研　究　速　報

UDC 539.384.6

膜理論による液圧バルジ試験の弾塑性解析

Elastic-Plastic Analysis of the Hydraulic Bulge Test by the Membrane Theory

山　田　嘉　昭*・横　内　康　人*

Yoshiaki YAMADA and Yasuto YOKOUCHI

は　じ　め　に

マトリックス法の進歩により，塑性力学の分野において，従来の剛塑性体を仮定した解析から弾塑性体としての現実的な解析への移行はきわめていちじるしいものがある．本稿は，一連の軸対称成形問題の剛塑性解析が完了した段階で，その延長線上にあるものとして液圧バルジ試験の弾塑性解析を取り扱ったものである．解析では，著者の一人がマトリックス法を連続体の弾塑性問題に拡張する際に導いた塑性応力－ひずみマトリックスを都合よく活用する．計算の手法自体は，差分による数値積分を用いるもので，剛塑性解析の場合[1] とほとんど同じである．

1. 基 礎 方 程 式

膜理論による軸対称問題の釣合い方程式[2] を液圧バルジ試験（図１参照）にあてはめると，摩擦がなく板表面のせん断応力は零であるから次のようになる．ただし変形前の座標 s を独立変数に選ぶ．

$$\frac{d(t\sigma_\phi)}{ds}=\frac{t(\sigma_\theta-\sigma_\phi)}{s}e^{\varepsilon_\phi-\varepsilon_\theta}\cos\phi \quad (\phi\text{ 方向}) \tag{1}$$

$$\frac{p}{t}=\frac{2\sigma_\phi\sin\phi}{se^{\varepsilon_\theta}} \quad (\text{対称軸方向}) \tag{2}$$

ひずみの適合条件式は

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{ds}=\frac{e^{\varepsilon_\phi-\varepsilon_\theta}\cos\phi-1}{s} \tag{3}$$

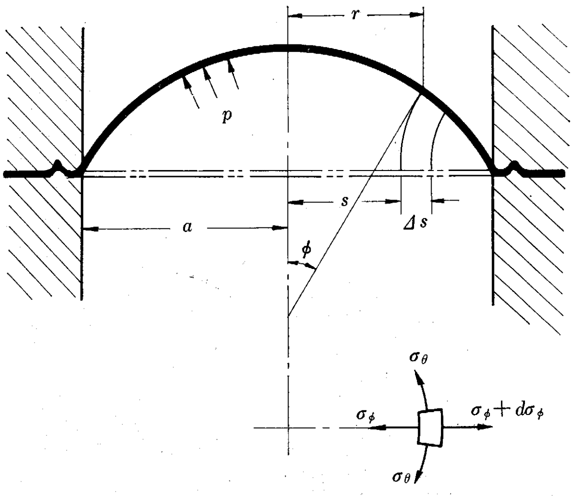

図１　液圧バルジ試験

応力－ひずみ関係式をマトリックスで表示して

$$\begin{Bmatrix}d\sigma_\theta\\ d\sigma_\phi\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{21} & D_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d\varepsilon_\theta\\ d\varepsilon_\phi\end{Bmatrix},$$

または　　$\{d\sigma\}=[D]\{d\varepsilon\}$　　（4）

のようにあらわすと，弾性域において

$$[D]=[D^e]=\begin{pmatrix}\dfrac{E}{1-\nu^2} & \dfrac{\nu E}{1-\nu^2}\\ \dfrac{\nu E}{1-\nu^2} & \dfrac{E}{1-\nu^2}\end{pmatrix} \tag{5}$$

塑性域において[3]

$$[D]=[D^p]=\begin{pmatrix}\dfrac{E}{1-\nu^2}-\dfrac{S_1^2}{S} & \dfrac{\nu E}{1-\nu^2}-\dfrac{S_1S_2}{S}\\ \dfrac{\nu E}{1-\nu^2}-\dfrac{S_1S_2}{S} & \dfrac{E}{1-\nu^2}-\dfrac{S_2^2}{S}\end{pmatrix} \tag{6}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}&S=\frac{4}{9}\bar{\sigma}^2H'+S_1\sigma_\theta'+S_2\sigma_\phi'\\ &S_1=\frac{E}{1-\nu^2}(\sigma_\theta'+\nu\sigma_\phi'),\quad S_2=\frac{E}{1-\nu^2}(\nu\sigma_\theta'+\sigma_\phi')\\ &H'=d\bar{\sigma}/\overline{d\varepsilon^p}\quad \bar{\sigma}^2=\sigma_\theta^2-\sigma_\theta\sigma_\phi+\sigma_\phi^2\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

