研　究　速　報

UDC 539.31 : 531.258 : 517.948.32

境界線上の特異点およびその点の集中反力について

Some Considerations on the Singularity of the bourdary and concentrated reaction at its singular points

中　村　輝　男*

Teruo NAKAMURA

序

境界条件を変分定理によって導いた場合に，滑らかな曲線に沿っての一周積分で済まされているのが常である．しかし，実際問題の境界は，境界線が Smooth curve で構成されるよりは，特異点の存在する直線縁である場合が多い．一方一周積分が可能であるためには被積分関数の連続性がその区間において保証されなければならない．したがってこの特異点の存在と被積分関数のこの点における連続性についての考察が必要である．本論はこの境界線上の特異点とこの点に生ずる集中反力の関係についてこれを明らかにし，また Reissner が文献(1)で示した直接法を境界値問題に適用するアプローチをシェル，平板について展開しようとするものである．

1.　境界値問題について

簡単のために問題はすべて線型で考えることにする

Total Potential Energy は，

$$2I=\iint[N^{\beta\alpha}(u_{\alpha\|\beta}-b_{\alpha\beta}w)+M^{\beta\alpha}\beta_{\alpha\|\beta}+Q^{\alpha}(\beta_{\alpha}+w_{\|\alpha}+b_{\alpha}^{\lambda}u_{\lambda})-P^{\alpha}u_{\alpha}-P^{3}w]da-\int\nu_{\alpha}(\overline{N}^{\alpha\beta}u_{\beta}+\overline{M}^{\alpha\beta}\beta_{\beta}+\overline{Q}^{\alpha}w)ds \qquad (1)$$

$$N^{\alpha\beta}=\int\mu\mu_{\eta}^{\alpha}\sigma^{\eta\beta}dx^{3},\quad M^{\alpha\beta}=\int x^{3}\mu\mu_{\eta}^{\alpha}\sigma^{\eta\beta}dx^{3}$$

Q^{α} : Lagrange's Multiplier である．

b_{α}^{η} : 第二基本計量，$\overline{N}^{\alpha\beta}$, $\overline{M}^{\alpha\beta}$, $\overline{Q}^{\alpha}$: 境界力

$\nu=\nu_{\alpha}G^{\alpha}$ 法線ベクトル $u_{\eta}^{\alpha}=\delta_{\eta}^{\alpha}-x^{3}b_{\eta}^{\alpha}$

(1)式の共変微分の項を部分積分すると，

$$2I=\iint[-u_{\eta}(N^{\beta\eta}{}_{\|\beta}-Q^{\alpha}b_{\alpha}^{\eta}+P^{\alpha},\ -w(N^{\beta\alpha}b_{\alpha\beta}+Q^{\alpha}{}_{\|\alpha}+P^{3})+\beta_{\alpha}(Q^{\alpha}-M^{\beta\alpha}{}_{\|\beta})]da+\int\nu_{\beta}[\{(N^{\beta\eta}-b_{\alpha}^{\eta}M^{\alpha\beta})-(\overline{N}^{\beta\eta}-b_{\alpha}^{\eta}\overline{M}^{\beta\alpha})\}u_{\eta}-(M^{\beta\alpha}-\overline{M}^{\beta\alpha})w_{\|\alpha}+(Q^{\beta}-\overline{Q}^{\beta})w]dS \qquad (2)$$

ここで境界力および変位を境界線にそって，法線方向および接線方向に分ける．

$$\left.\begin{array}{l}G=\nu_{\alpha}\nu_{\beta}M^{\alpha\beta},\quad N=\nu_{\alpha}\nu_{\beta}N^{\alpha\beta}\\ H=\bar{\varepsilon}_{\alpha\gamma}\nu_{\beta}\nu^{\gamma}M^{\beta\alpha},\quad T=\bar{\varepsilon}_{\alpha\gamma}\nu_{\beta}\nu^{\gamma}N^{\beta\alpha}\end{array}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}w_{\|\alpha}=\nu_{\alpha}\dfrac{\partial w}{\partial\nu}+\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\nu^{\beta}\dfrac{\partial w}{\partial S}\\ u_{\alpha}=\bar{\varepsilon}_{\alpha\gamma}\nu^{\gamma}u^{(\lambda)}+\nu_{\alpha}u^{(\nu)}\end{array}\right\} \qquad (4)$$

