

Rayleigh-Ritz 法による円筒殻の固有振動解析

Analysis of the Natural Frequencies of Circular Cylindrical Shells by Rayleigh-Ritz Method

川 股 重 也*・柴 田 耕 一**

Shigeya KAWAMATA and Koichi SHIBATA

1. ま え が き

一般に地盤に固定されているせいの高い回転殻では、地震動に際して多くの場合横揺れを伴う。

回転殻において、変位を円周方向の3角級数に展開した場合、たとえば

$$w = w_n \cos n\theta \quad (\theta: \text{回転角})$$

において、 $n=1$ としたモードがそれである。

円筒殻の $n=1$ の振動形は、はりの振動形と類似のものであるが、ここでは分布質量をもつシェルとしての近似解として、Rayleigh-Ritz 法による解析を試み良好な結果を得た。

Rayleigh-Ritz 法において、2つの異ったモードを仮定しているが、その一つは等分布する水平慣性力によって生ずる膜変形、他の一つは等分布の回転慣性に対応する接線力による膜変形を採用している。

2. 仮 定

- 1) 下端固定、上端 Free の円筒 (図1) を扱う、上蓋の質量も考慮する。
- 2) $n=1$ のモードを対象とする。
- 3) 変形は膜応力による変形のみを考慮する。
- 4) 変形モードは1種類の場合 (Rayleigh) (図2) と2種類考慮 (Ritz) (図3) の場合を考える。

u, v, w は変位, X, Y, Z は荷重,
 $N_x, N_{x\theta}, N_{\theta}, N_y$ は膜応力,
 a は半径, l は円筒の全長,

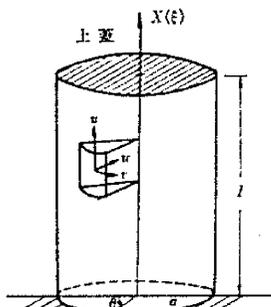


図 1

3. 理 論

仮定モードとして異なる2種の static な仮想荷重による変位分布を考える。

- 1) 仮想荷重 (図2), (図3)

$$a_1 \cdot P_1 = a_1 \cdot \{X_1, Y_1, Z_1\} = a_1 \cdot \{0, \sin\theta, \cos\theta\} \quad (1)$$

$$P_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\} = \theta \cdot \bar{P}_1 \quad \text{において} \quad (2)$$

$$\bar{P}_1 = \{0, 1, 1\} = \{\bar{X}_1, \bar{Y}_1, \bar{Z}_1\} \quad (3)$$

$$\theta = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix}$$

同様にして

$$a_2 \cdot P_2 = a_2 \cdot \{X_2, Y_2, Z_2\} = a_2 \cdot \{\cos\theta, 0, 0\} \quad (4)$$

$$P_2 = \theta \cdot \bar{P}_2 \quad \text{において}$$

$$\bar{P}_2 = \{1, 0, 0\} = \{\bar{X}_2, \bar{Y}_2, \bar{Z}_2\} \quad (5)$$

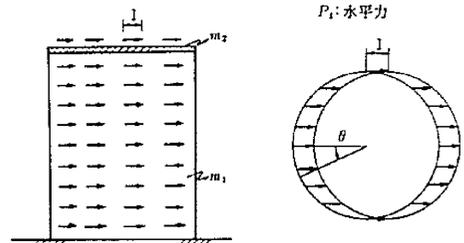


図 2

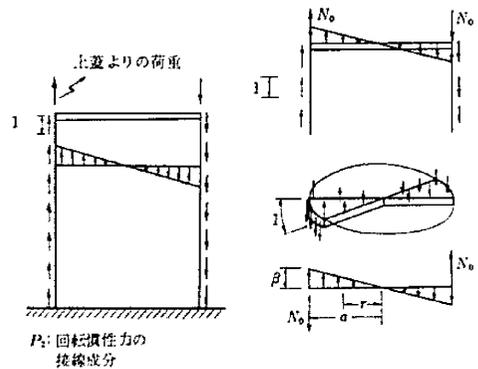


図 3

- 2) 仮想荷重による変形

P_1, P_2 に関する膜応力をそれぞれ N_1, N_2 とすると、

$$N_1 = a_1 \cdot \{N_{x1}, N_{x\theta1}, N_{\theta1}\} \\ = a_1 \cdot \{\bar{N}_{x1} \cos\theta, \bar{N}_{x\theta1} \sin\theta, \bar{N}_{\theta1} \cos\theta\} \\ = a_1 \cdot \theta \cdot \bar{N}_1 \quad (6)$$

$$N_2 = a_2 \cdot \{N_{x2}, N_{x\theta2}, N_{\theta2}\} = a_2 \cdot \theta \cdot \bar{N}_2 \quad (7)$$

