UDC 629.113.001: 62-503

人間-自動車系の最適設計（第２報）

On the Problem of an Optimum Design of an Automobile as a Man-Machine System (Report 2)

安　部　正　人*

Masato ABE

1. ま え が き

第１報において，筆者は一般的な最適設計の定式化と，系のあるパラメータが必ずしも一定でなく，場合によって種々の値をとり得る場合の問題について述べた．ところで，これまでの議論において，人間は自動車とは全く独立に，ある決まった操作を行なうとして，系の中に組み込んだ場合についての最適化を論じてきた．

しかし，人間一機械系の，特徴の１つは，その系の中の人間が，機械と無関係にある決まった操作を行なうのではなく，その機械に自分の能力の範囲で適応して，操作を行なうということである．そこで，ここでは第１報で述べた定式化をさらに拡張して，

（1） 人間は，その機械の特性に適応して，ある目標値を Optimum にすべく，自分の操作のパラメーターを調整して運転する，とした場合の系の最適化の問題．

（2） 人間は，パラメーター調整だけでなく，ある目標値を Optimum にすべく，最適制御を行なうとした場合の系の最適化の問題，についての一般的な定式化，および，これに付随した問題について述べることにする．

2. 機械の特性に適応して，人間が，操作のパラメータを調整する場合

ここで取り扱う系が（1）で表わされるとする．

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{v}) \tag{1}$$

ここに $\boldsymbol{q}^*\equiv(q_1^*, q_2^*, \cdots, q_m^*)$ は人間の効果をしめすパラメーターで

$$J=\boldsymbol{F}_J\cdot[f_J(\boldsymbol{X})] \tag{2}$$

を Min または，Max にするベクトル量である．このような系について

$$I=\boldsymbol{F}_I[f_I(\boldsymbol{X})] \tag{3}$$

を Optimum にする $\boldsymbol{v}\equiv(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ を求める．

$\boldsymbol{v}$ についての制約条件として．（4）を考える．

$$g_i(\boldsymbol{v})\geqq 0(i=1,2,\cdots),\ \boldsymbol{G}_i[g_j'(\boldsymbol{X})]\geqq 0(j=1,2,\cdots) \tag{4}$$

ここに，$\boldsymbol{F}_J, \boldsymbol{F}_I, \boldsymbol{G}_j$ は，時間，その他に関するオペレーションである．この問題を第１報で述べた，線形計画による逐次近似で解くことを考える．

まず（4）を満足する任意の $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}_0$ とする．このときの $\boldsymbol{q}^*$ を $\boldsymbol{q}_0^*$ とする．つぎに，微小量 $\Delta\boldsymbol{v}$ をとり，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\Delta\boldsymbol{v}$ とする．ところで，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{q}^*$ の間には，ある関数関係があるが，その関係が，連続，微分可能と仮定し，$\Delta\boldsymbol{v}$ の変動に対して，$\boldsymbol{q}^*=\boldsymbol{q}_0^*+\Delta\boldsymbol{q}$ になるとする（$\Delta\boldsymbol{q}$ は微小）．この $\Delta\boldsymbol{q}$ は，（2）式の J を Min または，Max になるように決定されることになる．いま，（2）をさらに具体的な形で

$$J=\int_0^\infty (X_1-X_{1ss})^2\cdot dt \tag{2'}$$

とすれば，$\boldsymbol{q}^*$, $\boldsymbol{v}$ で最適である条件は

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{q}}\right)_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*}=2\int_0^\infty (X_1-X_{1ss})\cdot\frac{\partial X_1}{\partial \boldsymbol{q}}\cdot dt=0$$

$\Delta\boldsymbol{q}, \Delta\boldsymbol{v}$ が微小であるから上式を $\Delta\boldsymbol{v}$, $\Delta\boldsymbol{q}$ について，線形化する．

$$\frac{\partial J}{\partial q_i}=2\int_0^\infty\Big[\Big(X_1-X_{1ss}+\frac{\partial X_1}{\partial\boldsymbol{q}}\cdot\Delta\boldsymbol{q}+\frac{\partial X_1}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot\Delta\boldsymbol{v}\Big)\cdot\Big(\frac{\partial X_1}{\partial q_i}+\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\Big(\frac{\partial X_1}{\boldsymbol{v}q_i}\Big)\cdot\Delta\boldsymbol{q}+\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\Big(\frac{\partial X_1}{\partial\boldsymbol{q}_i}\Big)\cdot\Delta\boldsymbol{v}\Big]\cdot dt=0\quad(i=1,2,\cdots,m) \tag{5}$$

