

円形ピストン音源による音場

On the Ultrasonic Field Produced by a Circular Piston Source

鳥 飼 安 生*

Yasuo TORIKAI

円形ピストン音源の呈する音場の問題は、音響学における基本的問題の一つとして、従来多くの研究があるが、超音波の領域では、まだ実験結果をよく説明するにいたっていない。筆者はこの問題につき、実験結果とよく合う一近似法を見出し、また電子計算機を駆使して、いくつかの重要な成果を得た。ここにその一部を紹介する。

1. は し が き

無限大剛壁中の円形ピストン音源による音場の問題は、音響学における基本的問題の一つとして従来多くの研究がある。その基本の式は Rayleigh¹⁾によって与えられたもので、次式によってあらわされる。

$$p = \frac{i\sigma c \omega_0}{A} e^{i\omega t} \int_F \frac{e^{-ikr}}{r} dF \quad (1)$$

ただし、媒質は一様で吸収のない液体であるとし、 p は観察点 P における音圧、 σ は媒質の密度、 c は音速、 ω_0 は音源の速度振幅、 A は音波の波長、 $\omega = 2\pi f$ で f は周波数、 $k = 2\pi/\lambda$ 、 dF は音源表面の面積素片、 r は P と dF との距離で、積分は音源の表面全部にわたっておこなわれる。(1)式の積分は一般にはめんどうであるが、特定の場合には比較的簡単に重要な結果が出ている。

2. 中心軸上の音場

音源を半径 a の円形とし、中心軸上に z 軸をとって、音源の中心から中心軸上の観察点までの距離を z 、音源の半径方向の座標を x とする。(1)式に

$$r = \sqrt{z^2 + x^2}, \quad dF = 2\pi x dx \quad (2)$$

を入れて、 $x=0$ から $x=a$ まで積分すると、

$$p = \sigma c \omega_0 e^{i(\omega t - kz)} \left[1 - e^{-ik(\sqrt{z^2 + a^2} - z)} \right] \quad (3)$$

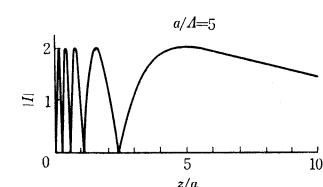


図1 中心軸上の音圧振幅の変化 ($a/A=5$ の場合)

以遠は z に逆比例しておちてゆく。

3. 遠距離音場 (指向性関数)

音源の寸法に比べて十分に遠い距離では、(1)式の積分内の分母 r は音源中心からの距離 r_0 で近似的におきかえられるので、音源に垂直の方向の値を1として求められる指向性関数 R は結局次式で与えられる。

$$R = \frac{1}{S} \left| \iint_F e^{ik(x+my)} dx dy \right| \quad (4)$$

ただし、音源面内に x 軸、 y 軸をとり、 l, m は観測方向の方向余弦、 S は音源の面積で、積分は音源表面 F 全体にわたってなされる。

音源が半径 a の円形の場合、中心軸から角度 γ の方向の指向性関数 R は簡単に求められ、 $Z = ka \sin \gamma$ において次式で与えられる。

$$R = \left| \frac{2J_1(Z)}{Z} \right| \quad (5)$$

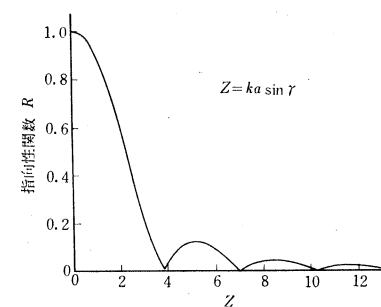


図2 円形音波の指向性関数

この (1) 式の計算は非常にやっかいである。次に2, 3の人の結果を示す。

i) Backhaus の式²⁾: 円柱関数および球関数を用いて、Backhaus は次式を与えている。

$$p = i\sigma c \omega_0 k a \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_{2\nu}(ka) P_{2\nu}(\cos \gamma)}{\sqrt{kr}} \times \left[J_{2\nu+\frac{1}{2}}(kr) \cos \omega t - J_{-2\nu-\frac{1}{2}}(kr) \sin \omega t \right] \quad (6)$$

$$A_{2\nu}(ka) = (-1)^\nu (4\nu+1) \left[\frac{1}{ka} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\nu-\mu} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu+2\mu-1)}{\mu! (\nu-\mu)!} \times \frac{J_{\mu-\frac{1}{2}}(ka)}{(ka)^{\mu+\frac{1}{2}}} \right]$$

