研　究　速　報
UDC 539.313

Kirchhoff-Love の仮定に基づく連続体基礎論

Foundation of the Theory of the Continuum based on Kirchhoff-Love Hypotheses

中　村　輝　男*
Teruo NAKAMURA

序　Kirchhoff-Love の仮定に関する矛盾

ガリレオが片持梁の破壊について考察を始めて以来, Varignon, Bernoulli, Euler, Navier[1] 等の手を経て後 Kirchhoff[3] は平板について次の事柄を仮定した. すなわち平面保持および法線保持と中央面の伸縮を無視することである. シェルに関しては, 中央面の伸縮を無視することは出来ないが, たとえば Naghdi[2] の表現を借りると, $e_{\alpha 3}=e_{33}=0$ となり, 厚さ変化を無視する仮定が加えられている. 一方, Love[3] の仮定とは, 応力に関するもので, 厚さ方向の応力 σ^{33} を無視するものである.

この二つの仮定, すなわち歪に関する Kirchhoff の仮定, および応力に関する Love の仮定に基づく連続体を簡単のために本論では K-L 連続体と呼ぶ, シェル, アーチ, 平板, 梁などがその代表的なものであるが, これらの理論はいずれも次の二つの矛盾を含んでいる.

i) 剪断歪　$e_{\alpha 3}=0$ と仮定して, なおかつ面外剪断力を剪断応力度の積分量として定義すること.

Generalized Hooke's Law によれば,

$$\sigma^{\alpha 3}=G^{\alpha 3 \gamma 3}e_{\gamma 3} \qquad (1)$$

剪断歪をゼロとする立場からは, 剪断応力度の存在を認めることが不可能になり, したがってこれの積分量として面外剪断力を定義することは困難である. また剪断応力が0であるという考え方は経験的事実に反するものである.

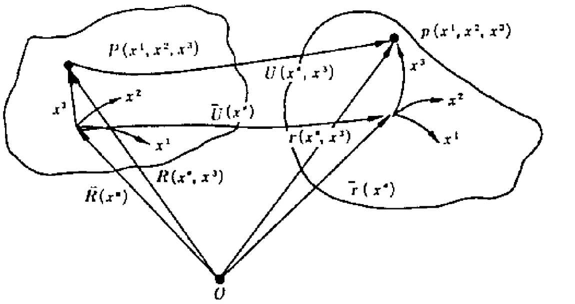
ii) $e_{33}=0$, および $\sigma^{33}=0$ を同時に仮定すること,

$$\begin{bmatrix}\sigma^{\alpha\beta}\\ \sigma^{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G^{\alpha\beta\gamma\delta} & G^{\alpha\beta 33}\\ G^{33\gamma\delta} & G^{3333}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{\gamma\delta}\\ e_{33}\end{bmatrix} \qquad (2)$$

(2)式にて, e_{33} と σ^{33} を共に0とおくことは, $e_{\gamma\delta}$ が0でなければ, $G^{33\gamma\delta}=0$ が成立する. Generalized Hooke's Law は物質の機械的な性質を示すいわゆる Constitutive equation である. これを考えると, その矛盾は明らかである. 物質が変らない限り, この関係は不変であり, したがって仮定によりこれをゆがめることは, その意味が明確な場合を除いて避けられなければならない. 本論の目的はこれらの矛盾について考察し, 少なくとも明確な基盤の上に立つ統一論を展開しようとするものである.

1.　変形前後の媒体内の点の対応, および Kirchhoff の仮定 (幾何学的仮定)

応力定義は Green[4] 等のものに従い, 変形前後の対応をベクトルで行なうことにする. 図で示されるように,



位置ベクトルおよび変位ベクトルは

$$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{U}=\boldsymbol{r} \qquad (3)$$

