

地震時に 2 個の入力をうける構造物の応答振動

Response of a structure subjected to two inputs

林 有一郎*・岡本 舜三**

Yuichiro HAYASHI and Shunzo OKAMOTO

長大橋梁のように互にかなり隔った位置で支持された構造物が震動をうける場合には、一般には支点ごとに地盤の振動波形が異なるであろう。その場合の橋梁の応答振動はどうか。こういう問題の 1 例として図 1 に示す構造物の 2 支点 A, B が異なった振動をする場合の剛板 C の応答を計算した。

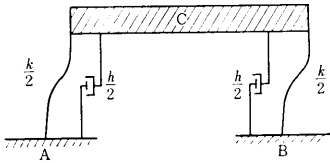


図 1

x_1, x_2 : 剛板 C の地盤 A および B に対する相対変位
 y : 剛板 C の絶対変位

とすると C の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{y} + \frac{c}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \frac{k}{2}(x_1 + x_2) = 0 \quad (1)$$

ここに m は C の質量, k は脚のバネ定数, c は粘性抵抗係数である。

Z_1, Z_2 : 支点 A および B の振動変位

とすると,

$$y = x_1 + Z_1, \quad y = x_2 + Z_2 \quad (2)$$

なる関係があるから (1) 式に代入すれば次式をうる。

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2hp \frac{dx_1}{dt} + p^2 x_1 = F(t) \quad (3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2hp \frac{dx_2}{dt} + p^2 x_2 = G(t) \quad (4)$$

ただし

$$p^2 = \frac{k}{m}, \quad h = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

$$F(t) = -\ddot{Z}_1 - hp\dot{Z}_3 - \frac{p^2}{2}Z_3 \quad (5)$$

$$G(t) = hp\dot{Z}_4 + \frac{p^2}{2}Z_4 \quad (6)$$

ここに,

$$Z_3 = Z_1 - Z_2, \quad Z_4 = Z_1 + Z_2 \quad (7)$$

(3), (4) 式は同型の方程式であって, $F(t), G(t)$ を入力波となづける。地盤変位をある仮定されたパワースペクトルをもつ定常ガウス過程とする。これに対する $F(t)$ の自己相関関数を $\phi_F(\xi, \eta)$ とすれば (5) 式より

$$\phi_F(\xi, \eta) = E\{\ddot{Z}_1(\xi)\ddot{Z}_1(\eta)\} + hpE\{\dot{Z}_1(\xi)\dot{Z}_3(\eta)\}$$

$$+ \ddot{Z}_3(\xi)\dot{Z}_1(\eta)\} + \frac{p^2}{2}E\{\ddot{Z}_1(\xi)\dot{Z}_3(\eta) + \dot{Z}_3(\xi)\ddot{Z}_1(\eta)\} + h^2 p^2 E\{\dot{Z}_3(\xi)\dot{Z}_3(\eta)\} + \frac{hp^3}{2}E\{\dot{Z}_3(\xi)\dot{Z}_3(\eta)\} + Z_3(\xi)\dot{Z}_3(\eta)\} + \frac{p^4}{4}E\{Z_3(\xi)Z_3(\eta)\} \quad (8)$$

定常ガウス過程のエルゴード性を利用して

$$E\{\ddot{Z}_1(\xi)\ddot{Z}_1(\eta)\} = E\{\ddot{Z}_1(t)\ddot{Z}_1(t+\tau)\} = \lim_{1/T} \int_0^T \ddot{Z}_1(t)\ddot{Z}_1(t+\tau) dt$$

ただし $\tau = \eta - \xi$

$Z_1(t), \dot{Z}_1(t), \ddot{Z}_1(t)$ の有限性の仮定のもとに部分積分法を施せば

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \lim_{1/T} \int_0^T Z_1(t) \frac{d^4 Z_1(t+\tau)}{d\tau^4} dt \\ &= \lim_{1/T} \int_0^T Z_1(t) \frac{d^4 Z_1(t+\tau)}{d\tau^4} dt \end{aligned} \quad (9)$$

いま

$$\begin{aligned} \phi(\tau, Z_1, Z_2) &= E\{Z_1(t)Z_2(t+\tau)\} \\ &= \lim_{1/T} \int_0^T Z_1(t)Z_2(t+\tau) dt \end{aligned} \quad (10)$$