この際、応力の境界条件として、上蓋荷重を取り入れる。この膜応力に対応する変位を次のように表示する。

* 東京大学生産技術研究所 第5部

** 東京大学大学院生

研 究 速 報

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot \mathbf{u}_1 &= a_1 \cdot \{\bar{u}_1 \cos \theta, \bar{v}_1 \sin \theta, \bar{w}_1 \cos \theta\} \\ &= a_1 \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 \\ a_2 \cdot \mathbf{u}_2 &= a_2 \cdot \{\bar{u}_2 \cos \theta, \bar{v}_2 \sin \theta, \bar{w}_2 \cos \theta\} \\ &= a_2 \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 \end{aligned} \right\} (8)$$

以上の 2 種の変位が同時に生じる状態では

$$\mathbf{u} = a_1 \cdot \mathbf{u}_1 + a_2 \cdot \mathbf{u}_2 = \boldsymbol{\theta} \cdot (a_1 \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 + a_2 \cdot \bar{\mathbf{u}}_2) \quad (9)$$

これを求めるに使用した仮定荷重は

$$\mathbf{P} = a_1 \cdot \mathbf{P}_1 + a_2 \cdot \mathbf{P}_2 = \boldsymbol{\theta} \cdot (a_1 \cdot \bar{\mathbf{P}}_1 + a_2 \cdot \bar{\mathbf{P}}_2) \quad (10)$$

3) 固有方程式

変位の変化を $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i \cos \omega t$ とおき、位置の Energy を V 、運動の Energy を T とすると

$$\left. \begin{aligned} V &= (1/2) \int_0^{\xi_0} \int_0^{2\pi} \{(a_1 \cdot \mathbf{P}_1' + a_2 \cdot \mathbf{P}_2') \\ &\quad \times (a_1 \cdot \mathbf{u}_1 + a_2 \cdot \mathbf{u}_2)\} d\theta d\xi \\ T &= (m\omega^2/2g) \int_0^{\xi_0} \int_0^{2\pi} \{(a_1 \cdot \mathbf{u}_1' + a_2 \cdot \mathbf{u}_2') \\ &\quad \times (a_1 \cdot \mathbf{u}_1 + a_2 \cdot \mathbf{u}_2)\} d\theta d\xi \end{aligned} \right\} (11)$$

(ただし、 ω は円振動数、 m は密度、 $\xi_0 = l/a$ 、 g は重力の加速度、 \mathbf{u}' は \mathbf{u} の転置ベクトル \mathbf{u}^T とする)
 ω^2 は位置と運動の Energy を等置することによって次のように求められる(文献 2)。

$$\omega^2 = \frac{g}{m} \frac{\int_0^{\xi_0} \{a_1^2 \cdot \bar{\mathbf{P}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 + a_1 \cdot a_2 (\bar{\mathbf{P}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 + \bar{\mathbf{P}}_2' \cdot \bar{\mathbf{u}}_1) + a_2^2 \cdot \bar{\mathbf{P}}_2' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2\} d\xi}{\int_0^{\xi_0} \{a_1^2 \cdot \bar{\mathbf{u}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 + 2a_1 \cdot a_2 \cdot \bar{\mathbf{u}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 + a_2^2 \cdot \bar{\mathbf{u}}_2' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2\} d\xi} \quad (12)$$

(12) 式が最小であるためには $(\partial/\partial a_i)(\omega^2) = 0$ 、($k = m\omega^2/g$ とする)

$$\left. \begin{aligned} 2a_1 \int_0^{\xi_0} (\bar{\mathbf{P}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 - k \bar{\mathbf{u}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_1) * d\xi \\ + a_2 \int_0^{\xi_0} (\bar{\mathbf{P}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 + \bar{\mathbf{P}}_2' \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 - 2k \bar{\mathbf{u}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2) \times d\xi = 0 \\ a_2 \int_0^{\xi_0} (\bar{\mathbf{P}}_2' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 + \bar{\mathbf{P}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 - 2k \bar{\mathbf{u}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2) d\xi \\ + 2a_2 \int_0^{\xi_0} (\bar{\mathbf{P}}_2' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 - k \bar{\mathbf{u}}_2' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2) d\xi = 0 \end{aligned} \right\} (13)$$

a_1, a_2 について零でない解が存在するためには、(13) 式の係数行列式が $|\det| = 0$ でなければならず、これより固有方程式が求まる。又 * 印の項のみを零とおくと 1 mode のみを対象とする Rayleigh の方程式となる。はじめに仮定した $\bar{\mathbf{P}}_1, \bar{\mathbf{P}}_2, \bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2$ についてこれらの積分項を計算すると、