いま, この変形前後の点を示す位置ベクトルが Convected coordinate x^3 について Maclaurin 展開可能[5][6] であるとする.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(x^\alpha,x^3)&=\boldsymbol{R}(x^\alpha,0)+x^3\frac{\partial\boldsymbol{R}(x^\alpha,0)}{\partial x^3}+\frac{(x^3)^2}{2}\frac{\partial^2\boldsymbol{R}(x^\alpha,0)}{(\partial x^3)^2}+\cdots\cdots\\&=\boldsymbol{R}(x^\alpha,0)+x^3\boldsymbol{G}_3(x^\alpha,0)+\frac{(x^3)^2}{2}\boldsymbol{G}_{3,3}(x^\alpha,0)+\cdots\cdots\end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(x^\alpha,x^3)&=\boldsymbol{r}(x^\alpha,0)+x^3\frac{\partial\boldsymbol{r}(x^\alpha,0)}{\partial x^3}+\frac{(x^3)^2}{2}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}(x^\alpha,0)}{(\partial x^3)^2}+\cdots\cdots\\&=\boldsymbol{r}(x^\alpha,0)+x^3\boldsymbol{g}_3(x^\alpha,0)+\frac{(x^3)^2}{2}\boldsymbol{g}_{3,3}(x^\alpha,0)+\cdots\cdots\end{aligned} \qquad (5)$$

(3)(4)(5)式より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{r}(x^\alpha,0)-\boldsymbol{R}(x^\alpha,0)&+x^3[\boldsymbol{g}_3(x^\alpha,0)-\boldsymbol{G}_3(x^\alpha,0)]+\frac{(x^3)^2}{2}[\boldsymbol{g}_{3,3}(x^\alpha,0)\\&-\boldsymbol{G}_{3,3}(x^\alpha,0)]+\cdots\cdots\end{aligned} \qquad (6)$$

一般の場合, この展開の収束性について何らの保証は得られないが, K-L 連続体のごとく, 一方のみが他の方向に比較して, 微小な寸法を有する場合には, 最小寸法の方向に x^3 軸を選ぶことが可能あり, また, このような連続体の変形は, x^3 に対応する変化が微小である場合が多い. したがって位置ベクトル $\boldsymbol{r}(x^\alpha,x^3)$ の x^3 に関する1階導関数は微小であり, さらに高階のものにつ

* 東京大学生産技術研究所　第5部

いても同様のことがいえる．ゆえに少なくとも K-L 連続体については Maclaurin 展開の収束性は保証されているといえよう．変形前の状態において，x^3 座標は x^1x^2 座標面に直交する直線座標とする．位置ベクトル $\boldsymbol{R}(x^\alpha, x^3)$ の1階導関数は，単位ベクトルとなり，これを $\bar{G}_3$ とする(4)式は，

$$\boldsymbol{R}(x^\alpha, x^3)=\boldsymbol{R}(x^\alpha)+x^3\bar{G}_3(x^\alpha) \tag{7}$$

変形後の状態において x^3 軸は一般に曲線座標となり，単に x^3 について一次の項のみの表現では済まされぬ場合がある．完全な平面保持の成立する場合には，x^3 軸は変形後の状態にても直線座標であり，したがって(7)式と同様の表現が与えられる．

$$\boldsymbol{r}(x^\alpha, x^3)=\bar{\boldsymbol{r}}(x^\alpha)+x^3\bar{\boldsymbol{g}}_3(x^\alpha) \tag{8}$$

しかし，この場合序文で指適した矛盾を避けることができない．ただ変形後で x^3 方向が主歪方向に一致し，x^1x^2 座標面が主歪面であるような場合 (Pure Bending) にはこの状態が成立する．一般にはあくまでも近似的に平面および法線保持が成立しているものとみなさなければならない．つまり，$\boldsymbol{r}(x^\alpha, x^3)$ の x^3 に対応する変化が微小であれば(7)式の表現で0次1次の項に比較して，二次以上の項は無視できるとする立場が，やはり，(8)式の表現を興えることになる．逆にいって，x^3 の二次以上の項を無視する立場で変形前後の対応を考える限りは，剪断歪が微小で近似的に平面および法線保持が成立している状態を仮定したことになる．

(3)(7)(8)式より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}&=\bar{\boldsymbol{r}}(x^\alpha)-\boldsymbol{R}(x^\alpha)+x^3(\bar{\boldsymbol{g}}_3-\bar{G}_3)\\&=\bar{U}_\alpha\bar{G}^\alpha+\bar{U}_3\bar{G}^3\\&=(u_\alpha+x^3\beta_\alpha)\bar{G}^\alpha+(w_3+x^3\beta_3)\bar{G}^3\end{aligned} \tag{9}$$