$\left(\dfrac{\partial J}{\partial q_i}\right)_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0^*,\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0}=0$ に注意して，$\Delta\boldsymbol{q}, \Delta\boldsymbol{v}$ の１次の項までとると，

$$\int_0^\infty\Big[\frac{\partial X_1}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial\boldsymbol{q}}+(X_1-X_{1ss})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\Big(\frac{\partial X_1}{\partial q_i}\Big)\Big]\cdot dt\cdot\Delta\boldsymbol{q}+\int_0^\infty\Big[\frac{\partial X_1}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial\boldsymbol{v}}+(X_1-X_{1ss})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\Big(\frac{\partial X_1}{\partial q_i}\Big)\Big]\times dt\cdot\Delta\boldsymbol{v}=0\quad(i=1,2,\cdots,m) \tag{6}$$

ただし，（6）を計算するには，$\boldsymbol{q}$ あるいは $\boldsymbol{v}$ についての（1）の，2 階の感度係数を計算する必要がある．

また，このような $\boldsymbol{v}$ に対して，I は

$$\begin{aligned}I(\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{v})&=I(\boldsymbol{v}_0+\Delta\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}_0^*+\Delta\boldsymbol{v})\\&\fallingdotseq I(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{q}_0^*)+\frac{\partial I}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot\Delta\boldsymbol{v}+\frac{\partial I}{\partial\boldsymbol{q}}\cdot\Delta\boldsymbol{q}\\&=I(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{q}_0^*)+\boldsymbol{F}_I\cdot\Big(\frac{\partial f_I}{\partial\boldsymbol{X}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\boldsymbol{v}}\Big)\cdot\Delta\boldsymbol{v}\\&\quad+\boldsymbol{F}_I\cdot\Big(\frac{\partial f_I}{\partial\boldsymbol{X}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\boldsymbol{q}}\Big)\cdot\Delta\boldsymbol{q}\end{aligned} \tag{7}$$

$\boldsymbol{v}$ についての制約条件も，$\Delta\boldsymbol{v}, \Delta\boldsymbol{q}$ について線形化して，

$$g_i(\boldsymbol{v}_0)+\frac{\partial g_i}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot\Delta\boldsymbol{v}\geqq 0 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{G}_j[g_i'\{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{q}_0^*)\}]+\boldsymbol{G}_j\cdot\Big(\frac{\partial g_j'}{\partial\boldsymbol{X}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\boldsymbol{v}}\Big)\cdot\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{G}_j\Big(\frac{\partial g_j'}{\partial\boldsymbol{X}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\boldsymbol{v}}\Big)\cdot\Delta\boldsymbol{q}\geqq 0 \tag{9}$$

* 東京大学生産技術研究所　第２部

研　究　速　報

$\Delta \boldsymbol{v}$ が微小であるから

$$-\delta \leqq \Delta v_i \leqq \delta \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{10}$$

ゆえに，設計変数を $\Delta \boldsymbol{v}, \Delta \boldsymbol{q}$ として評価関数を，

$$\boldsymbol{F}_I\left(\frac{\partial f_I}{\partial \boldsymbol{X}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{v}}\right)\cdot\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}_I\cdot\left(\frac{\partial f_I}{\partial \boldsymbol{X}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)\cdot\Delta\boldsymbol{q} \tag{11}$$

として，不等号制約条件(8)，(9)，(10)，等号制約条件(6)のもとでの線形計画問題を解き，$\Delta \boldsymbol{v}^*$ を求めることができる．これを逐次くりかえしてこの最適化問題の解が得られる．

以上の定式化に付随して，次のような，最適化問題も解くことができる．いま，(1) 式で示される系を考える．この場合人間は，例えば，比例＋微分のフィードバック操作をするとし，ゲイン定数と微分時間を調整して J を Optimum にすると考える．このとき，q_2 を微分時間として

$$I=q_2^*(\boldsymbol{v})$$

を Min にする $\boldsymbol{v}$ を求める．すなわち，最も小さい微分操作で J を Min にすることができる系の設計を考える．

前と同じく，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\Delta\boldsymbol{v}$ を考える．

$$I=q_2^*(\boldsymbol{v})=q_2^*(\boldsymbol{v}_0+\Delta\boldsymbol{v})$$

$$\fallingdotseq q_2^*(\boldsymbol{v}_0)+\left(\frac{\partial q_2^*}{\partial \boldsymbol{v}}\right)_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0}\cdot\Delta\boldsymbol{v}$$

J の形を(2′)とすれば(6)式より，

$$\left(\frac{\partial q_2^*}{\partial \boldsymbol{v}}\right)_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0}=\frac{\partial \Delta q_2}{\partial \Delta \boldsymbol{v}}=\boldsymbol{Q}$$