ここに、 $P_{2\nu}(\cos \gamma)$ はルジャンドルの球関数で、 r, γ は極座標をあらわす。

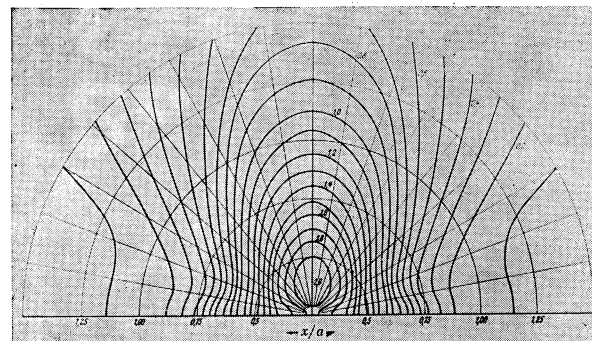
ii) King の式³⁾: King は Sommerfeld の式⁴⁾を利用して次の音場の式を導いた。

$$p = -i\sigma c \omega_0 k a \int_0^\infty e^{-\mu r} J_0(\lambda x) J_1(\lambda a) \frac{d\lambda}{\mu} \quad (7)$$

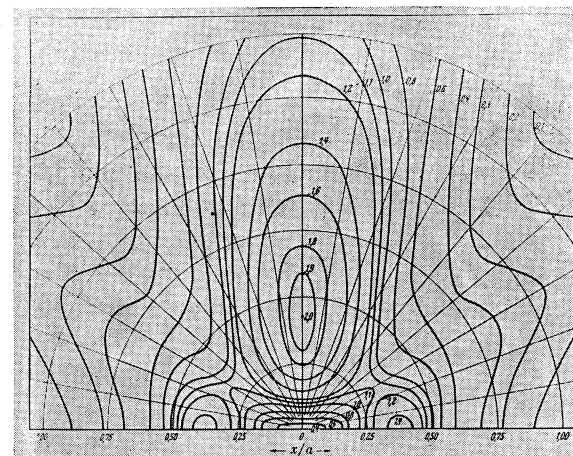
ただし、 x は観察点の中心軸からの距離で、 $\mu = (\lambda^2 - k^2)^{1/2}$ である。

King の式は Williams⁵⁾により、媒質の吸収測定における回折効果の計算に用いられている。

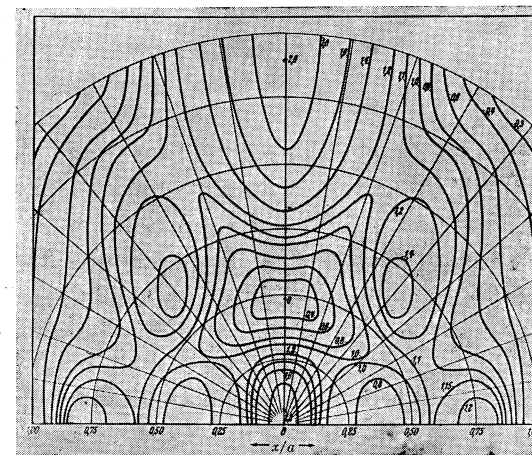
iii) Stenzel の式⁶⁾: Stenzel は種々の場合の音場について詳しい計算を行なっているが、特に円形音源について、



a) $ka=4$



b) $ka=6$



c) $ka=10$

図3

(1) 式の積分を行なうに当たり次の関係式を利用した⁷⁾。

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}} \\ &= \frac{1}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) S_n(x) S_n(y) P_n(\cos \theta) \\ & \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) S_n(x) C_n(y) P_n(\cos \theta) & (x \leq y) \\ \frac{1}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) C_n(x) S_n(y) P_n(\cos \theta) & (x \geq y) \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

ただし、 $P_n(\cos \theta)$ はルジャンドルの球関数で、また

$$S_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} x \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad (9)$$

$$C_n(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} x \cdot J_{-n-\frac{1}{2}}(x)$$

これらの関係を (1) 式に適用することにより、Stenzel は次の音場の式を得た。

$$p = \sigma c \omega_0 e^{i\omega t} (p_a + i p_m) \quad (10)$$

$$p_a = \frac{1}{k r_0} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos \gamma) S_{2n}(k r_0) \times \int_0^{ka} S_{2n}(x) dx \quad (11)$$

$$p_m = \frac{1}{k r_0} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos \gamma) C_{2n}(k r_0) \times \int_0^{ka} S_{2n}(x) dx \quad r_0 \geq a \quad (12)$$