一方歪については

$$e_{kl}=\frac{1}{2}[U_{k/l}+U_{l/k}+U^m{}_{/k}U_{m/l}] \tag{10}$$

(10)式を面量へ変換[2]すると，

$$\begin{aligned}2e_{\alpha\beta}=&[\mu_\alpha{}^\nu\gamma_{\nu\beta}+\mu_\beta{}^\nu\gamma_{\nu\alpha}+x^3(\mu_\alpha{}^\nu\kappa_{\nu\beta}+\mu_\beta{}^\nu\kappa_{\nu\alpha})\\&+2\phi_{\alpha\beta}+x^3(\psi_{\alpha\beta}+\psi_{\beta\alpha})+2(x^3)^2\Omega_{\alpha\beta}]\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}2e_{\alpha3}=&\beta_\alpha+\gamma_{\alpha3}+\beta_\gamma\gamma_\alpha{}^\gamma+\beta_3\gamma_{\alpha3}\\&+x^3(\beta_{3,\alpha}+\beta_\gamma\kappa_\alpha{}^\gamma+\beta_3\kappa_{\alpha3})\end{aligned} \tag{12}$$

$$e_{33}=\beta_3+\frac{1}{2}\beta^\gamma\beta_\gamma+\beta_3\beta_3 \tag{13}$$

ここで，$\gamma_{\alpha\beta}=u_{\alpha\|\beta}-b_{\alpha\beta}w$，$\kappa_{\alpha\beta}=\beta_{\alpha\|\beta}-b_{\alpha\beta}\beta_3$

$\gamma_{\alpha3}=w_{\|\alpha}+b_\alpha{}^\lambda u_\lambda$，$\kappa_{\alpha3}=\beta_{3\|\alpha}+b_\alpha{}^\lambda\beta_\lambda$

$$\phi_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\gamma_\alpha{}^\nu\gamma_{\nu\beta}+\gamma_{\alpha3}\gamma_{\beta3})$$

$$\psi_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}[\gamma_{\nu\beta}\kappa_\alpha{}^\nu+\gamma_{\alpha3}\kappa_{\beta3}]$$

$$\Omega_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\kappa_{\nu\alpha}\kappa_\beta{}^\nu+\kappa_{\beta3}\kappa_{\alpha3}),\quad \mu_\beta{}^\nu=\delta_\beta{}^\nu-b_\beta{}^\nu\cdot x^3$$

$b_\beta{}^\nu$：第二基本計量

$\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha3}, \kappa_{\alpha3}$ などが K-L 連続体の Strain Measure であるが，これらは一種の中間量である．したがってこれらの二次の項も $\phi_{\alpha\beta}, \psi_{\alpha\beta}, \Omega_{\alpha\beta}$ のごとき表現を与えて，独立な扱いをしている．

厳密に平面および法線保持を主張すると，矛盾を避けることはできない．(5)式において2次以上を0次1次に比較して省略するという立場に立つならば

$$e_{\alpha3}\fallingdotseq0,\quad e_{33}\fallingdotseq0 \tag{14}$$

が従来の仮定に代わるものである．(12)(13)式より

$$\beta_\alpha=-\gamma_{\alpha3}+\gamma_\alpha{}^\rho\gamma_{\rho3},\quad \beta_3=-\frac{1}{2}\gamma_3{}^\lambda\gamma_{\lambda3} \tag{15}$$

(16)

(15)および(16)式は近似的に(14)式を満足するものであり，未知量 β が，消去され[7]たことを示している．

変形前後の対応が Vectorial に(9)式で行なわれている場合には，$e_{\alpha3}, e_{33}$ が微小であることを前提にしている．したがって Kirchhoff の仮定に基づかぬと主張しながら変位を(9)式の形で表現している理論[2)8)]は，結果的には Kirchhoff の仮定に基づいたものと大同小異である．

これに基づかぬ場合には，x^3 について0次1次2次……の項のベクトルを未知量とした扱いが必要であろう．しかし，この場合 Surface Condition が問題となり，この点を矛盾なく扱つた理論は見当たらぬようである．