(3), (4)式を用いると，(2)式の線積分は，

$$\int\Big[(\bar{\varepsilon}_{\eta\gamma}\nu_{\beta}\nu^{\gamma}N^{\beta\eta}-\bar{\varepsilon}_{\eta\gamma}\nu_{\beta}\nu^{\gamma}b_{\alpha}^{\eta}M^{\beta\alpha}-\overline{T})u^{(\lambda)}\ (\nu_{\eta}\nu_{\beta}N^{\eta\beta}-\nu_{\beta}\nu_{\eta}b_{\alpha}^{\eta}M^{\beta\alpha}-\overline{N})u^{(\nu)}-(\nu_{\alpha}\nu_{\beta}M^{\alpha\beta}-\overline{G})\frac{\partial w}{\partial\nu}(\bar{\varepsilon}_{\alpha\gamma}\nu_{\beta}\nu^{\gamma}M^{\beta\alpha}-\overline{H}\frac{\partial w}{\partial S})+\nu_{\beta}(Q^{\beta}-\overline{Q}_{\beta})w\Big]ds \qquad (5)$$

したがって Total Potential Energy は

$$2I=\iint\Big[-u_{\eta}(N^{\beta\eta}{}_{\|\beta}-Q^{\alpha}b_{\alpha}^{\eta}+P^{\alpha})-w(N^{\beta\alpha}b_{\alpha\beta}+Q^{\alpha}{}_{\|\alpha}+P^{3})+\beta_{\alpha}(Q^{\alpha}-M^{\beta\alpha}{}_{\|\beta})\Big]da+\int\Big[(N^{(\nu)}-\overline{N})u^{(\nu)}+(T^{(\nu)}-\overline{T})u^{(\lambda)}-(G-\overline{G})\frac{\partial w}{\partial\nu}-(H-\overline{H})\frac{\partial w}{\partial S}+\nu_{\alpha}(Q^{\alpha}-\overline{Q}^{\alpha})w\Big]ds \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l}N^{(\nu)}=N-G',\quad T^{(\lambda)}=T-H'\\ G'=\nu_{\beta}\nu_{\eta}b_{\alpha}^{\eta}M^{\beta\alpha},\quad H'=\bar{\varepsilon}_{\eta\gamma}\nu_{\beta}\nu^{\gamma}b_{\alpha}^{\eta}M^{\beta\alpha}\end{array}\right\} \qquad (7)$$

(6)式の二重積分は，釣合条件式と変位の積で表わされている．微分式の解が既知の場合でも，境界値を与え未定定数を決定することが困難なことがある．たとえば円筒に方形開口が存在する問題，このような時に微分式の解を(6)式に代入すると，二重積分の項は恒等的に0であるから，線積分のみが残る．エネルギーの停留条件は，線積分についてのみ考えれば良い．ただし，Argument は解の未知定数のみとなる．したがって，

$$2I=2I_{b}=\int\Big\{(N^{(\nu)}-\overline{N})u^{(\nu)}+(T^{(\lambda)}-T)u^{(\lambda)}-(G-\overline{G})\frac{\partial w}{\partial\nu}-(H-\overline{H})\frac{\partial w}{\partial\nu}+\nu_{\alpha}(Q^{\alpha}-\overline{Q}^{\alpha})\Big\}ds \qquad (8)$$

これより，

$$\delta I=\delta I_{b}=0 \qquad (9)$$

(9)式で示される停留条件が境界値問題の境界条件に代るものである．

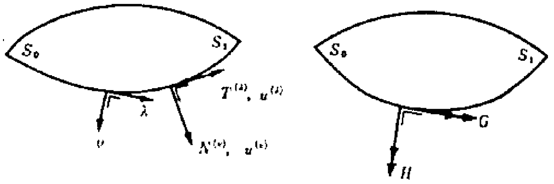
* 東京大学生産技術研究所　第5部

通常の境界条件で問題を処理することが不可能な際に(9)による直接法の適用は，微分式を厳密に満足している解が利用されるために，境界条件を近似的に与えた場合に相当する．十分な精度が予想されるアプローチである．文献3）は円筒シェルの円孔周辺の応力集中を扱ったものであるが文献2）の方法に従っている．通常の方法で境界条件を与えた4）と良く一致している．