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\xi_0} (\bar{\mathbf{P}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 - k \bar{\mathbf{u}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_1) d\xi \\ = \int_0^{\xi_0} \{\bar{v}_1 + \bar{w}_1 - k(\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2 + \bar{w}_1^2)\} d\xi \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\xi_0} (\bar{\mathbf{P}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 + \bar{\mathbf{P}}_2' \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 - 2k \bar{\mathbf{u}}_1' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2) d\xi \\ = \int_0^{\xi_0} \{\bar{u}_1 + \bar{v}_2 + \bar{w}_2 - 2k(\bar{u}_1 \bar{u}_2 + \bar{v}_1 \bar{v}_2 \\ + \bar{w}_1 \bar{w}_2)\} d\xi \\ \int_0^{\xi_0} (\bar{\mathbf{P}}_2' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 - k \bar{\mathbf{u}}_2' \cdot \bar{\mathbf{u}}_2) d\xi \\ = \int_0^{\xi_0} \{\bar{u}_2 - k(\bar{u}_2^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{w}_2^2)\} d\xi \end{aligned} \right\} (14)$$

4) 膜応力と変位

static なシェル理論により、 $\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2$ を求めて (14) 式の係数を計算しなければならない。

\mathbf{P}_1 に対しては $\bar{X}_1 = 0, \bar{Y}_1 = \bar{Z}_1 = 1$ として応力の式(文献 1) より

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_{\theta 1} &= -a, \quad \bar{N}_{x\theta 1} = -2a\xi + c_1 \\ \bar{N}_{x1} &= a\xi^2 - c_1\xi + c_2 \end{aligned} \right\} (15)$$

上蓋荷重が $N_{x\theta}$ として作用すると考えると

$$\pi a^2 \beta = \int_0^{2\pi} N_{x\theta 1} \sin \theta a d\theta \quad (\text{図 2}).$$

β は $m_2/m_1 =$ 上蓋の単位表面積重量/円筒の単位表面積重量、したがって応力の境界条件は $\xi = \xi_0$ で $\bar{N}_{x\theta} = a\beta, \bar{N}_{x1} = 0$ となり、(15) 式より c_1, c_2 を決定出来る、この膜応力に対応する変位は境界条件 $\xi = 0, \bar{u} = 0, \bar{v} = 0$ に対して次のように求められる(文献 1)。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1 &= (a^2/Et) \cdot \{\xi^3/3 - (2\xi_0 + \beta) \cdot \xi^2/2 \\ &\quad + (\xi_0^2 + \beta\xi_0 + \nu)\xi\} \\ \bar{v}_1 &= (a^2/Et) \cdot \{\xi^4/12 - (2\xi_0 + \beta) \cdot \xi^3/6 \\ &\quad + (\xi_0^2 + \beta\xi_0 - 4 - 3\nu) \cdot \xi^2/2 \\ &\quad + 2(1 + \nu)(2\xi_0 + \beta)\xi\} \\ \bar{w}_1 &= (a^2/Et) \cdot \{\xi^4/12 - (2\xi_0 + \beta) \cdot \xi^3/6 \\ &\quad + (\xi_0^2 + \beta\xi_0 - 4 - \nu) \cdot \xi^2/2 \\ &\quad + (2 + \nu)(2\xi_0 + \beta)\xi + \nu(\xi_0^2 + \beta\xi_0) \\ &\quad + 1\} \end{aligned} \right\} (16)$$

一方 \mathbf{P}_2 に関しては $\bar{X}_2 = 1, \bar{Y}_2 = \bar{Z}_2 = 0$ に対して

$$\bar{N}_{\theta 2} = 0, \quad \bar{N}_{x\theta 2} = c_1, \quad \bar{N}_{x2} = -a\xi - c_1\xi + c_2 \quad (17)$$

上蓋より作用する荷重は $N_{\theta} a = \int_0^{\xi_0} (m_2 r^2/m_1 a^2) dr$ 、(図 3) より $N_{\theta} = a\beta/4$ 、したがって応力の境界条件は $\xi = \xi_0$ で $\bar{N}_{x\theta 2} = 0, \bar{N}_{x2} = a\beta/4$ となる。 \mathbf{P}_1 の場合と同様に膜変位は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_2 &= (a^2/Et) \cdot \{-\xi^2/2 + (\xi_0 + \beta/4)\xi\} \\ \bar{v}_2 &= (a^2/Et) \cdot \{-\xi^3/6 + (\xi_0 + \beta/4)\xi^2/2\} \\ \bar{w}_2 &= (a^2/Et) \cdot \{-\xi^3/6 - \nu \cdot \xi \\ &\quad + (\beta/4 + \xi_0)(\nu + \xi^2/2)\} \end{aligned} \right\} (18)$$

4. 計 算 例

日本機械学会の「原子炉耐震設計法研究分科会」において現在までに計算されたものの内、比較のため二つの type F 1, F 2 を選び、本方法によって計算を行なった。

type F1 は蓋の厚さが円筒部の4倍, type F2 は蓋と円筒部がほぼ同じ厚さである(表1).