2. Love の仮定（物理的仮定）

Kirchhoff の仮定が幾何学的であるのに対して，Love の仮定は応力に関するものゆえ，いわば物理的なものである．本節においては，三次元弾性論から，二次元もしくは一次元化して行く際に，応力について，どのような仮定がなされなければならないかを明らかにしようとするものである．

三次元弾性体に関する Constitutive eq. は，

$$\sigma^{ij}=E^{ijkl}e_{kl} \tag{17}$$

$$E^{ijkl}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[G^{ik}G^{jl}+G^{il}G^{jk}+\frac{2\nu}{1-2\nu}G^{ij}G^{kl}\right] \tag{18}$$

E：Young's modulus, ν；ポアソン比 G^{ij}：変形前の計量反変成分座標を $G^{\alpha3}=0$，$G^{33}=1$ のごとくに選ぶと，(1)，(2)式の互に独立な変換関係が得られる．

(2)式より e_{33} を消去すると，

$$\sigma^{\alpha\beta}-\frac{E^{\alpha\beta33}}{E^{3333}}\sigma^{33}=\left(E^{\alpha\beta\gamma\delta}-\frac{E^{\alpha\beta\gamma\delta}E^{33\gamma\delta}}{E^{3333}}\right)e_{\gamma\delta} \tag{19}$$

ここで $\sigma^{\alpha\beta}\gg(E^{\alpha\beta33}/E^{3333})\sigma^{33}$ と仮定すると，二次元化

された Stress-Strain 関係式が得られる．この仮定が Love の仮定に準ずるもので，本論にて物理的仮定と呼ぶものである．したがって，

$$\sigma^{\alpha\beta}=G^{\alpha\beta\gamma\delta}e_{\gamma\delta} \tag{20}$$

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{E}{1-\nu^2}\Big[\nu G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta}+\frac{1-\nu}{2}(G^{\alpha\gamma}G^{\beta\delta}+G^{\alpha\delta}G^{\beta\gamma})\Big] \tag{21}$$

同様にして，一次元的な場合には，座標を $G^{\alpha 3}=0$, $G^{12}=G^{21}=0$, $G^{33}=G^{22}=1$ のごとくに選ぶと，(19) 式は，

$$\begin{bmatrix}\sigma^{11}\\ \sigma^{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G^{1111} & G^{1122}\\ G^{2211} & G^{2222}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{11}\\ e_{22}\end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma^{12}\\ \sigma^{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G^{1212} & G^{1221}\\ G^{2112} & G^{2121}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{12}\\ e_{21}\end{bmatrix} \tag{23}$$

と互に独立な二つの変換に分けられる．

(22)式より e_{22} を消去すると，

$$\sigma^{11}-\nu\sigma^{22}=E\cdot(G^{11})^2\cdot e_{11}$$

ここで $\sigma_{11}\gg\nu\sigma^{22}$ を仮定すると，アーチの応力歪関係式が得られる．すなわち，

$$\sigma^{11}=E\cdot(G^{11})^2\cdot e_{11} \tag{24}$$

さらに座標を $G^{11}=1$ のごとくに選ぶなら，梁の応力歪関係が得られる．

$$\sigma^{11}=E\cdot e_{11} \tag{25}$$

1 節および本節において述べられた二つの仮定に基づく連続体を Kirchhoff および Love にちなんで，改めて K-L 連続体と定義する．これは三次元連続体の Subspace を構成していることはいうまでもない．

3. 基 本 式

筆者は文献 (10) にて，初期応力を考慮した K-L 連続体のすべての基本式を提出する変分定理を発表した．その主旨は，Hu-Washizu Principle[9] を二次元化したものに，さらに Kirchhoff の仮定に基づく条件式 (15), (16)を変位で表現したものを付帯条件として，加えたものである．この Functional を示すと，

