煩雑になるので実際の計算は電子計算機の中で行なうのが普通で



(a) 円周上に分布する線荷重を受ける場合



(b) 軸方向に分布する線荷重を受ける場合

図 6 線形荷重を受ける円筒殻の曲げ変形

ある。

数値計算例として、円周上又は軸方向に一様線荷重を受ける円筒殻の変形および応力分布を計算した結果を図 6 に示す。この場合 Timoshenko および Krieger の本に載っている厳密解をきわめて良好な一致を示しているのがわかるであろう¹¹⁾。

著者の研究室ではこの矩形要素を使って矩形孔を有する円筒殻の引張荷重による開口部付近の応力分布を解析、実験結果と比較し、良好な一致を見ているが、開口部近傍の応力分布を精密に求めるためには二次元的な殻理論では不十分となり、どうしても三次元的な有限要素解析が必要となる。この線に沿った開口部近傍の応力集中状態の解析も現在進行中である¹¹⁾¹²⁾。

4. 日米セミナーおよびシンポジウムの印象

日米セミナーとシンポジウムを終えて筆者が感じた印象を要約して述べるならば、日本において有限要素法はわずか数年の間に驚異的な速度で工業界のほとんどあらゆる分野に普及浸透し、その学問的水準も世界の指導的立場にあるアメリカのそれに比べて劣らない所まで来たという自信が得られたことである。しかしながらそれと同時に実用化、すなわち汎用プログラム開発の面では全く比較にならない程遅れていることを痛感せざるを得なかった。これはスタートにおいて 10 年以上の開きのあったことを考えれば当然のことで、むしろその進歩の速さに驚くのであるが、著者はわが国における有限要素法による構造解析の技術開発が本格的な軌道に乗り、大形汎用計算プログラム開発計画を検討すべき段階に入ったことを痛感する次第である。汎用プログラム開発については後で再び触れることとして、日米セミナーにおいて感じた有限要素法研究の動向について若干述べてみることにしよう。基礎理論における研究では変位法を中心とした体制がほとんど確立され、応力法の組織化に先駆的業績をあげた J. H. Argyris 教授の率いるグループですら最近ではもっぱら研究の重点を変位法においているようである。

しかしながら、平板や殻構造解析において変位の適合条件を完全に満足する変位関数が容易に求められないので問題点は依然として残っており、特に、この問題は殻構造解析において重要である。コーネル大学の R. H. Gallagher 教授はこの点に関し応力関数を未知関数とした殻構造の解析法の将来性を示唆しているのは印象的であった¹⁵⁾。その他マックドネルダグラス社の P. Denke 博士やロッキード社の J. Robinson 博士らのたゆまざる応力法の研究は注目すべきものと思われる。著者もマトリックス構造解析法の中心は変位法であることに異論を唱えるものでないが、日本におけるマトリックス法の健全な発展を期待するには、応力法や最近板殻構造の解

析で特に注目され始めたハイブリット法 (hybrid method) あるいは混合法 (mixed formulation) にこれから注目すべきであると思っている。特に板殻構造の曲げ変形を含む問題の解析においては現在の変位法では計算機の容量と解の収束性の点で問題点が多々存在する。計算機の大形化、高速化は今後急ピッチで進展すると思われるが、それと同時に、構造解析の精密化に対する要求は今後ますます増大することも必至であり、常に構造解析の技術者はこの問題に悩まされ続けることになる。この点において、L. R. Herrmann や T. H. H. Pian らの提唱する混合法に大きな将来の発展が期待できるであろう¹³⁾¹⁴⁾¹⁶⁾。

筆者は殻構造の振動や座屈問題、さらに進んで弾塑性変形や大変形を伴った非線形問題のこの方法による解析に近い将来研究の焦点が向けられてくるものと思っている。

有限要素法がわずか 20 年近くの間には構造解析の最も実用的方法として地位を築くに至った大きな原因の一つは非線形問題を本格的に取扱いうる可能性が見い出されたことであると思う。1940 年に T. von Kármán がアメリカの数学会誌に有名な論文を発表し、“これからの技術者は非線形問題と取組まねばならない”と示唆して以来、二十余年の歳月を経てようやく非線形力学の諸問題に対する本格的研究が始まろうとしている。一般に固体力学における非線形問題には歪成分の有限性と応力-歪関係の非線形性によってつぎのような四つの種類の問題が考えられる。