type F2 について, ポアソン比 $\nu=1/3$, ヤング率 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, 単位面積重量 $m=7.86 \times t \text{ gr/cm}^2$ として諸量を(16), (18), (14)に代入すると積分は次のようになる.

$$\int_0^{60} (\bar{P}_1' u_1 - k \bar{u}_1' \bar{u}_1) d\xi = 1.81379 \times 10^3 (a^2/Et) - 4.47068 \times 10^5 \times k \times (a^2/Et)^2$$

$$\int_0^{60} (\bar{P}_2' u_2 + \bar{P}_2' \bar{u}_1 - 2k \bar{u}_1' \bar{u}_2) d\xi = 5.00933 \times 10^2 (a^2/Et) - 2 \times 6.18029 \times 10^4 \times k \times (a^2/Et)^2$$

$$\int_0^{60} (\bar{P}_2' \bar{u}_2 - k \bar{u}_2' \bar{u}_2) d\xi = 5.6133 \times 10 \times (a^2/Et) - 8.77499 \times 10^3 \times k \times (a^2/Et)^2$$

(13)式より $|\det|=0$ とすると,

$$4.13657 \times 10^3 \times k^2 (a^2/Et)^2 - 4.02085 \times 10^2 \times k \times (a^2/Et) + 1.5632 = 0$$

この固有方程式より2つの値 $\frac{m\omega^2}{g} \left(\frac{a^2}{Et} \right) = \begin{pmatrix} 0.04057 \times 10^{-1} \\ 0.93145 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$

が求まる. これより $f = \frac{\omega}{2\pi} = \begin{pmatrix} 207.49 \\ 994.19 \end{pmatrix} \text{ Hz}$ となる.

F2 の振動モードは(図4)に示す. 他の計算値との比較は type F1 と共に(表1)に示す.

(1969年7月31日受理)

参考文献

- 1) Y. Tsuboi and K. Akino: Theories and Applications

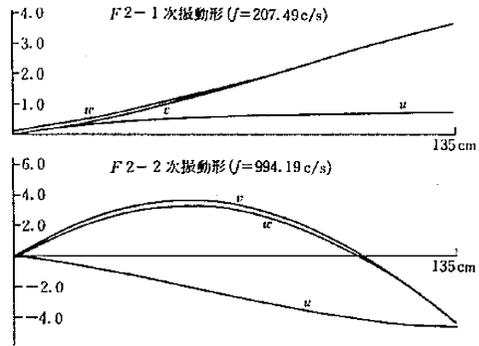


図 4

表 1

l=135cm	日本機械学会データ		本計算		
	板厚 mm	固有振動数 Hz	固有振動数 Hz		
a=250cm	円筒部	端板	*	Rayleigh-Ritz 法**	Rayleigh-Ritz 法
F1	1.0	4.0	151.6	185.7	163.02
F2	4.5	4.5	201.6	217.9	207.49

* 回転対称殻体の汎用固有値解析プログラム SHELVIA による(回転殻をわきりに分割して伝達マトリクスを使用)
 ** 梁理論により曲げと剪断変形, 回転慣性考慮

of Antisymmetrical Bending State for Spherical Shell and Cylindrical Shell, Rep of Inst of Industrial Science, Univ of Tokyo 11, 2 (1961.9)

- 2) S. チモシェンコ: 工業振動学, 東京図書
- 3) 日本機械学会: 「原子炉容器及び配管系の耐震設計法に関する試験研究」43.10.28

東京大学生産技術研究所報告刊行予告

第 19 卷 第 4 号

沢井 善三郎・森 政弘・山口 楠雄 著

精製糖工程の総合制御システム

TOTAL CONTROL SYSTEM OF SUGAR REFINERY

昭和 37 年以来, 精製糖工程について受託研究として自動化の研究を行ってきた. この研究は, 精糖プロセス, 制御システムおよび機器についての調査, 解析, 開発, 設計および実験を含むものであった. この開発の結果は, 昭和 40 年に東京, 品川埠頭に完成された名古屋精糖(株)東京工場の生産工程に全面的に利用されている.

精糖工程の制御にはそれまであまり明確にわかっていない特有の問題点もかなりあったが, 各プロセスおよび全工程についての検討の結果大幅に自動化された制御システムの開発を行ないかなり満足すべき結果を得ることができた. この工程にはシーケンス制御と計算制御を採用し, 種々の回分式プロセスとくに結晶プロセスを含む生産工程のほとんど完全な自動運転が可能となっている. また, この種の工程において工程全体についての総合的な生産管理がはじめて可能になった.

以上のごとき精製糖工程の制御システムについて, 各プロセスの制御, 計装, 総合的なシステムおよび必要な特殊計測器の開発とそれらの結果について報告する.
 (1969年10月末発行予定)