ただし、(12)式は音源の中心から観察点までの距離 r_0 が音源の半径 a より大きい場合にのみ成立し、音源近傍の音場は、半径 a の音源表面を二つに分けて、半径 r_0 の円形音源と $a - r_0$ の円環状音源とに分けて別々に計算することによって得られる。

このとき、

$$p_m = \frac{1}{k r_0} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos \gamma) \times \left[C_{2n}(k r_0) \int_0^{k r_0} S_{2n}(x) dx + S_{2n}(k r_0) \int_{k r_0}^{ka} C_{2n}(x) dx \right] \quad r_0 \leq a \quad (13)$$

Stenzel は $ka=4, 6, 10$ の場合について、(11), (12), (13)より音源付近の音場を計算し、図3(a), (b), (c)の等高線分布を得ている。

以上円形ピストン音源の呈する音場について3種の式が与えられているが、次に述べるような音源の半径と音波長の比の大きい場合には、いずれの式も数値計算が非常にやっかいとなり、実験結果をよく説明するにいたらない。

* 東京大学生産技術研究所 第1部

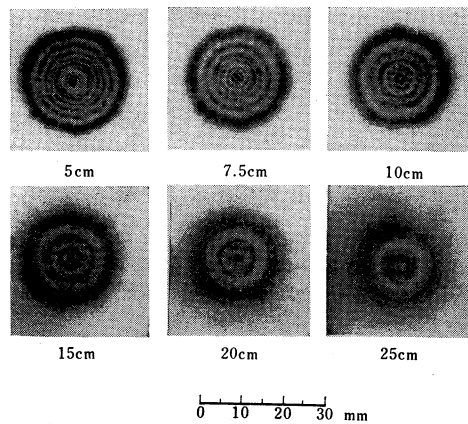


図4 印画紙法による回折像。音源直径 35mm (電極直径 33mm), 周波数 6.9MHz. 図の下に音源からの距離を示す

これに対して, 以下述べるように, Schoch による線積分表示に適当な近似を用いることにより, 上の問題をみごとに説明することができる。

5. 音場分布⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾

音場分布を手軽に求める方法には, 先に発表した印画紙法が適当である。すなわち, 一様に感光させた印画紙を十分に希薄な現像液に入れると, そのままではなかなか黒くなってこないが, 超音波をあてるとその強度分布に応じて現像が促進されて黒くなり, 音場の像を得ることができる。

直径 35mm の X-cut 円形水晶板に直径 33mm の電極を蒸着した周波数 6.9MHz の音源による音場映像の例を図4に示す。

図に見られるとおり, 像は同心円よりなり, 音源に近づくに従ってその数を増している。像の黒い部分が音強度あるいは音圧振幅の極大の位置に相当すると考えられるが, この同心円の半径と音源からの距離との関係を図に描くと, 図5黒丸のようになる。ただし一番外側の像については幅をもたせて描いてある。

これらの像は後に述べるように Schoch の線積分表示に適当な近似を施すことにより得られる結果でよく説明されるが, これを簡単に次のようなフレネル輪帯による方法で説明することもできる。

6. フレネル輪帯による回折像の説明¹⁰⁾¹¹⁾

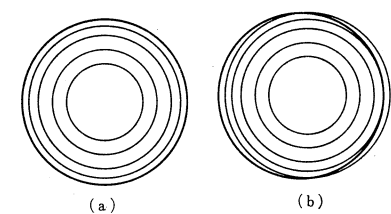
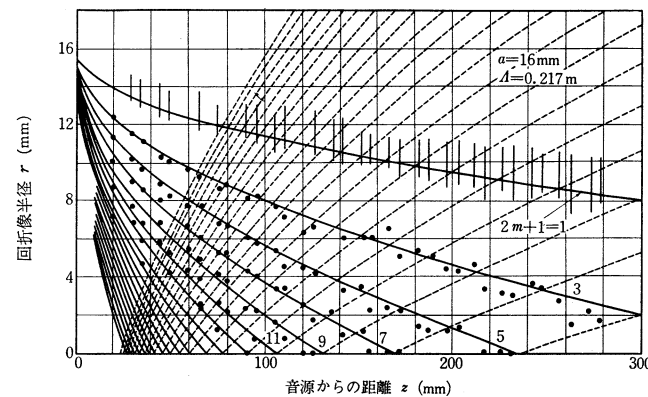


図6 音源とフレネル輪帯 (太線は音源の縁を示す)