- (1) 微小変形問題 線形応力歪関係が成立し、歪が微小な場合の問題
- (2) 材料非線形問題 応力歪関係は非線形となるが歪成分は微小な問題
- (3) 有限変形問題 応力歪関係は線形であるが、歪成分が有限である問題
- (4) 高次非線形問題 応力歪関係も非線形であり、歪成分も有限となる一般的非線形問題

(1)の線形力学の問題を除いて、(2)、(3)、(4)をすべて総括して非線形問題と一般に呼ばれているが、現在までのところでは研究の重点が(2)および(3)に集中されて来たことは良く御承知の通りであると思う。(2)の問題については、山田教授の優れた論文が寄せられているし、また(3)の問題についてその骨子を 2 章で説明したので簡単にその解析法の研究方向について触れておくことにする。

一般に、非線形問題解析の手法としては、(a)反復法(iteration method)、(b)荷重漸増法(load incremental method)の二種類の方法が存在することはよく知られている通りである。前者の方法は特に(3)の有限変形問題の場合などには適用しやすく、第 0 近似解として歪の非

線形項を無視した線形解を足場として、前の $(n-1)$ 段階で得られた解析結果より歪の非線形項に相当する附加節点力を求め、 $Ku_n = F - K(u_{n-1})$ なる形の剛性方程式の第 n 近似解を求める方法である。著者はかつてこの方法で矩形板の横荷重による大撓み問題を解析してその実用性を確認したが、収束解を求める方法に技巧が必要となる欠点がある⁵⁾。この方法を改善したのが 2 章で述べた方法で、近い将来般の大変形問題を解析してその実用性を検討したいと思っている。さて(3)のいわゆる大変形問題にも歪成分の取り方で近似度に種々の段階があり、弾性学で論じている有限変形理論は歪成分の非線形項として 2 次の微小量まで考慮した形になっているに過ぎないので、いわば第一次有限変形近似理論と呼ぶべきものであろう。

この辺のことを考慮してワシントン大学の B. J. Hartz 教授は高次の幾何学的非線形問題 (geometrically nonlinear problem) に一般的理論をエネルギー原理に立脚して展開しているのは注目に値しよう¹⁷⁾。

さて第二の方法である荷重漸増法は反復法に比較して一般性があり、また特に、材料非線形問題はこの方法の独壇場といえるであろう。弾塑性問題の解析にはブラウン大学の P. V. Marçal 教授を始めとする多くの先駆的研究があり、わが国では山田教授が、吉村、桜井両氏の協力を得て開発された独自のプログラムがあることは既に御承知の通りである。

この方法の利点は将来の問題として残されている有限変形と応力歪の非線形的関係を同時に考慮した高次非線形問題の解析に大きな希望が持てる点である。今回の日米セミナーにおいては P. V. Marçal 教授の論文がこの問題の荷重漸増法による解析法について最も積極的に取り組んでいるのが印象的であった¹⁸⁾。著者も一本の柱の塑性座屈や簡単な門型骨組の座屈崩壊の可能性も考慮した最終荷重追跡のプログラム開発の基礎的研究を行ない十分実用的な結果が得られる見通しが立ったので、目下柱の曲げ振り塑性座屈問題解析への拡張を検討中である¹⁹⁾。

工学上遭遇する非線形問題の大部分はこの第 4 の範疇に属するものであって、有限要素法の開発される以前にはほとんど解析が不可能であるとしてもばら実験的研究に頼っていたのであるが、最近になってようやくこの種の問題の解析が本格的に検討される所まで来たことを意味している。この種の問題の解析における難点は解の精度を保持しながら、いかにして荷重増分を決め、各荷重増分に対する変形の解析を行なうかにある。この場合参考となる局所座標系は荷重を増加するに従って移動し、有限要素の形状や応力状態も次第に変化するために、剛性マトリックスは各荷重段階でその時の局所座標系を用いて再計算しながら変形や応力分布の増分を求め、前段階の解に加えて現在の応力、変形状態を求めて行かねば

