

マトリックス・ハイブリッド法による St. Venant ねじりの解析

Analysis of Saint-Venant Torsion Problem by the Matrix Hybrid Method

山田 嘉 昭*・中 桐 滋*・高 塚 公 郎**

Yoshiaki YAMADA, Shigeru NAKAGIRI and Koro TAKATSUKA

1. ま え が き

St. Venant ねじりの問題はマトリックス変位法によって容易に解くことができる¹⁾。また同じ変位法によれば山田・川井らが示しているように材料の非線形性を考慮したねじりの弾塑性解析も一貫した方法で行なうことができる²⁾。しかしながら変位法では、St. Venant ねじりの境界条件、すなわち断面輪郭線上で、法線方向の剪断応力が零であるという応力境界条件が満足されていない。筆者らはこの断面輪郭線上での応力境界条件を満たし、さらに St. Venant ねじりにおける応力解の精度を向上させるため、要素内において釣合いにある応力を仮定して全体の剛性マトリックスを構成するという、Pian が最初に提唱した Hybrid 法³⁾⁻⁵⁾を適用することを試みた。ここでは、Hybrid 法で得た結果のうち、とくに弾性解について報告する。変位法においても、要素間の平均をとるようにすれば、境界および物体内の応力分布の数値的な近似を高めることが可能である。しかし Hybrid 法では、境界条件があらかじめ厳密に満足されるよう理論を組立てることができ、応力解の精度を系統的に向上できる点が大きな特徴である。

2. Hybrid 法で用いる応力関数 ϕ

Hybrid 法では要素内において釣合いにある応力分布を仮定する。そして変位については、要素間の内部境界上についてのみ適合条件を満たす連続な分布を仮定し、最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理を適用して要素の特性（節点変位と節点力を結ぶ剛性マトリックス）を求める。これ以後、系全体の剛性マトリックスを求める方法は、変位法の場合と全く同じである。

ここでは、St. Venant ねじりの問題において、ねじりの応力関数を要素内で線形、したがって要素内で応力は一定と仮定する。また要素の辺上では、変位法の場合と同様に線形の変位関数をとるものとする。このような線形仮定のもとでは、自由度を大きくすると応力関数を節点変位に結びつけるマトリックスが特異となるが、応力関数の物理的考察からマトリックスの次数を下げることで、特異性を取り除くことができる（以下の(2)式を参照）。要素三角柱の一辺が断面輪郭上にある場合

について、Hybrid 法の要素剛性マトリックスを導く方法はすでに発表した⁶⁾、以下においては主に内部要素について述べることにしたい。

要素分割は変位法の場合と全く同様である。すなわち図 1 に示すように、任意断面の一樣な棒を軸方向に単位長さ 1 の三角柱要素の集合に分割し、代表的要素を ijk

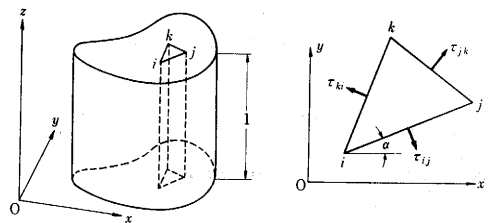


図 1 三角柱要素

とする。以下、添字 i, j および k は各頂点に関する量を表すものとし、マトリックス記号 $[A]$, $[B]$, $[C]$ はそれぞれ行ベクトル A , 長方形および正方形マトリックス B , 列ベクトル C を表すものとする。

最初に要素の内部における応力関数 ϕ は、次のような線形式で表示されるものとする。

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (1)$$

ここで $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は未定係数で、各頂点における応力関数 ϕ の値により、次のように定まる。

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix}$$

ただし

$$\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_j y_k - x_k y_j & x_k y_i - x_i y_k & x_i y_j - x_j y_i \\ y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix}$$

添字つきの x および y は頂点の座標、 A は三角柱要素の断面積である。剪断応力 τ_{xz}, τ_{yz} はねじりの応力関数の定義より、次式で与えられ、(1)式により要素内で一定値となっている。

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial \phi / \partial y \\ -\partial \phi / \partial x \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ -b_i & -b_j & -b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} \\ = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} c_i & c_j \\ -b_i & -b_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i - \phi_k \\ \phi_j - \phi_k \end{Bmatrix}$$