$$\begin{aligned}
&F(u_\alpha, w, \beta_\alpha, \beta_3, \gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}, \phi_{\nu\beta}, \psi_{\nu\beta}, \Omega_{\nu\beta},\\
&N^{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}, \widetilde{N}^{\nu\beta}, \widetilde{M}^{\nu\beta}, Q, T)\\
&=\iint[W(\gamma_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}, \phi_{\nu\beta}, \psi_{\nu\beta}, \Omega_{\nu\beta})+\mathring{N}^{\beta\alpha}\gamma_{\alpha\beta}\\
&+\mathring{M}^{\beta\alpha}K_{\alpha\beta}+\mathring{\widetilde{N}}^{\nu\beta}\phi_{\nu\beta}+\mathring{\widetilde{M}}^{\nu\beta}\varphi_{\nu\beta}+\mathring{K}^{\nu\beta}\Omega_{\nu\beta}\\
&-\overset{*}{N}{}^{\beta\alpha}(\gamma_{\alpha\beta}-A_{\alpha\beta})-\overset{*}{M}{}^{\beta\alpha}(\kappa_{\alpha\beta}-B_{\alpha\beta})\\
&-\overset{*}{\widetilde{N}}{}^{\alpha\beta}\{\phi_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}(A_\alpha{}^\nu A_{\nu\beta}+A_{\alpha3}A_{\beta3})\}\\
&-\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}(\psi_{\alpha\beta}-B_\alpha{}^\nu A_{\nu\beta}+A_{\alpha3}B_{\beta3})\\
&-\overset{*}{K}{}^{\alpha\beta}\{\Omega_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}(B_\alpha{}^\nu B_{\nu\beta}+B_{\alpha3}B_{\beta3})\}\\
&+\overset{*}{Q}{}^\alpha(\beta_\alpha+A_{\alpha3}-A_3{}^\lambda A_{\lambda3})\\
&+\overset{*}{T}(\beta_3+\frac{1}{2}A_3{}^\lambda A_{3\lambda})-P^\alpha u_\alpha-P_3w\}da\\
&-\int_\sigma\nu_\beta(\overset{*}{\bar{n}}{}^{\beta\lambda}+\overset{*}{\bar{m}}{}^{\beta\lambda}+\overset{*}{\bar{q}}{}^\beta+\overset{*}{\bar{m}}{}^\beta)ds\\
&-\int_\sigma\nu_\beta\{\overset{*}{n}{}^{\beta\lambda}(u_\lambda-\bar{u}_\lambda)+\overset{*}{m}{}^{\beta\lambda}(\beta_\lambda-\bar{\beta}_\lambda)\\
&+\overset{*}{q}{}^\beta(w-\bar{w})+\overset{*}{m}{}^\beta(\beta_3-\bar{\beta}_3)\}ds
\end{aligned} \tag{26}$$

(26)式の第一変分の結果が本節にて示されるものである．

i) 釣合方程式

$$\begin{aligned}
&N^{\beta\lambda}{}_{\parallel\beta}-\overset{*}{\widetilde{N}}{}^{\alpha\beta}b_\alpha{}^\lambda A_{\beta3}+(\overset{*}{\widetilde{N}}{}^{\alpha\beta}A_\beta{}^\lambda)_{\parallel\alpha}\\
&-\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}b_\alpha{}^\lambda B_{\beta3}+(\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}B_\alpha{}^\lambda)_{\parallel\beta}-b_\alpha{}^\lambda Q^\alpha\\
&+\overset{*}{Q}{}^\alpha b_\rho{}^\lambda A_\alpha{}^\rho-(\overset{*}{Q}{}^\alpha A_3{}^\lambda)_{\parallel\alpha}-\overset{*}{T}b_\gamma{}^\lambda A_3{}^\gamma+P^\lambda\\
&=0
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
&b_{\nu\beta}N^{\beta\nu}+\overset{*}{\widetilde{N}}{}^{\alpha\beta}b_\alpha{}^\nu A_{\nu\beta}+(\overset{*}{\widetilde{N}}{}^{\alpha\beta}A_{\beta3})_{\parallel\alpha}\\
&+\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}b_{\nu\beta}B_\alpha{}^\nu+(\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}B_{\beta3})_{\parallel\alpha}+Q^\alpha{}_{\parallel\alpha}\\
&-(\overset{*}{Q}{}^\alpha A_\alpha{}^\rho)_{\parallel\rho}-\overset{*}{Q}{}^\alpha b_\alpha{}^\rho A_{\rho3}+(\overset{*}{T}A^\gamma)_{\parallel\gamma}+P^3\\
&=0
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\overset{*}{Q}{}^\lambda=&\overset{*}{M}{}^{\beta\lambda}{}_{\parallel\beta}-\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}b_\beta{}^\lambda A_{\alpha3}+(\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}A_\beta{}^\lambda)_{\parallel\alpha}\\
&-\overset{*}{K}{}^{\alpha\beta}b_\alpha{}^\lambda B_{\beta3}+(\overset{*}{K}{}^{\alpha\beta}B_\beta{}^\lambda)_{\parallel\alpha}
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\overset{*}{T}=&b_{\nu\beta}\overset{*}{M}{}^{\beta\nu}+\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}b_\alpha{}^\nu A_{\nu\beta}+(\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}A_{\alpha3})_{\parallel\beta}\\
&+\overset{*}{K}{}^{\alpha\beta}b_{\lambda\alpha}B_\beta{}^\lambda+(K^{\alpha\beta}B_{\beta3})_{\parallel\alpha}
\end{aligned} \tag{30}$$