観察点に関するフレネル輪帯を音源の平面上に描くとそれらは同心の円周群となるが (図6 (a)), 観察点の位置を音源の中心軸上から音源に平行にずらしてい



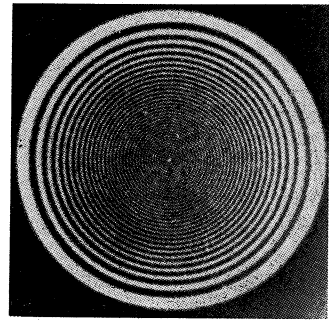


図11 半径 1.492 cm の円孔による光の回折像¹⁵⁾

1552 cm の距離 (R) においた衝立に半径 (a) 1.492 cm の円孔をあけ、それから 1706 cm の距離 (z) で得られたものである。光の波長 (λ) は 3880 Å であるが、この場合発散波による回折であるので今までの議論を幾分修飾して、結局理論的回折像半径 (r) は次式で与えられる。

$$r = \frac{R+z}{R} \left[a - \sqrt{\frac{R}{R+z} \left(n + \frac{3}{8} \right) 2\lambda z} \right] \quad (21)$$

$n=0, 1, 2, \dots$

表 1 は回折像半径の理論値と観測値とを比較したもので、Hufford らが後に述べる Lommel の近似式に基づいて苦心してこれを説明しようとしているのに対し、上の方法ではすっきりとよく実験値と一致した結果を出している。

8. 中心軸付近の音場

中心軸付近では $(R-z)/\lambda$ の変化がゆるやかで上に述べてきた近似が用いられないが、この場合には Schoch の簡単な近似式がある。

Schoch¹⁴⁾ による近似式は次のとおりで、これは $(x/a)^2 \ll 1$, $ax/z^2 \ll 1$, $a^2x^2/\lambda \ll z^3$ の場合に成り立つ。

$$p = \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} \left[1 - e^{-ik(\sqrt{z^2 + a^2} - z)} J_0 \left(\frac{kax}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \right] \quad (22)$$

大カッコ内を近似の成り立つ中心軸付近について計算した一例を図12に示す¹³⁾。同図の原点をとおり、山谷を連ねる直線群は、(22) で $\partial|p|^2/\partial x = 0$ とおいて得られる

$$J_1(kax/\sqrt{z^2 + a^2}) = 0 \quad (23)$$

で与えられるもので、(23) の根の小さいものから順次に $kax/\sqrt{z^2 + a^2} = u_0, u_1, u_2, \dots$ としたとき、それらの直線群の上で音圧振幅は

$$1 \pm J_0(u_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (24)$$

の範囲にわたって変化する。

これら直線群の傾斜は波長に比例して変化する。すなわち、波長の短くなるほど、音圧振幅の変化のはげしい部分は中心軸近傍に局限され、音の場の大部分は平面波とみなされる。

とくに中心軸上の音圧は、(20) 式で $x=0$ とおいて、

$$p = \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} \{ 1 - e^{-ik(\sqrt{z^2 + a^2} - z)} \} \quad (25)$$