弾性圧縮性の条件（および塑性非圧縮性）から

$$\left.\begin{aligned}&d\varepsilon_\theta+d\varepsilon_\phi+d\varepsilon_t=\frac{1-2\nu}{E}(d\sigma_\theta+d\sigma_\phi)\\ &d\varepsilon_t=\frac{1-2\nu}{E}(d\sigma_\theta+d\sigma_\phi)-d\varepsilon_\theta-d\varepsilon_\phi\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

また次の関係式が成立する．

$$\begin{aligned}d(t\sigma_\phi)&=td\sigma_\phi+\sigma_\phi dt=t(d\sigma_\phi+\sigma_\phi d\varepsilon_t)\\ &=t\left[d\sigma_\phi+\sigma_\phi\left\{\frac{1-2\nu}{E}(d\sigma_\theta+d\sigma_\phi)-d\varepsilon_\theta-d\varepsilon_\phi\right\}\right]\\ &=t\left\{\left(1+\frac{1-2\nu}{E}\sigma_\phi\right)d\sigma_\phi+\frac{1-2\nu}{E}\sigma_\phi d\sigma_\theta-\sigma_\phi d\varepsilon_\theta-\sigma_\phi d\varepsilon_\phi\right\}\end{aligned} \tag{9}$$

（9）式に（4）式を代入して $d\sigma_\theta$ および $d\sigma_\phi$ を消去すると

$$d\varepsilon_\phi=\frac{\dfrac{1}{t}d(t\sigma_\phi)-\left\{D_{21}+\dfrac{1-2\nu}{E}\sigma_\phi(D_{11}+D_{21})-\sigma_\phi\right\}d\varepsilon_\theta}{D_{22}+\dfrac{1-2\nu}{E}\sigma_\phi(D_{12}+D_{22})-\sigma_\phi} \tag{10}$$

相当塑性ひずみ増分は

$$\overline{d\varepsilon^p}=\frac{2}{\sqrt{3}}(d\varepsilon_\theta^{p2}+d\varepsilon_\theta^p d\varepsilon_\phi^p+d\varepsilon_\phi^{p2})^{1/2} \tag{11}$$

* 東京大学生産技術研所　第１部

また材料の加工硬化特性は次のようにあらわされるものとする.

$$\bar{\sigma}=\sigma_0(a+\bar{\varepsilon}^p)^n \tag{12}$$

初期条件はいたるところで(すなわち座標 s に無関係に)次のように与えられる. ただし ϕ は板面にひいた法線と対称軸間の角度をあらわす.

$$\varepsilon_\phi=\varepsilon_\theta=\bar{\varepsilon}^p=0,\ \phi=0,\ t=t_0$$

および　$\sigma_\theta=\sigma_\phi=\bar{\sigma}=0$, 液圧　$p=0$

境界条件は頂点および周辺において時間に無関係に次のようである.

頂点 $(s=0)$ において　$\varepsilon_\theta=\varepsilon_\phi,\ \phi=0$

周辺 $(s=a)$ において　$\varepsilon_\theta=0$

以上で解析の基礎となる方程式および条件式はすべてそろったので, 次に数値解法について述べる.

2. 数 値 解 法

液圧バルジ試験は2点境界値問題に属している. それで本報告においても, 剛塑性解析の場合と同様に液圧 p をパラメータのように取り扱い, 周辺部 $(s=a)$ における境界条件 $\varepsilon_\theta=0$ が満足されるように, 各変形段階の p の値を決定する. 独立変数には変形前の座標 s, および刻々の変形段階を示す尺度（ある種の時間尺度）として頂点におけるひずみ $\varepsilon_\theta=\varepsilon_\phi=\varepsilon_0$（とおく）を選び, s＝一定および ε_0＝一定の線に沿って数値積分を行なう. 積分は, 常数分方程式でよく用いられている次の式によった.

予測子　$y_{n+1}=y_n+y_n'\Delta x$

修正子　$y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{2}(y_n'+y_{n+1}')\Delta x$

変形が j 段に進んだ段階において, i 番目の要素の解を求める手順は次のようである. ただし $j-1$ 段階および $i-1$ 要素までの解は既知とする.