$\overset{*}{Q}{}^\lambda$ および $\overset{*}{T}$ は，Lagrange's Multiplier であり，この物理的な意味は，$\sigma^{\alpha3}, \sigma^{33}$ の厚さ方向へ積分した合応力に当たるものである．Kirchhoff および Love の仮定により，(26) 式中で $\sigma^{\alpha3}, \sigma^{33}$ の項は他の項に比較して微小ゆえ，省略されていたものであるが，付帯条件として (15), (16) 式を採用することにより，(26), (27) 式にてその積分量が定義された．

ii) 境界条件

$$\left.\begin{aligned}
&\nu_\beta\bar{n}^{\beta\lambda}=\nu_\beta(N^{\beta\lambda}+\widetilde{N}^{\beta\alpha}A_\alpha{}^\lambda+\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}B_\alpha{}^\lambda\\
&\qquad-\overset{*}{Q}{}^\beta A_3{}^\lambda)=\nu_\beta n^{\beta\lambda}\\
&\nu_\beta\bar{m}^{\beta\lambda}=\nu_\beta(M^{\beta\lambda}+\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}A_\alpha{}^\lambda+\overset{*}{K}{}^{\alpha\beta}B_\alpha{}^\lambda)\\
&\qquad=\nu_\beta m^{\beta\lambda}\\
&\nu_\beta\bar{q}^\beta=\nu_\beta(Q^\beta-\overset{*}{Q}{}^\alpha A_\alpha{}^\beta+\overset{*}{N}{}^{\alpha\beta}A_{\alpha3}\\
&\qquad+\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}B_{\alpha3}+TA_3{}^\beta)=\nu_\beta q^\beta\\
&\nu_\beta\bar{m}^\beta=\nu^\beta(\overset{*}{\widetilde{M}}{}^{\alpha\beta}A_{\alpha3}+\overset{*}{K}{}^{\alpha\beta}B_{\alpha3})=\nu_\beta m^\beta
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$u_\lambda-\bar{u}_\lambda=0,\quad \beta_\lambda-\bar{\beta}_\lambda=0,\quad w-\bar{w}=0,\quad \beta_3-\bar{\beta}_3=0 \tag{32}$$

ただしアステリスクは，初期応力と未知量との和を示し，たとえば，$\overset{*}{N}^{\alpha\beta}=\overset{\circ}{N}^{\alpha\beta}+N^{\alpha\beta}$ を意味する．