ならない。又、前の荷重状態における応力分布は初期応力として考慮しなければならぬので、不安定現象が起こる近傍 (例えば座屈や飛び移り現象など) では見掛けの剛性が急激に低下し、そのために著しい変位の増大が起きて精度の大幅な低下が生ずる恐れが出て来る。この問題をどう処理するかが今後高次非線形問題を解析する鍵となるであろう。

非線形問題についての話を閉めくゝるに当たって、今回の日米セミナーにおいて深い感銘を与えたのはハンツビルにあるアラバマ大の新鋭 J. T. Oden 教授の論文である¹⁹⁾。彼はこゝ数年の間にアメリカの構造力学界に彗星のごとく現われた人で、第 4 種の非線形問題を温度のを考慮し、不可逆過程の熱力学の立場から一般的に取扱い、熱的影響を考慮した構造問題 (熱衝撃、クリープ、粘弾性など) を有限要素法を用いて解析する場合の理論的基礎を確立した。その学問的基礎については既に幾多の碩学による先駆的研究がなされているのであるが、熱伝達の問題も関係する一般的な固体力学問題を有限要素法により解析する場合の基礎理論を定式化したところに彼の論文の重要な意義が存在するのであって、ごく最近まで構造解析にたずさわる人々の前途をはばんでいた高次非線形問題に真正面から取り組む勇気と希望を与えてくれたと著者は思っている。著者もたまたま全く同じような構想で非線形問題解析法の一般化について研究を始めようとしていた矢先であったので、大きなショックを受け、彼の最近の研究論文に注目して私はさらに驚いてしまったのである。Zienkiewicz 教授が示唆したように、有限要素法は構造解析の分野だけでなく、むしろ流体力学、熱伝達、電磁気学等他の工学、物理、化学等の分野に対する有力な数値解析法として近い将来脚光を浴びてくることは必至であると思っているが、Oden 教授は、この動向を決定づけるような大論文を既に発表している²⁴⁾。この論文は多次元の物理空間に拡がっている連続体の変形や運動を解析するために有限要素法の概念を拡張定式化したもので古典物理学から量子論までを含めた広い意味での数理学において有限要素法が将来その研究の主要な武器になり得ることを示唆したものであるということができよう。著者は数年前に出版されたソビエトの宇宙科学界を代表する Sedov 教授の“連続体非線形力学の基礎”²⁵⁾を見て、すっかり魅せられてしまい、将来有限要素法はこの分野においても、美しい花を咲かせるであろうと夢想していたが、弱冠 32 才の Oden 教授は Sedov 教授の業績を乗り越えて、大きな飛躍を成し遂げたのである。

今回の日米セミナーには、この Oden 教授の他に、非線形問題では、前に述べたブラウン大学の P. V. Marçal 教授、流体力学への応用に関しては MIT の Ping Tong 教授といづれも 32 才前後の若手研究者が

印象的な論文を発表しているが、中でも Oden 教授の業績は光って見えたのは私の個人的な印象であったであろうか。

いずれにしても、この会議で日本の学問的レベルが既にアメリカのそれと比較して遜色がないまでに発展したと述べたが、著者はアメリカにおける有限要素法の研究者の層が厚く、そのトップグループに一握りではあるがこの若手研究者がいて、有限要素法の将来の方向を決定づけるような先駆的研究をやっている事実注目したい。

現在のわが国ではこの新技術がかなり産業界や学界のすみずみまで浸透したといえる状態にまで至ったが、大学の工学部で基礎工学 (engineering science) の必須科目として取上げている所はまだきわめて少ないと思われる。