1.　(1)式および(3)式より, s に沿う積分を行なって $(t\sigma_\phi)_{i,j}$ と $(\varepsilon_\theta)_{i,j}$ を求め, その結果を用いて次の二つの増分を計算する.

$$d(t\sigma_\phi)=(t\sigma_\phi)_{i,j}-(t\sigma_\phi)_{i,j-1}$$
$$d\varepsilon_\theta=(\varepsilon_\theta)_{i,j}-(\varepsilon_\theta)_{i,j-1}$$

2.　上で得た $d(t\sigma_\phi)$ と $d\varepsilon_\theta$ を(10)式に代入して $d\varepsilon_\phi$ を求め, その結果を用いて, $(\varepsilon_\phi)_{i,j}=(\varepsilon_\phi)_{i,j-1}+d\varepsilon_\phi$ を計算する.

3.　以上で得た $d\varepsilon_\theta$, $d\varepsilon_\phi$ から(4)式より $d\sigma_\theta$, $d\sigma_\phi$ を求め, 次のように応力を計算する.

$$(\sigma_\theta)_{i,j}=(\sigma_\theta)_{i,j-1}+d\sigma_\theta$$
$$(\sigma_\phi)_{i,j}=(\sigma_\phi)_{i,j-1}+d\sigma_\phi$$

4.　それから $(t)_{i,j}=(t\sigma_\phi)_{i,j}/(\sigma_\phi)_{i,j}$ によって板厚を計算する.

5.　(2)式より $\sin(\phi)_{i,j}$ を求め, $(\phi)_{i,j}$ を計算する.

6.　(7)式の相当応力の式より $(\bar{\sigma})_{i,j}$ を計算する. また考えている板の要素が塑性域の場合は, (5)式の逆マトリックスと $d\sigma_\theta$, $d\sigma_\phi$ から $d\varepsilon_\theta^e$, $d\varepsilon_\phi^e$ を求め, 次の式によって塑性ひずみを計算する.

$$d\varepsilon_\theta^p=d\varepsilon_\theta-d\varepsilon_\theta^e$$
$$d\varepsilon_\phi^p=d\varepsilon_\phi-d\varepsilon_\phi^e$$

さらにその結果から(11)式により $d\bar{\varepsilon}^p$, その積分によって $(\bar{\varepsilon}^p)_{i,j}$ を計算する.

以上で必要な量がすべて計算されたことになる. 結局剛塑性解析と異なる点は応力－ひずみ関係式だけで, それによって計算の手順が異なり, 多少複雑になるにすぎないのである. しかし一方において弾性を考慮しているので, 解析が現実的となり, 数学的な困難さはむしろ少なくなるという利点がある. 剛塑性解析の場合, 応力－ひずみ関係式は

$$\frac{\Delta\varepsilon_\theta}{2\sigma_\theta-\sigma_\phi}=\frac{\Delta\varepsilon_\phi}{2\sigma_\phi-\sigma_\theta}$$

で与えられ, 周辺 $(s=a)$ における境界条件 $\Delta\varepsilon_\theta=0$ のために, 計算上面倒なことが起こり, 近似的な取り扱いをする必要があった[1]. しかし弾性成分を導入することによって数学的な困難はなくなり, 周辺における計算を厳密に行なうことができた.

次に弾塑性解析に特有の問題として, ある要素が弾性状態から塑性状態に移るときの取り扱いについて述べる. 議論を具体的にするため, $j-1$ 段において弾性状態にあった要素が j 段には降伏して塑性状態になる場合を考え, $j-1$ 段における相当応力を $(\bar{\sigma})_{i,j-1}$, 降伏応力を Y とする.

計算にはまず要素が弾性状態にとどまると仮定し, (5)式の $[D^e]$ を用いて, 1～6 の手順で予測子および修正子の計算を行ない, 相当応力 $(\bar{\sigma})_{i,j}$ を求める. その結果 $(\bar{\sigma})_{i,j}\geqq Y$ であれば, 要素は降伏することになるので, 相当応力の全増分と塑性成分（に対応する増分）の比 m を

$$m=\frac{(\bar{\sigma})_{i,j}-Y}{(\bar{\sigma})_{i,j}-(\bar{\sigma})_{i,j-1}}$$

によって計算する. この m を用いて(4)式の $[D]$ を近似的に

$$[D]=(1-m)[D^e]+m[D^p]$$

とし, ふたたび1～6の手順に従って計算をしなおす. 以下, パラメータとして用いた p の修正, および上述の m の修正をあわせ行ないながら, 2点境界値問題としての周辺固定端における境界条件が満足されるまで計算を繰り返す.