Pian の記号にしたがって上の式をマトリックスで表示

* 東京大学生産技術研究所 第1部

** 東京大学大学院生

すれば

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [P] \{\beta\} & (2) \\ \{\sigma\} &= \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, [P] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} c_i & c_j \\ -b_i & -b_j \end{bmatrix} \\ \{\beta\} &= \begin{Bmatrix} \phi_i - \phi_k \\ \phi_j - \phi_k \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

(2)式では、三つの頂点における応力関数 ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k ではなく、 $\phi_i - \phi_k, \phi_j - \phi_k$ の二つを独立な量としていることに注意を要する。これは応力が、応力関数のこう配として定まるという物理的な特性に適合するものである。

図1の各辺上の剪断応力の法線方向成分 $\tau_{jk}, \tau_{ki}, \tau_{ij}$ の値は、 s_{jk}, s_{ki}, s_{ij} を各辺の長さとして、次のように求めることができる。

$$\tau_{jk} = \tau_{xx} \sin \alpha - \tau_{yz} \cos \alpha = [-b_i/s_{jk} - c_i/s_{jk}] \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\text{同様に} \tau_{ki} = [-b_j/s_{ki} - c_j/s_{ki}] \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{ij} = [-b_k/s_{ij} - c_k/s_{ij}] \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

また要素の受けもつねじりモーメント M は

$$M = \iint_A (-y\tau_{xx} + x\tau_{yz}) dx dy = [-y_0 A \quad x_0 A] \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

ここで x_0, y_0 は三角形の重心の座標である。(2)式と同様に以上の結果をマトリックス表示すると

$$\{S\} = [R] \{\beta\} \quad (3)$$

ただし

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} M \\ \tau_{jk} \\ \tau_{ki} \\ \tau_{ij} \end{Bmatrix}, [R] = -\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_0 A & -x_0 A \\ b_i/s_{jk} & c_i/s_{jk} \\ b_j/s_{ki} & c_j/s_{ki} \\ b_k/s_{ij} & c_k/s_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i & c_j \\ -b_i & -b_j \end{bmatrix}$$

3. 応力関数 ϕ と節点変位 $\{q\}$ の関係

変位法では、比ねじり角 θ と各頂点における軸方向の変位 (すなわちゆがみの関数) w_i, w_j, w_k を未知節点変位 $\{q\}$ の成分として用い、最小ポテンシャル・エネルギーの原理を適用して剛性マトリックスを求める¹⁾。Hybrid法では、まずはじめに最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理にもとづいて、要素節点変位 $\{q\}$ と応力関数 $\{\phi\}$ の関係を求め、それから剛性マトリックスを誘導する³⁾⁻⁵⁾。Hybrid法では、内部境界上でのみ変位の適合性が要求されるので、着目している三角形の辺上でのみ、次の線形式が成立するものとする。

$$w = \{(a_i + b_i x + c_i y)w_i + (a_j + b_j x + c_j y)w_j + (a_k + b_k x + c_k y)w_k\} / 2A$$

上の式で表わされる各辺上のゆがみ w を w_{jk}, w_{ki}, w_{ij} 、また棒に生じている比ねじり角を θ とし、 $[u] = [\theta w_{jk} w_{ki} w_{ij}]$ なるベクトル $[u]$ を考える。すると(3)式の表面力 $\{S\}$ のもとで、この変位 $[u]$ を生ずる

ときになされる仕事は、次のように計算される。ただし M, θ については三角柱の上下面に関する面積積分となることに注意する。

$$\int [S] \{u\} ds = [L] \{T\} \{q\} \quad (4)$$

ただしマトリックス $[T]$ は

$$[T] = [P]^T [L], [L] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2y_0 A & b_i & b_j & b_k \\ 2x_0 A & c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

$$[q] = [\theta w_i w_j w_k]$$

一方において、要素に貯えられるひずみエネルギー U は、(2)式により

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iint_A [\sigma] [N] \{\sigma\} dx dy \\ &= \frac{1}{2} [L] \iint_A [P]^T [N] [P] dx dy \{\beta\} = \frac{1}{2} [L] [H] \{\beta\} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし

$$[H] = \iint_A [P]^T [N] [P] dx dy, [N] = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