のようにかけば (9) 式により

$$E\{\ddot{Z}_1(\xi)\ddot{Z}_1(\eta)\} = \phi^{(4)}(\tau, Z_1, Z_1)$$

$\phi^{(4)}$ は $\partial^4 \phi / \partial \tau^4$ を示す。同様な演算により

$$\begin{aligned} \phi_F(\xi, \eta) &= \phi_F(\tau) \\ &= \phi^{(4)}(\tau, Z_1, Z_1) + h^2 p^2 \{-\phi^{(2)}(\tau, Z_1, Z_1) \\ &\quad - \phi^{(2)}(\tau, Z_2, Z_2) + \phi^{(2)}(\tau, Z_1, Z_2) + \phi^{(2)}(\tau, Z_2, Z_1)\} \\ &\quad + \frac{p^4}{4}\{\phi(\tau, Z_1, Z_1) + \phi(\tau, Z_2, Z_2) - \phi(\tau, Z_1, Z_2) \\ &\quad - \phi(\tau, Z_2, Z_1)\} + hp\{-\phi^{(3)}(\tau, Z_1, Z_2) \\ &\quad + \phi^{(3)}(\tau, Z_2, Z_1)\} + \frac{p^2}{2}\{2\phi^{(2)}(\tau, Z_1, Z_1) \\ &\quad - \phi^{(2)}(\tau, Z_1, Z_2) - \phi^{(2)}(\tau, Z_2, Z_1)\} \end{aligned} \quad (11)$$

変位をフーリエ級数で表わして

$$\{Z(t)\} = \sum c_n \cos(\omega_n t + \theta_n) \quad (12)$$

ただし $c_n = \sqrt{2W(\omega_n)} \cdot \Delta\omega$

$$\omega_n = n \cdot \Delta\omega = 2\pi n \cdot \Delta f$$

$W(\omega_n)$ はパワースペクトルである。この表示方式により

$$\begin{aligned} Z_1(t) &= \sum c_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) \\ Z_2(t) &= \sum d_n \cos(\omega_n t + \beta_n) \end{aligned} \quad (13)$$

* 日本道路公団

** 東京大学生産技術研究所 第 1 部

ただし $c_n = \sqrt{2} W_1(\omega_n) \Delta\omega$
 $d_n = \sqrt{2} W_2(\omega_n) \Delta\omega$

と表わす。 W_1, W_2 は A, B 両支点地動変位波形のパワースペクトルである。

(1) A, B 両支点における波形が互に独立なる場合このときは

$$\begin{cases} \phi(\tau, Z_1, Z_2) = 0 \\ \phi(\tau, Z_2, Z_1) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

である。また

$$\begin{cases} \phi(\tau, Z_1, Z_1) = \int_0^\infty W_1(\omega) \cos \omega\tau d\omega \\ \phi(\tau, Z_2, Z_2) = \int_0^\infty W_2(\omega) \cos \omega\tau d\omega \end{cases} \quad (15)$$

である。よって (11) 式より入力波の自己相関関数は

$$\begin{aligned} \phi_F(\tau) &= \int_0^\infty \omega^4 W_1(\omega) \cos \omega\tau \cdot d\omega \\ &+ h^2 p^2 \int_0^\infty \omega^2 \{ W_1(\omega) + W_2(\omega) \} \cos \omega\tau \cdot d\omega \\ &+ \frac{p^4}{4} \int_0^\infty \{ W_1(\omega) + W_2(\omega) \} \cos \omega\tau \cdot d\omega \\ &- p^2 \int_0^\infty \omega^2 W_1(\omega) \cos \omega\tau d\omega \end{aligned} \quad (16)$$

自己相関関数がわかればパワースペクトルは公式によって求められる。

$$\begin{aligned} W_F(\omega) &= \omega^4 W_1(\omega) + h^2 p^2 \omega^2 \{ W_1(\omega) + W_2(\omega) \} \\ &+ \frac{p^4}{4} \{ W_1(\omega) + W_2(\omega) \} - p^2 \omega^2 W_1(\omega) \end{aligned} \quad (17)$$