3. 数値計算例および剛塑性解析との比較

液圧バルジ試験の剛塑性解析は筆者らのほかにも多く行なわれているが[4)~7)], 数値例における材料の硬化特性を一致させて比較を行なうため, 筆者らの計算結果を使

研　究　速　報

用する．解析に用いた材料の特性は以下の通りである．

縦弾性係数(ヤング率)　$E=21\,000\ \mathrm{kg/mm^2}$

降伏応力　$Y=30\ \mathrm{kg/mm^2}$，ポアソン比　$\nu=0.3$

硬化特性　$\bar{\sigma}=\dfrac{E}{200}(a+\bar{\varepsilon}^p)^n=105(1.9\times10^{-3}+\bar{\varepsilon}^p)^{0.2}$

剛塑性解析と弾塑性解析は材料の硬化特性ばかりでなく，そのほかの点についてもまったく同じ条件で行なった．すなわち，半径は 20 等分 ($\Delta s=0.05a$) とし，頂点におけるひずみの増分は最初 $\Delta\varepsilon_0=0.0002$ からはじめ，変形とともに増分を大きくし，ある程度変形が進んだのちは $\Delta\varepsilon_0=0.05$ とした．修正子による繰り返し計算は，($t\sigma_\phi$) の相対偏差が 10^{-6} 以下になれば許容誤差の範囲内に入ったものとして，打ち切った．

図 2 は頂点のひずみの増加とともに液圧が変化する様子を比較したものである．弾塑性変形の場合は，変形開始とともに圧力が滑らかにたちあがり，変形が進んだ段階では，剛塑性解析の場合に比べていくらか高い値となっている．また弾塑性解析の場合は，応力成分を求めてのち相当応力を計算しているので，相当応力の増減をみることによって除荷 (unloading) 現象を取り扱うことができ，解析の結果においても，剛塑性解析ではとくに明瞭でなかった除荷現象が周辺部において起こっていることがわかった．

図 3 は子午線方向ひずみ ε_ϕ の分布を示している．弾性域と塑性域が共存するような初期の変形段階において 2 つの解はまったく異なり，剛塑性解の ε_ϕ が中心から周辺に向って単調に減少しているのに対して，弾塑性の解は $r/a=0.5$ のあたりで最小となっている．しかしな