初期応力状態は線型の基本式を満足するものとする．

合応力については

$$\left.\begin{aligned}
N^{\alpha\beta}&=\int_{-h/2}^{h/2}\mu\sigma^{\alpha\nu}\mu_\nu{}^\beta dx^3,\quad \tilde{N}^{\alpha\beta}=\int\mu\sigma^{\alpha\beta}dx^3\\
M^{\alpha\beta}&=\int\mu\sigma^{\alpha\nu}\mu_\nu{}^\beta x^3dx^3,\quad \tilde{M}^{\alpha\beta}=\int\mu\sigma^{\alpha\beta}x^3dx^3\\
K^{\alpha\beta}&=\int\mu(x^3)^2\sigma^{\alpha\beta}dx^3\\
N^{\alpha\beta}&=\tilde{N}^{\alpha\beta}-b_\nu{}^\beta\tilde{M}^{\alpha\nu},\quad M^{\alpha\beta}=\tilde{M}^{\alpha\beta}-b_\nu{}^\beta K^{\alpha\nu}\\
\mu_\alpha{}^\nu&=\delta_\alpha{}^\nu-b_\alpha{}^\nu x^3\\
\mu&=\sqrt{\frac{|G_{ij}|}{|\bar{G}_{\alpha\beta}|}}=1-2Hx^3+K(x^3)^2
\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

H: 平均曲率，K: 全曲率

iii）歪一変位関係式

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\beta}&=A_{\alpha\beta}=u_{\alpha\|\beta}-b_{\alpha\beta}w\\
\kappa_{\alpha\beta}&=B_{\alpha\beta}=\beta_{\alpha\|\beta}-b_{\alpha\beta}\beta_3\\
\gamma_{\alpha3}&=A_{\alpha3}=w_{\|\alpha}+b_\alpha{}^\lambda u_\lambda\\
\kappa_{\alpha3}&=B_{\alpha3}=\beta_{3\|\alpha}+b_\alpha{}^\lambda\beta_\lambda\\
\beta_\alpha&=-A_{\alpha3}+A_3{}^\lambda A_{\lambda3}\\
\beta_3&=-\frac{1}{2}A_3{}^\lambda A_{\lambda3}\\
\phi_{\alpha\beta}&=\frac{1}{2}(A_\alpha{}^\nu A_{\nu\beta}+A_{\alpha3}A_{\beta3})\\
\psi_{\alpha\beta}&=A_{\nu\beta}B_\alpha{}^\nu+A_{\alpha3}B_{\beta3}\\
\Omega_{\alpha\beta}&=\frac{1}{2}[B_\alpha{}^\nu B_{\nu\beta}+B_{\alpha3}B_{\beta3}]
\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

$b_{\nu\beta}, b_\beta{}^\nu$: 第二基本計量の共変，混合成分

iv）合応力一歪関係式 (Constitutive Equation)

$$\begin{pmatrix}N^{\alpha\beta}\\ M^{\alpha\beta}\\ \tilde{N}^{\alpha\beta}\\ \tilde{M}^{\alpha\beta}\\ K^{\alpha\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overset{0}{D}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} & \overset{(1)}{D}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} & \overset{(0)}{C}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} & \overset{(1)}{C}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} & \overset{(2)}{C}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}\\
 & \overset{(2)}{D}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} & \overset{(1)}{C}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} & \overset{(2)}{C}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} & \overset{(3)}{C}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}\\
 & & \overset{(0)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} & \overset{(1)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} & \overset{(3)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}\\
 \text{SYM.} & & & \overset{(2)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} & \overset{(3)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}\\
 & & & & \overset{(4)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\gamma_{\gamma\delta}\\ \kappa_{\gamma\delta}\\ \phi_{\gamma\delta}\\ \psi_{\gamma\delta}\\ \Omega_{\gamma\delta}\end{pmatrix}\quad(35)$$

$$\overset{(n)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}=\int_{-h/2}^{h/2}\mu G^{\alpha\beta\gamma\delta}(x^3)^n dx^3\quad(36)$$

$$\overset{(n)}{C}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}=\overset{(n)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}-b_\nu{}^\alpha\overset{(n+1)}{B}{}^{\nu\beta\gamma\delta}\quad(37)$$

$$\overset{(n)}{D}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}=\overset{(n)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}-b_\nu{}^\alpha\overset{(n+1)}{B}{}^{\nu\beta\gamma\delta}-b_\nu{}^\beta\overset{(n+1)}{B}{}^{\alpha\nu\gamma\delta}+b_\nu{}^\beta b_\eta{}^\alpha\overset{(n+2)}{B}{}^{\nu\eta\gamma\delta}\quad(38)$$