コンプリメンタリ・エネルギー Π_c は、(4)式および(5)式により次のようになる。

$$\Pi_c = U - \int [S] \{u\} ds = \frac{1}{2} [L] \{H\} \{\beta\} - [L] \{T\} \{q\}$$

最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理にもとづいて Π_c を $\{\beta\}$ について微分すれば、 $\{\beta\}$ と $\{q\}$ の関係は次のように求められる。

$$[H] \{\beta\} - [T] \{q\} = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad \{\beta\} = [H]^{-1} [T] \{q\} \quad (6)$$

すでに述べたように、以上の計算では $[L] = [\phi_i - \phi_k \quad \phi_j - \phi_k]$ としている。この場合もし $[L] = [\phi_i \quad \phi_j \quad \phi_k]$ として同じ計算を行なうと、 $[H]$ は 3×3 の特異マトリックスとなり、(6)式によって $\{\beta\}$ と $\{q\}$ の関係を求めることが不可能となる。これは応力関数には、その値に物理的意味がなく、そのこう配によって剪断応力があらわされることになっているためである。すなわち ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k ではなく、 $\phi_i - \phi_k, \phi_j - \phi_k$ の二つを独立と考えるべきである。

4. 剛性マトリックス

剛性マトリックス $[k]$ を用いてひずみエネルギー U を表わすと、その定義より

$$U = \frac{1}{2} [q] [k] \{q\}$$

一方において(5)式および(6)式を用いると

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} [L] \{H\} \{\beta\} = \frac{1}{2} [L] \{T\}^T [H^{-1}]^T \\ &\quad \times (H) (H^{-1}) [T] \{q\} = \frac{1}{2} [q] [T]^T (H^{-1}) [T] \{q\} \end{aligned}$$

したがって Hybrid 法の剛性マトリックス $[k]_h$ は

研 究 速 報

$$[k]_h = [T]^T [H]^{-1} [T]$$

$$= \frac{G}{4A} \begin{bmatrix} 4A^2(x_0^2 + y_0^2) & 2A(c_i x_0 - b_i y_0) & b_i^2 + c_i^2 \\ 2A(c_j x_0 - b_j y_0) & b_j b_i + c_j c_i & b_j^2 + c_j^2 \\ 2A(c_k x_0 - b_k y_0) & b_k b_i + c_k c_i & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \quad \text{対 称}$$

なお、剛性マトリックス $[k]_h$ および $[k]_d$ (添字 h および d はそれぞれ Hybrid 法と変位法をあらわす) は、次のように一般化された力 (generalized force) と一般化された変位 (generalized displacement) を結びつける関係式である。

$$\begin{Bmatrix} M \\ Z_i \\ Z_j \\ Z_k \end{Bmatrix} = [k]_h \begin{Bmatrix} \theta \\ w_i \\ w_j \\ w_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2y_0 A & -2x_0 A \\ b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M \\ Z_i \\ Z_j \\ Z_k \end{Bmatrix} = [k]_d \begin{Bmatrix} \theta \\ w_i \\ w_j \\ w_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \iint_A \begin{bmatrix} 2y_0 A & -2x_0 A \\ b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dx dy$$

上の式の Z_i, Z_j, Z_k はそれぞれ三角形柱要素の三つの側面 (jk, ki, ij) $\times 1$ 上に作用する剪断力の 1/2 に等しいものである²⁾。そして上の二つの式の類似により、Hybrid 法においても内部の節点における釣合いの式は変位法と全く同じ意味をもつ。すなわち‘節点に集まる三角形要素の重心を通る面に作用する x 方向剪断力の総和が零’という条件を表わしていることになる。

最後に、節点変位 $\{q\}$ が得られれば (6) 式、つぎに (2) 式を媒介として、要素内の剪断応力 $\{\sigma\}$ をつぎのように求めることができる。

$$\{\sigma\} = [P][H]^{-1}[T]\{q\}$$

あるいは陽に表示すれば

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -2y_0 A & b_i & b_j & b_k \\ 2x_0 A & c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \\ w_k \end{Bmatrix}$$