著者はアメリカと並んで、この分野でも世界をリードするためには、まづ後に続く若い人を大量に養成して、研究者の層を厚くすることが是非とも必要であると思っている。最近のめざましい有限要素法の発展で感ずることは、従来の構造解析あるいは設計の方式を全くくつがえすような革命的な破壊力に驚愕し、その発展のペースについて行けない人々はこれを無視しようとするか、あるいは敵視しようとしており、またある人々 (特に若い人々に多い) は有限要素法の魔力の虜になってその計算プログラムをうまく使って応力解析を行えばそれで事たりとするきらいがある。有限要素法の出現は構造工学界に現在大きな混乱をまき起こしているが、著者の考えをいわせていただくとすれば、このような混乱は、構造検討、改善を有限要素法が迫っているために生じたものと思っている。しかしながら有限要素法は既に今世紀の始めに確立された構造解析の手法を従来は計算尺やせいぜい電動計算機で小規模に行っていたのを、電子計算機の力を借りて一挙に大規模かつ組織的にしただけのものである。これによって従来構造設計者が持てる時間とエネルギーの大部分を費していた面倒な構造計算から開放され、設計者本来の仕事に精力を集中できるようになったのであるが、この手法が万能であると思込むのは有限要素法の本質を知らないからなのではなからうか。有限要素法は構造解析の一つの新しい手法であるが、これは結局、構造設計のための道具 (tool) に過ぎない。そして数値解析はどんなに精度が上がってもやはり数値解析であって、われわれはその数字を通してその背後にある物理的意味をしっかりと把握しなければいけないのである。この意味において基礎微分方程式を与えられた境界条件や初期条件の下で解く従来の解析的な正攻法はいかに時代が変ろうとも永遠にその存在意義は失われないものである。これらはあたかも車の両輪のごときのもので、一方が軽視されると車の正常な運行が阻害されるのであ

り、この二つの輪はエネルギー原理という車軸でしっかり連がっていることを忘れてはならないのである。

著者の経験によれば、有限要素法で新しい固体力学の問題を解析する手法を開発する場合最も解析者に要求されることは、その基礎となっているエネルギー原理に対する深い知識であり、したがって固体力学そのものに対する造詣の深さであると考えている。若い人が有限要素法を勉強しようとする場合、最も気をつけていただきたいのはこの点である。このような点に思いを致せば現在の混乱も容易に氷解するであろうし、構造解析や設計の方式や体制は電子計算機の導入によって大きく変化して行くであろうが、既存の構造解析の手法と有限要素法は調和を保ちつゝさらに発展を続けるであろうと著者は考えている。これは最近痛切に感じている事柄であったために思わず筆が走ってしまった。

最後に一言触れておきたいことは、超大型電子計算機システムとそれに用いられる汎用計算プログラムの開発についてである。既にアメリカには Apollo 計画の完遂を目差して宇宙船構造設計の合理化のために SAMIS, FORMAT II, NASTRAN 等数多くの巨大な構造解析用汎用プログラムが開発され、また ICES のごとき最適設計用プログラムも完成間近かといわれている。特に、Lockheed-Georgia では巨人輸送機の設計の一部にコンピュータグラフィックス (computer graphics) を十分とり入れたスケッチパッドシステム (sketch pad system) のテストを行なったと聞いている。

こゝに構造設計者にとって長年の夢であった構造解析および設計の自動化が有限要素法という新しい技術を足場に超大型高速電子計算機の力を借りて少しづつ実現の方向に向っていることは注目に値しよう。

ヨーロッパにおいても、J. H. Argyris 教授の所で開発された ASKA 汎用プログラムの船体構造設計への応用が検討され、Norske Veritas でもこれに類似した船体構造解析および設計プログラムが開発整備されつつあると聞いている。

このような構造設計の電子計算機による自動化は好むと好まざるとにかかわらず、全世界の産業界の動向であり、造船工業界を始めとしてわが国の構造工学界は、この世界的傾向に対処して何等かの方策を打ち出さなければならぬ時期に来ていることを痛感せざるを得ないのである。

今回の日米セミナーにおいて NASA ラングレーセンターの R. E. Fulton 博士のアメリカにおける構造解析に対する電子計算機利用の現状報告²⁰⁾やマクドナーダラム社の P. Denke 博士の自社における設計システムやコンピュータグラフィックス開発についての講演は誠に興味深いものがあつた²¹⁾。またノースアメリカン-ロックウエル社の H. Bergmann 博士の ASKA の構