(2) A, B 両支点における波形の位相にのみ差がある場合。

このときは

$$\begin{cases} Z_1(t) = \sum c_n \cos(\omega_n t + \theta_n) \\ Z_2(t) = \sum c_n \cos(\omega_n t + t_p + \theta_n) \end{cases} \quad (18)$$

$$c_n = \sqrt{2} W_1(\omega_n) \cdot \Delta\omega$$

である。(1)と同様の演算によりパワースペクトルは

$$\begin{aligned} W_F(\omega) &= \{ \omega^4 + 2h^2 p^2 \omega^2 (1 - \cos \omega t_p) + \frac{p^4}{2} (1 - \cos \omega t_p) \\ &- 2h p \omega^3 \sin \omega t_p - p^2 \omega^2 (1 - \cos \omega t_p) \} W_1(\omega) \end{aligned} \quad (19)$$

$$W_G(\omega) = \left\{ \left(2h^2 p^2 \omega^2 + \frac{p^4}{2} \right) (1 + \cos \omega t_p) \right\} W_1(\omega) \quad (20)$$

構造物の A 点に対する相対変位 x_1 のパワースペクトルは

$$W_{x_1}(\omega) = \frac{W_F(\omega)}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 p^2 \omega^2} \quad (21)$$

\dot{x}_1, \ddot{x}_1 のパワースペクトルは

$$W_{\dot{x}_1}(\omega) = \omega^2 W_{x_1}(\omega) \quad (22)$$

$$W_{\ddot{x}_1}(\omega) = \omega^4 W_{x_1}(\omega) \quad (23)$$

一般に Rice の方法によると定常ガウス過程をなす不規

則関数を $\gamma(t)$ とするとき、 $\gamma(t)$ の極大値の確率分布は次式で与えられる。

$$p(\zeta) d\zeta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2\varepsilon^2} + \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}\zeta} e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \zeta \right) \right\} \quad (24)$$

ここに

$\cdot p(\zeta) d\zeta$: ζ の極大値が $(\zeta, \zeta + d\zeta)$ にある確率であって記号は

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{\gamma}{\sqrt{m_0}} \\ \varepsilon &= \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}} \\ \operatorname{erf} x &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ m_0 &= \int_0^\infty W_\gamma(\omega) d\omega \\ m_2 &= \int_0^\infty W_{\dot{\gamma}}(\omega) d\omega \\ m_4 &= \int_0^\infty W_{\ddot{\gamma}}(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

よって x_1 の最大値を $x_{1, \max}$ 、 A 点の変位の最大値を $Z_{1, \max}$ とすると

$$\frac{x_{1, \max}}{Z_{1, \max}} = \sqrt{\frac{m_{0, x_1} \zeta_{x_1, \max}}{m_{0, Z_1} \zeta_{Z_1, \max}}}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} m_{0, x_1} &= \int_0^\infty W_{x_1}(\omega) d\omega, & m_{2, x_1} &= \int_0^\infty \omega^2 W_{x_1}(\omega) d\omega \\ m_{4, x_1} &= \int_0^\infty \omega^4 W_{x_1}(\omega) d\omega, & m_{0, Z_1} &= \int_0^\infty W_{Z_1}(\omega) d\omega \\ m_{2, Z_1} &= \int_0^\infty \omega^2 W_{Z_1}(\omega) d\omega, & m_{4, Z_1} &= \int_0^\infty \omega^4 W_{Z_1}(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$\zeta_{x_1, \max}$: ζ_{x_1} の確率分布が 0.01 の値をとる時の ζ_{x_1} の値

$\zeta_{Z_1, \max}$: ζ_{Z_1} の確率分布が 0.01 の値をとる時の ζ_{Z_1} の値

地盤表面の地震動は一般に基盤の地震動を仮定し、それを input としてうける地表層の output として理解される。田治見博士は地表面の地震動と基盤の地震動の関係は次式で表わされるとした。

$$\ddot{x}_a + 2h_g \omega_g \dot{x}_a + \omega_g^2 x_a = 2h_g \omega_g \ddot{x}_b + \omega_g^2 x_b$$

ここに x_a : 地盤表面の変位

x_b : 基盤の変位

h_g : 地盤の粘性を示す数

ω_g : 地盤の卓越円振動数

いま \ddot{x}_b を定常ガウス過程をなすホワイトノイズと仮定すれば $\ddot{x}_a, \dot{x}_a, x_a$ のパワースペクトルは

$$W_{\ddot{x}_a}(\omega) = \frac{1 + 4h_g \frac{\omega^2}{\omega_g^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \right)^2 + 4h_g \frac{\omega^2}{\omega_g^2}} \cdot B$$