この Hybrid 法の応力の表示式は、変位法における重心点の応力の表示式に一致している。

5. 計 算 結 果

例題として正三角形断面棒のねじりを取り上げ、以下の三つの方法で得られた結果を比較した。

Method I 全要素に $[k]_d$ を用いる従来の変位法。

Method II 一辺が自由表面 (断面輪郭線) に一致する要素についてのみ $[k]_h$ 、他の要素については $[k]_d$ を用いる方法。

Method III 全要素に $[k]_h$ を用いる方法。

計算の際に用いた正三角形断面棒の寸法、材料の弾性特性値 E および ν 、与えたねじり角 θ 、および要素分割を図 2 に示す。断面の対称性を利用し、図の斜線部 (す

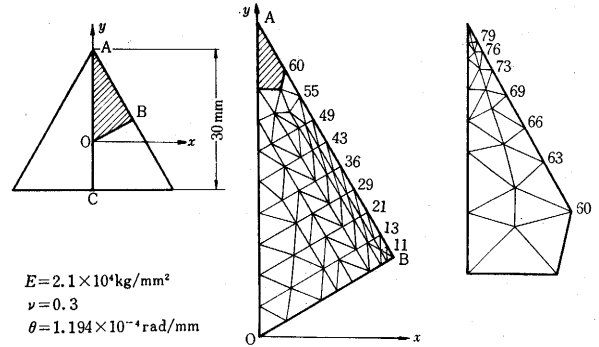


図 2 要素分割

なわち 6 分の 1) の三角形についてのみ分割を行なった。要素数および節点数はそれぞれ 123 と 82 である。なお、計算には FACOM 270-30 を使用した。以下に計算結果の主要点を示すことにする。

(a) ねじり剛性 厳密解と三つの方法で得た結果の比較を次に示す。

$$\text{Method I } M/\theta = 2.538 \times 10^8 \text{ kg mm}^2$$

$$\text{Method II } M/\theta = 2.536 \times 10^8 \text{ kg mm}^2$$

$$\text{Method III } M/\theta = 2.525 \times 10^8 \text{ kg mm}^2$$

$$\text{厳密解 } M/\theta = 2.518 \times 10^8 \text{ kg mm}^2$$

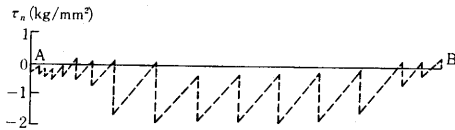
いずれの場合も厳密解とよく一致しているが、全要素に $[k]_h$ を用いた Method III の結果が最も厳密解に近い。

(b) ゆがみの関数 (warping) 図 2 の周辺 AB 上におけるゆがみ関数を表 1 に示す。表から明かなようにいずれも厳密解とよく一致しているが、Method I (変位法) で求めたゆがみの関数の方がやや精度が高いことがわかる。

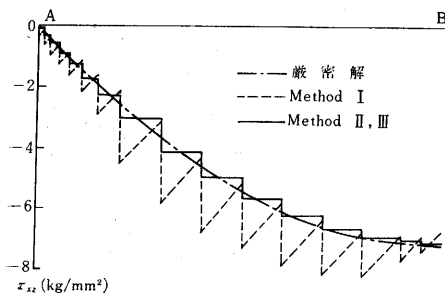
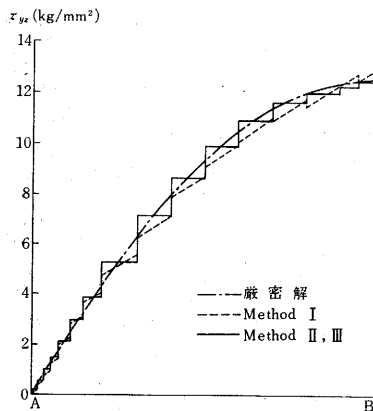
表 1 周辺 AB 上でのゆがみの関数 ($w \times 10^3 \text{ mm}$)

節 点	Method I	Method II	Method III	解 密 解
B 11	0.375	0.368	0.370	0.370
13	0.975	0.942	0.948	0.957
21	1.921	1.884	1.897	1.924
29	2.766	2.721	2.740	2.772
36	3.467	3.419	3.442	3.471
43	3.868	3.821	3.847	3.887
49	3.960	3.913	3.940	3.973
55	3.659	3.632	3.657	3.692
60	2.960	2.918	2.938	2.978
63	2.385	2.352	2.368	2.398
66	1.854	1.834	1.847	1.865
69	1.347	1.330	1.339	1.354
73	0.896	0.885	0.891	0.898
76	0.529	0.524	0.527	0.530
A 79	0.270	0.268	0.270	0.270