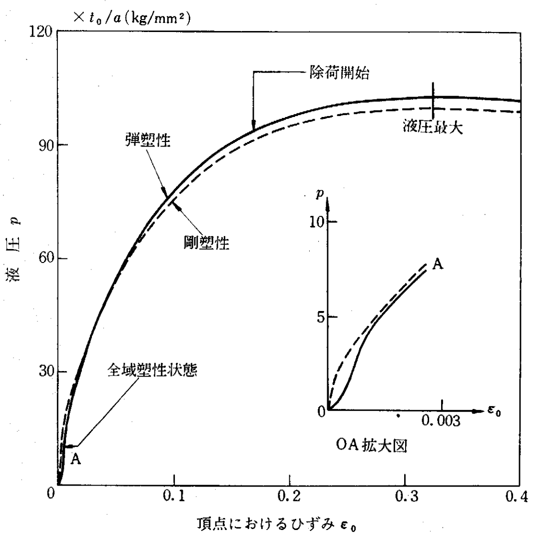

図 2　頂点におけるひずみと液圧の関係

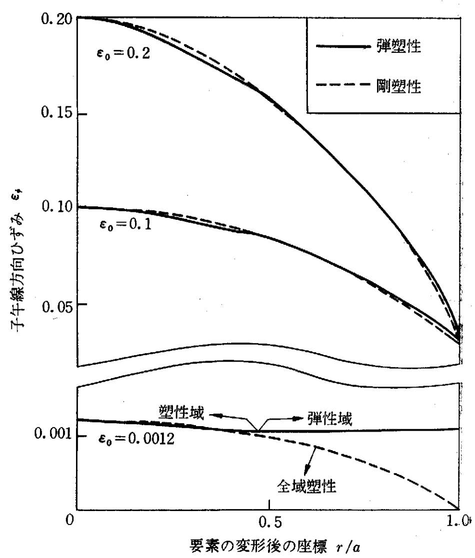

図 3　子午線方向ひずみ ε_ϕ の分布

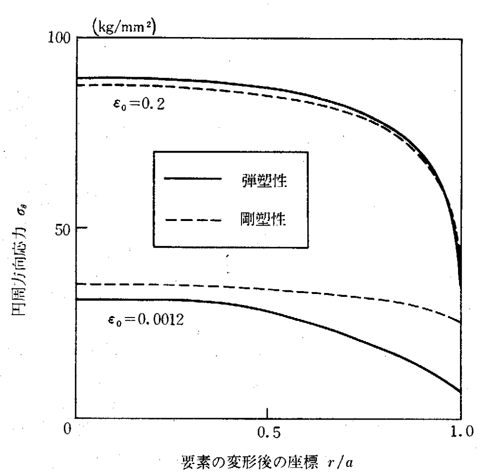

図 4　円周方向応力 σ_θ の分布

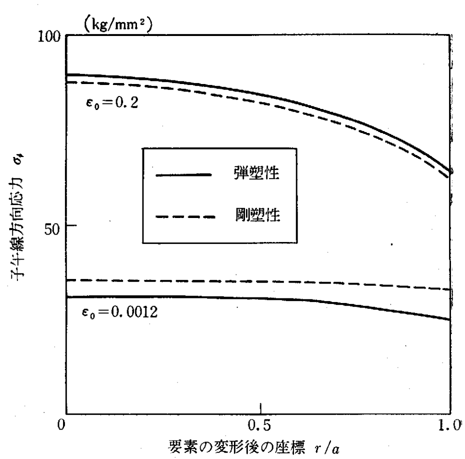

図 5　子午線方向応力 σ_θ の分布

がら変形が大きくなると，両者は数値の上でほとんど差がなくなっている.

図4および図5はそれぞれ同じ変形段階における円周方向応力 σ_θ および子午線方向応力 σ_ϕ の分布を示す. 応力についても変形の初期には2つの解の間に差があるが，変形が進行すると，絶対値は多少異なるにしろ，ほとんど同じ形に分布していることがわかる. これらは，変形の初期における弾塑性解析の重要性を示すほかに，また一方においては，変形が進んだ段階において，従来の剛塑性解析によっても，よい近似が得られることの一つの証拠として貴重である.

む す び

本研究では，液圧バルジ試験を例題とし，薄板軸対称成形の弾塑性変形を解析する一般的な手法の確立に成功を収めた. ここで取り扱った例題のように大きな変形を対象とする場合には，はじめから予想できたように，剛塑性解析とほとんど同じ結果となり，弾塑性解それ自体としての価値は大きくない. それよりはむしろ，大変形において弾性成分を無視できることを，膜理論のわく内ではあるが確認できたこと，ならびに有限要素法の発展過程で開発された塑性応力ひずみマトリックスが，薄板軸対称成形の解析にも効果のあることを実証できたことなどに意義がある.

しかし，一方において，変形の初期の段階に注目するときは，弾塑性体と剛塑性体を仮定した解析の間に大きな差が認められることに注意しなければならない.

終わりに，板や殻の分野で行なわれている有限変形理論に塑性力学の分野における増分的な取り扱い（大きな変形のもっとも妥当な取り扱い）を導入し，将来において同じ手法を曲げ理論にも拡張するため，克服すべき一過程として本報告の研究を行なったことを述べておきたい.

(1969 年 9 月 10 日受理)

文 献

1) 山田・横内：生産研究 **19**-12(1967)，366 および第 19 回塑性加工連合講演会論文集 (1968)，305.
2) 山田：生研報告，**11**-5 (1961)，250.
3) 山田・横内・笹岡：マトリックス構造解析講演論文集，JSSC (1969.5)，412.
4) Hill, R.: *Phil. Mag.* **41**-322 (1950)，1133.
5) Woo, D.M.: *Int. J. Mech. Sci.* **6** (1964)，303.
6) 高橋・竹山：日本機械学会講演論文集，No. 177 (1967)，85.
7) Wang, N.M. and Shammamy, M.R.: *J. Mech. Phgs. Solids* **17** (1969)，43.