成²²⁾, MIT 土木工学科の J. J. Connor 教授の STRUDL 開発の現状についての講演²³⁾はこれから大型汎用プログラム開発計画の検討を迫られているわれわれに多くの示唆を与えるものであったといえよう。

最後に平板の非線形問題, 殻構造の応力集中問題の研究はそれぞれ本学船舶工学科博士課程大学院学生大坪英臣君, 同原子力工学科博士課程大学院学生矢川元基君の協力によって行なわれたものであることを付記して, 両君に謝意を表わしたい。

また今回の日米セミナー開催を契機として, わが国における有限要素法の開発研究が大きく進展することを期待しながら欄筆する次第である。

(1969 年 11 月 10 日受理)

参考文献

- 1) S. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger: "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill Book Co. 1959
 - 2) K. Marguerre "Die mittragende Breite der gedrückten Platte" Lufo. 14 (1937)
 - 3) 吉識, 川井, その他: "平板の曲げ, 振動および座屈問題に対するエネルギー法の一般的適用法について(I)(II)(III)", 日本造船学会論文集第 117, 118, 123 号
 - 4) T. V. Kármán: "Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften" Vol. IV (1910)
 - 5) T. Kawai: "Finite Element Analysis of the Geometrically Nonlinear Problems" preprint of the Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, August 25-30, 1969, Tokyo, Japan
 - 6) 川井, 大坪: "平板の幾何学的非線形問題の一解法(I)" 日本造船学会論文集第 126 号 (昭和 44 年 11 月)
 - 7) K. Washizu: "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, N. Y. (1968)
 - 8) V. V. Novozhilov: "Thin Shell Theory", P Noordhoff (1964)
 - 9) P. V. Dyke, AIAA J., 3-9 (1965), 1733
 - 10) F. K. Bogner, R. L. Fox and L. A. Schmit, AIAA J., 5-4 (1967), 745
 - 11) T. Kawai: "Finite Element Analysis of Shell Structures in Japan", preprint of the Japan-U.S. Seminar on the Matrix Methods of Structural Analysis and Design, August 25-31, 1969, Tokyo Japan
 - 12) 日本鋼構造協会第 3 回大会研究集会マトリックス構造解析講演論文集 (昭和 44 年 5 月 30 日・31 日)
 - 13) L. R. Herrmann: "A Bending Analysis for Plates" Proc. Conf. on Matrix Methods in Struct., Mech., Air Force Inst. of Technology, Wright Patterson AFB, Oct. 1965
 - 14) L. R. Herrmann: "Finite-Element Bending Analysis for Plates," Proc. A. S. C. E., 93, EM. 5, 1967
- 以下に今回の日米セミナー, シンポジウムアメリカ側講演論文で引用しているものを一括して挙げておくことにする((15)から(23)まで)。
- 15) R.H. Gallagher: "The Status and Outlook for Finite Element Analysis"
 - 16) T. H. H. Pian: "Formulation of Finite Element Methods for Solid Continua."
 - 17) B. J. Hartz: "Finite Element Formulation of Geometrically Nonlinear Problems in Elasticity"
 - 18) P. V. Marçal: "Finite Element Analysis with Material Nonlinearities"
 - 19) J. T. Oden: "Finite Element Formulation of Problems of Finite Deformation and Irreversible Thermodynamics of Nonlinear Continua"
 - 20) R. E. Fulton: "The Growth of Computer Applications in Structural Engineering"
 - 21) P. Denke: "New Approaches to Aerospace Engineering Applications on Matrix Structural Analysis"
 - 22) H. Bergmann: "ASKA—a Large Scale Software System for Finite Element Analysis"
 - 23) A. J. Ferrente, R. D. Logcher and J. J. Connor: "The Solution of Finite Element Problems Using the STRUDL Language"
 - 24) J. T. Oden "A General Theory of Finite Elements" I. Topological Considerations, Vol. 1, No. 2
II. Applications, Vol. 1, No. 3
International Journal for Numerical Methods in Engineering (1969)
 - 25) L. I. Sedov: "Foundations of the Nonlinear Mechanics of Continua" Pergamon Press (1966)