(c) 剪断応力 図 3 は周辺 AB 上での法線方向剪断応力 τ_n の分布を示す。厳密解では零になるべきものであり、Method II および III も同じ結果を与えている。

図3 周辺AB上での剪断成分 τ_n (Method I)

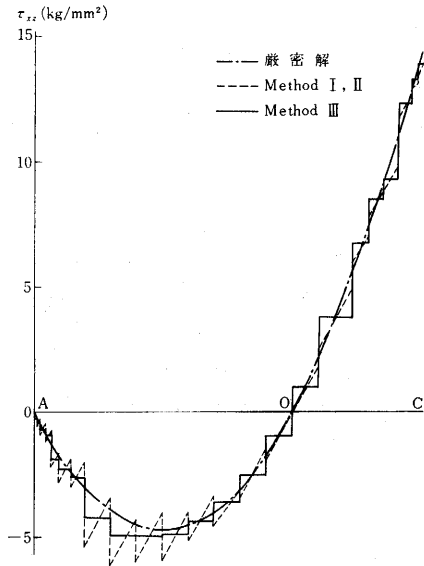
ただし各節点上では一節点を断面輪郭線上に持ち他の二節点が断面内にある三角柱要素の影響を受けて、それから求められる τ_n が存在することになる。図に示されているように、Method I (変位法) の場合にはかなり大きな τ_n が存在しており、これは変位法に附随する誤差を示すものである。また図4および図5は、同じく辺

図4 周辺 AB 上での剪断応力 τ_{xz} 図5 周辺 AB 上での剪断応力 τ_{yz}

AB 上での τ_{xz} , τ_{yz} の分布を示す。Hybrid 法の剛性マトリックス $[k]_h$ を用いることにより、剪断応力 τ_{xz} , τ_{yz} の値も著しく改善されることが明らかである。y 軸上、すなわち図2に示す正三角形断面の中心線 AC 上の剪断応力 τ_{xz} を図6に示す。図のように内部要素についても $[k]_h$ を用いることにより、よい結果が得られることがわかる。

6. 結 論

Hybrid 応力法を適用すると、St. Venant ねじりの応力境界条件を満たすことができ、応力分布について精度の高い解を期待することができる。本研究では、例題

図6 正三角形断面中心線 AC 上での剪断応力 τ_{xz}

として正三角形断面棒を取扱い、このことを確かめた。本研究の方法は、マトリックス $[N]$ を、弾塑性の応力-ひずみ関係を示すマトリックスに変えると、弾塑性問題や材料の異方性を考慮する場合にも、容易に拡張することができる。そして弾塑性問題では、要素の刻々の降伏を追跡することになるので、Hybrid 法の応力解の精度が高いことは、とくに有利と考えられる。また Hybrid 法は、St. Venant ねじりの問題ばかりでなく、連続体の二次元や三次元の問題にも適用可能である。

St. Venant ねじりの問題については、断面に穴のある棒、さらにその弾塑性ねじりの際に生じる除荷現象 (unloading phenomenon) について、さらに研究を進める必要がある。

(1969年9月9日受理)

文 献

- 1) 川井・吉村：マトリックス法による棒のねじり解析，生産研究 20-5，pp. 246-8，1968。
- 2) Y. Yamada, T. Kawai, ほかに2名：Analysis of the Elastic-Plastic Problems by the Matrix Displacement Methods, Preprint of 2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton, Ohio, 1968。
- 3) T. H. H. Pian: Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions, AIAA Journal, 2, pp. 1333-36, 1964。
- 4) T. H. H. Pian: Element Stiffness-Matrices for Boundary Compatibility and for Prescribed Boundary Stresses, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, pp. 457-477, 1965。
- 5) T. H. H. Pian and P. Tong: Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, Int. J. for Numerical Methods in Engg., 1-1, pp. 3-28, 1969。
- 6) 山田・中桐・高塚：いわゆるハイブリッド法の St. Venant ねじり問題への応用について，マトリックス構造解析講演論文集，日本鋼構造協会，pp. 40-47, 1969。