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta}=(\mu^{-1})_\lambda{}^\alpha(\mu^{-1})_\rho{}^\beta(\mu^{-1})_\eta{}^\gamma(\mu^{-1})_\kappa{}^\delta\bar{G}^{\lambda\rho\eta\kappa}\quad(39)$$

$$\bar{G}^{\lambda\rho\eta\mu}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\nu\bar{G}^{\lambda\rho}\bar{G}^{\eta\mu}+\frac{1-\nu}{2}\times(\bar{G}^{\lambda\eta}\bar{G}^{\rho\mu}+\bar{G}^{\lambda\mu}\bar{G}^{\rho\eta})\right]\quad(40)$$

$$(\mu^{-1})_\lambda{}^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}(x^3)^n(b^n)_\lambda{}^\alpha\quad(41)$$

$$\left.\begin{aligned}
&(b^0)_\lambda{}^\alpha=\delta_\lambda{}^\alpha,\quad(b^1)_\lambda{}^\alpha=b_\lambda{}^\alpha\\
&(b^n)_\lambda{}^\alpha=b_{\omega_1}{}^\alpha b_{\omega_2}{}^{\omega_1}b_{\omega_3}{}^{\omega_2}\cdots\cdots b_\lambda{}^{\omega_{n-1}}
\end{aligned}\right\}\quad(42)$$

$\bar{G}^{\alpha\beta}$ は中央面の第一基本計量反変成分である．

(36), (39), (40), (41)式より

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(0)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}=h\bar{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}\\
&\overset{(1)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}=-\frac{h^3H}{6}\bar{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}+\frac{h^3}{12}(b_\mu{}^\delta\bar{G}^{\alpha\beta\gamma\mu}\\
&\qquad+b_\eta{}^\gamma\bar{G}^{\alpha\beta\eta\delta}+b_\rho{}^\beta\bar{G}^{\alpha\rho\gamma\delta}\\
&\qquad+b_\lambda{}^\alpha\bar{G}^{\lambda\beta\gamma\delta})\\
&\overset{(2)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{h^3}{12}\bar{G}^{\alpha\beta\gamma\delta},\quad\overset{(3)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}=-\frac{h^5H}{40}\bar{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}\\
&\overset{(4)}{B}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{h^5}{80}\bar{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}
\end{aligned}\right\}\quad(43)$$

(43)式の各式はいずれも $1\gg\frac{h^3}{R^2}$ に基いて省略が行なわれている．

4. 結　　び

従来の理論，特に線型理論においては，平面および法線保持を主張しながらも，その数学的表現があいまいであったために，実際は近似的に平面法線保持を仮定したに等しかった．意味の上で矛盾を持つにもかかわらず，結果に誤りのなかった原因はここにあるといえよう．

最後に，貴重な助言を寄せられた大学院の登坂，大山両氏に心から感謝する次第である．

(1969 年 7 月 31 日受理)

参 考 文 献

1) TodHunter and Pearson: History of the Theory of Elasticity Dover Pub.
2) P.M. Naghdi: Foundation of Elastic Shell Theory Progress in Solid Mechanics Vol. 4 North-Holland Pub. Comp.
3) A.E.H. Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity Dover Pub.
4) Green and Zerna: Theoretical Elasticity Clarendon Press, 1954
5) Green, A.E. Laws & P.M. Naghdi: Procee. Camb Phil Soc Vol. 64 (1968) 895
6) 登坂宜好，角野晃二，坪井善勝：「殻理論について」日本建築学会大会講演梗概集 44.8
7) 角野晃二：Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells Based on Kirchhoff Hypothesis 坪井善勝還暦記念論文集, 1968
8) L.M. Habip: Theory of Elastic Shells in the Reference State Ingenieuv-Avchiv XXXIV Band 1965
9) K. Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity Pergamon Press 1968
10) 中村輝男，角野晃二，坪井善勝：「初期応力を考慮した非線型シエルの変分定理」日本建築学会大会学術講演梗概集，昭 44 年 8 月
11) Ernst Mach: 力学の発達とその歴史的批判的考察，内田老鶴圃
12) Historical Development of Energetical Principles in Elastomechanics Part I, Part II, Applied Mech. Review Vol. 19, Aug. Nov. 1966