ここに $\boldsymbol{Q}$ は，$\boldsymbol{v}$ に対する q_2 の感度ベクトルである．ゆえに

$$I=q_2^*(\boldsymbol{v}_0)+\boldsymbol{Q}\cdot\Delta\boldsymbol{v}$$

ゆえに，(8)，(9)，(10) を制約条件にして，$\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{v}$ を評価関数にした線形計画問題を解けば良い．

次に，使用条件や，環境によって変動するパラメーター $\boldsymbol{r}\equiv(r_1,r_2,\cdots,r_k)$ を考え，(1′)のような系を考える．

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{v}) \tag{1′}$$

$\boldsymbol{r}$ が，$\Delta\boldsymbol{r}$ だけ変動した場合，これに適応して，人間は J を Optimum にすべく $\Delta\boldsymbol{q}$ だけ変動する．このときの $\Delta\boldsymbol{r}$ と $\Delta\boldsymbol{q}$ の関係は(6)式を導いたと同様にしてとなる．ゆえにこの式より

$$\int_0^\infty\left[\frac{\partial X_1}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial q_i}+(X_1-X_{1ss})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial X_1}{\partial q_i}\right)\right]dt\cdot\Delta\boldsymbol{r}$$

$$+\int_0^\infty\left[\frac{\partial X_1}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial q_i}+(X_1-X_{1ss})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\frac{\partial X_1}{\partial q_i}\right)\right]$$

$$\times dt\cdot\Delta\boldsymbol{q}=0 \tag{6′}$$

ゆえにこの式より　$(i=1,2,3\cdots\cdots,m)$

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{\partial \Delta\boldsymbol{q}}{\partial \Delta\boldsymbol{r}}$$

が求められる．これは一般に $m\times k$ のマトリクスである．ゆえに，$\Delta\boldsymbol{r}$ の変動に対して，人間が適応して調整すべき．$\Delta\boldsymbol{q}$ は次のようになる

$$\Delta\boldsymbol{q}=\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\Delta\boldsymbol{r} \tag{12}$$

この $\Delta\boldsymbol{q}$ を評価の基準に考えれば，$\boldsymbol{r}$ が変動しても，それに適応して調整すべき幅 $\Delta\boldsymbol{q}$ が小さい系の方が良い．たとえば，微小値 $\Delta\boldsymbol{r}$ が 0 のまわりに，独立に分散 $\boldsymbol{\sigma}^2\equiv(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_k^2)$ の正規分布をするとすれば，Δq_i の分散は，

$$\sigma^2(\Delta q_i)=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial q_i}{\partial r_j}\right)^2\cdot\sigma_j^2 \tag{13}$$

になるから，(13)を評価関数にすれば，使用条件，環境によるパラメーターの変動に対する適応のしやすい系の設計をすることができる．第1報で述べたと同じように，(13)を評価関数にして，線形計画による逐次近似で最適値を求める場合には，$\partial^2\boldsymbol{X}/\partial q_i\cdot\partial v_j$，$\partial^2\boldsymbol{X}/\partial r_i\partial v_j (i,j=1,2,\cdots)$ を求める必要がある．これは，(i) 式を，q_i, v_j または，r_i, v_j で2階微分することによって得られる感度方程式の解である．

3. 機械の特性に適応して，人間が最適制御をする場合

ここでは，(14)式でしめされる系を考える．

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v})\cdot u^*(t) \tag{14}$$

ここに，u^* は人間の操作をしめし，前と同様に，(2) を Optimum にする最適制御とする．ただし，u^* は，t(時間) の関数であると同時に，$\boldsymbol{v}$ の関数でもあることに注意する．このような系について，(3)を Optimum にする $\boldsymbol{v}$ を求める問題を考える．これも前と同様に，線形計画による逐次近似によって求めることができる．このときの線形評価関数の係数を計算するには，前と同様に $\partial\boldsymbol{X}/\partial\boldsymbol{v}$ が必要である．これは，(14) 式を $\boldsymbol{v}$ で偏微分することによって形式的に(15)式の解になることがわかる．

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{X}}}{\partial\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\boldsymbol{v}}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial\boldsymbol{v}}\boldsymbol{X}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot u^*+\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial\boldsymbol{v}} \tag{15}$$

(15) 式を解いて，$\partial\boldsymbol{X}/\partial\boldsymbol{v}$ を求めるには，$\partial u^*/\partial\boldsymbol{v}$ が必要である．すなわちパラメーター $\boldsymbol{v}$ の変動に対する，最適制御 u^* の感度を計算する必要がある．ここで，いま，人間が u^* で Optimum にする評価関数(2)を，さらに具体的に u についての2次の汎関数の形で，(16)式のように書けるとする．

$$J=\int_0^\infty[(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{X}')+Ru^2]\cdot dt \tag{16}$$