2. 境界線上の特異点と，その点における集中反力について

線積分が可能であるためには，被積分関数がその区間で連続であることを必要とする．境界における Reaction とこれに対応する変位との積は，境界における被仕事を示しているが，(8)式よりこれらを取り出すと，

$$\int\left[N^{(\nu)}u^{(\nu)}+T^{(\lambda)}u^{(\lambda)}-G\frac{\partial w}{\partial \nu}-H\frac{\partial w}{\partial S}+Q^{\alpha}w\right]\times ds \qquad (10)$$



S_0, S_1：特異点

いま，境界線上に特異点が存在しているとする．図でも明らかなように w の他はすべて特異点において不連続となる関数である．したがって(10)式は次の形式に書き直さなければならない．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_0+\varepsilon}^{S_1-\varepsilon}\left(N^{(\nu)}u^{(\nu)}+T^{(\lambda)}u^{(\lambda)}-G\frac{\partial w}{\partial \nu}-H\frac{\partial w}{\partial S}+\nu_{\alpha}Q^{\alpha}\cdot w\right)ds \qquad (11)$$

ここで，$H(\partial w/\partial S)=\partial(H\cdot w)/\partial S-(\partial H/\partial S)\cdot w$ とおく，この関係を(11)式に代入して定積分を行なうと，

$$\int_{S_0+\varepsilon}^{S_1-\varepsilon}\frac{\partial(H\cdot w)}{\partial S}dS=-H(S_0+\varepsilon)w(S_0+\varepsilon)+H(S_1-\varepsilon)w(S_1-\varepsilon)$$

ゆえに，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_0+\varepsilon}^{S_1-\varepsilon}H\cdot\frac{\partial w}{\partial S}ds=\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[H(S_1-\varepsilon)w(S_1-\varepsilon)-H(S_0+\varepsilon)w(S_0+\varepsilon)-\int_{S_0+\varepsilon}^{S_1-\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial S}w\,ds \qquad (12)$$

したがって，(11)式は

$$H(S_0+0)w(S_0+0)-H(S_1-0)w(S_1-0)+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_0+\varepsilon}^{S_1-\varepsilon}\left[N^{(\nu)}u^{(\nu)}+T^{(\lambda)}u^{(\lambda)}-G\frac{\partial w}{\partial \nu}+\left(\nu_{\alpha}Q^{\alpha}+\frac{\partial H}{\partial S}\right)w\right]ds \qquad (13)$$

$\nu_{\alpha}Q^{\alpha}+\partial H/\partial S$ がいわゆる換算剪断力といわれるものに相当する．同様にして $S_1\sim S_0$ の積分も表示できる．一般に n ケの特異点が存在する場合に拡張することは容易である．以上の検討により，境界線上に特異点が存在する場合でも，1節の方法は適用可能となり，(8)式の表現は次式の形に代えられる．

$$2I_b=\sum_{i=0}^{n}\Big[\{H(S_i+0)-H(S_i-0)\}w(S_i)+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_i+\varepsilon}^{S_{i+1}-\varepsilon}\Big\{(N^{(\nu)}-\overline{N})u^{(\nu)}+(T^{(\lambda)}-\overline{T})u^{(\lambda)}-(G-\overline{G})\frac{\partial w}{\partial \nu}+(V-\overline{V})w\Big\}dS \qquad (15)$$

$$V=\nu_{\alpha}Q^{\alpha}+\frac{\partial H}{\partial S},\quad \overline{V}=\nu_{\alpha}\overline{Q}^{\alpha}+\frac{\partial \overline{H}}{\partial S}$$

(15)式を用いることで，方形開口による応力集中問題などの扱いが可能となる．また特異点が存在しない場合には，S_i で H は連続し

$$H(S_i+0)=H(S_i-0)$$

となり，集中反力は消滅する．

(1969年7月31日受理)

参考文献

1) Eric Reissner: On Some Variational Theorems in Elasticity Journal of Math. and Phys vol. 29 1950
2) T. J. Lardner and E. Reissner: Application of a Variational Theorem for Boundary Values in Shell Theory J. of Strain Analysis, 1. 1, 1965, p. 83
3) 山本善之・一色浩・他2名：「円筒殻の開口まわりの応力集中について」応用力学連合会報告集，1966年
4) 坪井善勝・川股重也・中村輝男：「円筒殻の円孔周辺の応力解析」日本建築学会論文報告集，昭和42年10月