研 究 速 報

$$\left. \begin{aligned} W_{x_a}(\omega) &= \frac{1}{\omega^2} W_{\ddot{x}_a}(\omega) \\ W_{x_a}(\omega) &= \frac{1}{\omega^4} W_{\ddot{x}_a}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

よって求められ、これらのパワースペクトルは (17) 式又は (19) 式等における入力波のパワースペクトルとして上部構造系に加えられるものである。これから上部構造の W_F がきまり、それに対する m_0, m_2, m_4 したがってまた ε が求まるのであるが (27) 式の欠陥はこの計算で $\omega \rightarrow 0$ のとき W_F が発散してしまうことである。これは基礎の加速度パワースペクトルを $\omega=0$ で有限に与へたことによる欠陥であり、パワースペクトルから直流分を取り除かないことによる欠陥である。この欠点を除去し、しかも基盤のホワイトスペクトルに対して本来の性質を保持したまま低振動数および高振動数域で強い収れん性をもつ表現として

$$W(\omega) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \quad x \geq 2 \\ e^{-\frac{c}{x(2-x)}} & 0 < x < 2 \end{cases} \quad (28)$$

$x = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad c = \text{常数}$

を提案したい。この関数は図 2 に示す形をなし、 c が小になるにつれて $W(\omega)$ は有帯域ホワイトスペクトルに近づく。

(28) 式と (27) 式を結びつけると地盤表面の加速度パワースペクトルは

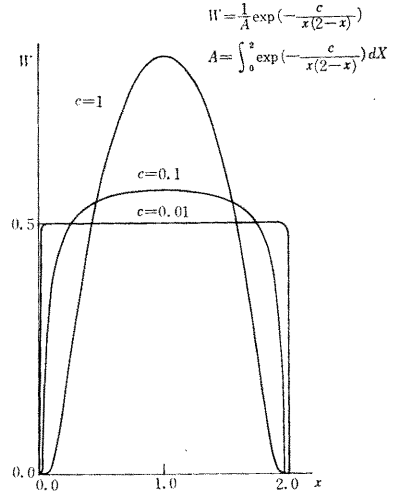


図 2

$$W_{x_a}(\omega) = \frac{1 + 4h_p^2 \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)^2 + 4h_p^2 \frac{\omega^2}{\omega_p^2}} e^{-\frac{c\omega_c^2}{\omega(2\omega_c - \omega)}} \cdot e^c \cdot B \quad (29)$$

の如く表わされ、以下の計算を進めたときに、構造物振動の W_F が発散することはない。

本研究にあたり佐藤壽芳助教授より有益な助言をいただいたことを感謝致します。(1968年11月25日受理)

次 号 予 告 (4 月号)

研 究 解 説

- 新聞紙面電送用広帯域ファクシミリの高速度伝送方式.....野村 民也, 安田 靖彦
村田 悠紀夫, 辺野田 繁
- NRZ 形磁気ひずみ遅延線記憶装置.....高木 羽禎
木下 英実

研 究 速 報

- タンデム圧延の総合特性の解析.....鈴木 弘
阿高 松 男
- 第3報 冷間タンデム圧延の動特性と影響係数および圧延機剛性との関係について—
- タンデム圧延の総合特性の解析.....鈴木 弘
阿高 松 男
- 第4報 熱間タンデム圧延の加減速特性—
- ロールフォーミングに関する実験的研究 第2報.....鈴木 弘, 木内 学夫
中島 聡, 赤 堀 明
- 基本的断面形状に関する実験(2)—
- ロールフォーミングに関する実験的研究 第3報.....鈴木 弘, 木内 学夫
中島 聡, 赤 堀 明
雪 竹 泰三, 柴田 明忠
- 基本的断面形状に関する実験(3)—
- 薄板圧延における幅方向板厚分布に関する一考察.....鈴木 弘
河野 輝雄
茅 直樹
上安 幸夫
- MOS 型電界効果トランジスタの低周波雑音について.....上安 幸夫
- OPERATING CHARACTERISTICS OF INDUCTION MOTORS FED BY POLY-PHASE INVERTERS HARASHIMA, Fumio
UCHIDA, Katsumi
- 鉄マンガン合金における対応粒界の普遍性.....石田 洋一
長谷川 隆
- ストレインゲージを用いた熱天秤の試作と還元実験への適用.....江本 利充
館 房

研 究 室 紹 介

- 水町研究室.....水町 長生