ここに，$\boldsymbol{Q}$ は $n\times n$ の positive definite matrix，R は正の定数とし，$\boldsymbol{X}(t)$ および，$u(t)$ には制約条件はないとする．これは結局，人間の最適操作 u^* が，定係数系の state regulator 問題の解になっているということである．

このような問題の場合は，$u^*(t)$ は，解析的に求めることができることがわかっている．すなわち

$$u^*(t)=-R^{-1}\cdot\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}(t) \tag{17}$$

となり，線形フィードバック操作で最適化できる．

ここに，$\boldsymbol{K}$ は $n\times n$ マトリクスで，次式の解である．

$$-\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{B}\cdot R^{-1}\cdot\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{K}-\boldsymbol{Q}=0 \tag{18}$$

ただし $'$ は，転置行列をしめす．

(17)式を v_i で偏微分すれば

$$\frac{\partial u^*}{\partial v_i}=-R^{-1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial v_i}\cdot\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}-R^{-1}\cdot\boldsymbol{B}'\times\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial v_i}\cdot\boldsymbol{X}-R^{-1}\cdot\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{K}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial v_i}\quad(i=1,2,\cdots) \tag{19}$$

また，$\partial\boldsymbol{K}/\partial v_i$ は，(18)式を v_i で偏微分した(20)式を満足する．

$$-\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial v_i}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{K}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial v_i}-\frac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial v_i}\cdot\boldsymbol{K}+\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial v_i}\cdot\boldsymbol{B}\cdot R^{-1}\cdot\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial v_i}R^{-1}\cdot\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{B}\cdot R^{-1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial v_i}\cdot\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{B}\cdot R^{-1}\cdot\boldsymbol{B}'\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial v_i}=0\quad(i=1,2,\cdots) \tag{20}$$

(17)式を(14)式に代入すれば

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{X}\quad \text{初期条件}:\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0 \tag{21}$$

$$\boldsymbol{G}\equiv\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\cdot R^{-1}\cdot\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{K}$$

この(21)式が最適軌道 $\boldsymbol{X}$ を与える．また $\partial\boldsymbol{X}/\partial v_i$ は．(21)式を v_i で偏微分した(22)式の解である．

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{X}}}{\partial\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{G}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\boldsymbol{v}}+\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{X} \tag{22}$$

(21)，(22)式を解くことにより，(19)式から，$\partial u^*/\partial\boldsymbol{v}$ も求められる．以上のことから，人間が，機械に適応して最適制御をするとした系において，(3)を Optimum にする $\boldsymbol{v}$ を求める問題も，線形計画の逐次近似で解くことができる．

例えば，(3)の評価関数の代りに(23)式を使うとする．

$$I=\int_0^\infty c\cdot u^2\cdot dt \tag{23}$$

この(23)式が，人間の操作のエネルギーと考えれば，これを最小にする $\boldsymbol{v}$ を求めることにより，最も小さなエネルギーで(3)を人間が Optimum にすることができる系の設計が可能である．

次に，2. で述べたと同じパラメーター $\boldsymbol{r}$ を考え，

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})\cdot u^* \tag{24}$$

なる系を考える．$\boldsymbol{r}$ の変動に対する u^* の変動は，(19)式を導いたのと同じように求めることができるから

$$\varDelta u(t)=\frac{\partial u^*(t)}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\varDelta\boldsymbol{r} \tag{25}$$

これが，$\varDelta\boldsymbol{r}$ の変動に適応して，変動すべき人間の操作である．この変動の目安として，

$$\int_0^\infty\varDelta u(t)^2\cdot dt=\int_0^\infty\left(\frac{\partial u^*(t)}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\varDelta\boldsymbol{r}\right)^2\cdot dt \tag{26}$$

を考え，$\varDelta\boldsymbol{r}$ がある既知の分布に従うとした場合の，(26)式の分散を最小にする $\boldsymbol{v}$ を求めることによって，2. で述べたと同じく，$\boldsymbol{r}$ の変化に適応する幅の小さくてよい系，すなわち適応しやすい系の設計ができる．

4. おわりに

第2報も一般的な定式化のみについて述べたが，現在具体的に，人間—自動車系の，評価と最適化の問題を解いている．今後これらについて述べたいと思う．

最後に，本研究を進めるにあたり，ご指導いただいている，第2部平尾教授，ならびに工学部井口助教授に謝意を表する．
(1969年8月8日受理)