となり前述の (3) 式と一致する。

9. Schoch の線積分の数値積分^{16), 17)}

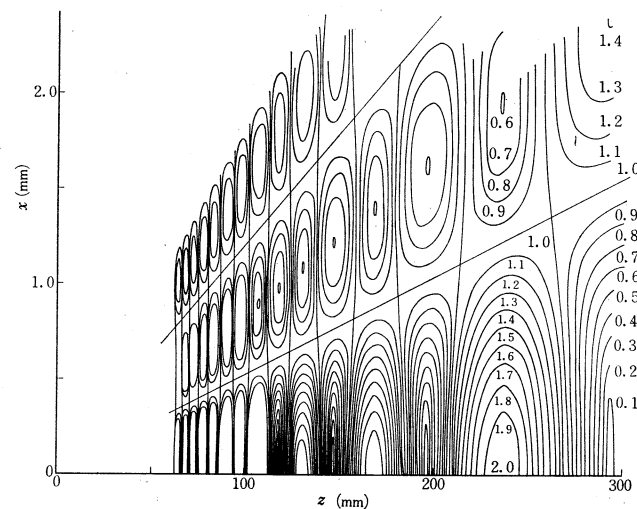


図12 中心軸付近の音圧振幅分布

表 1 円孔による光の回折像の半径

n	理論値 [cm]	観測値 [cm]
	$\frac{R+z}{R} \left[a - \sqrt{\frac{R}{R+z} \left(n + \frac{3}{8} \right) 2\lambda z} \right]$	
0	2.809	2.832
1	2.514	2.512
2	2.320	2.315
3	2.163	2.158
4	2.019	2.024
5	1.910	1.904
6	1.801	1.796
7	1.700	1.697
8	1.606	1.603
9	1.518	1.514
10	1.434	1.432
11	1.354	1.351
12	1.278	1.276
13	1.204	1.203
14	1.133	1.131
15	1.065	1.062
16	0.999	0.999
17	0.935	0.935
18	0.872	0.873
19	0.812	0.812
20	0.753	0.753
21	0.695	0.696
22	0.638	0.639
23	0.583	0.585
24	0.529	0.530
25	0.476	0.476
26	0.425	0.428
27	0.374	0.376
28	0.324	0.322
29	0.275	0.276
30	0.227	0.230
31	0.179	0.185
32	0.133	0.140
33	0.087	0.094
34	0.041	0.048

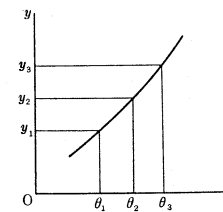


図13

精度のよい結果を得たい場合や、媒質中の吸収を考慮に入れる場合など、先に述べた近似法が用いられないときには、(17) 式の線積分を直接数値積分法により求めることが必要である。しかし数値積分法は普通非常に時間をくうので (とくに図 8 の

区分数の多いとき)、何らかの工夫が望ましい。吸収のない場合について筆者は次の近似式を得ている。

図 8 の曲線の各区間の中、直線に近い区間の積分に対して以下述べるような近似法を適用することができる。

図13に示すように、直線に近い曲線 y が θ の関数であるとし、その大きさが互いに $1/4$ ずつ隔った値 y_1, y_2, y_3 に対応する θ の値が $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ であるとし、積分

$$\int_{\theta_1}^{\theta_3} \cos 2\pi y d\theta \quad (26)$$

に対する近似式を求めるものとする。ここでさらに y_1 が整数かまたは半整数 (整数 $+1/2$) であるとする、

$$\int_{\theta_1}^{\theta_3} \cos 2\pi y d\theta = \pm \int_{\theta_1}^{\theta_3} \cos 2\pi (y - y_1) d\theta \quad (27)$$

となるので、左辺の代わりに右辺の積分について計算を行えばよい。

$$\theta_2 - \theta_1 = \Delta + \varepsilon, \quad \theta_3 - \theta_2 = \Delta - \varepsilon \quad \text{とおくと}$$

$$\Delta = (\theta_3 - \theta_1)/2, \quad \varepsilon = (\theta_2 - \theta_1 - \theta_3)/2 \quad (28)$$

となり、図13の曲線の形が直線に近いときは $\varepsilon/\Delta \ll 1$ となる。

同曲線を二次曲線で近似し、微小量で展開する方法で (27) の積分の近似計算を行ない次式を得た。

表 2

n	D_n	
0	2	2
1	-4	-4
2	8.52158241	4.26079121
3	-18.7769663	-3.12949438
4	42.2543444	1.76059768
5	-96.4664067	-8.03886723 $\times 10^{-1}$
6	222.555790	3.09105264 $\times 10^{-1}$
7	-517.572308	-1.02692918 $\times 10^{-1}$
8	1211.24801	3.00408732 $\times 10^{-2}$
9	-2849.04737	-7.85121079 $\times 10^{-3}$
10	6729.51937	1.85447513 $\times 10^{-3}$
11	-15951.1927	-3.99611007 $\times 10^{-4}$
12	37922.7332	7.91703686 $\times 10^{-5}$
13	-90390.6424	-1.45158729 $\times 10^{-5}$
14	215933.370	2.47691675 $\times 10^{-6}$
15	-516856.619	-3.95248719 $\times 10^{-7}$
16	1239299.91	5.92320584 $\times 10^{-8}$
17	-2976163.13	-8.36735541 $\times 10^{-9}$
18	7157175.29	1.11789402 $\times 10^{-9}$
19	-17233441.5	-1.41669836 $\times 10^{-10}$
20	41542910.6	1.70754558 $\times 10^{-11}$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\theta_1}^{\theta_3} \cos 2\pi (y - y_1) d\theta \\ &= \frac{2\Delta}{\pi} \left[-\frac{2c}{\pi} D_1 + \left(\frac{2c}{\pi} \right)^3 \frac{D_3}{3!} - \left(\frac{2c}{\pi} \right)^5 \frac{D_5}{5!} + \dots \right] \\ & \int_{\theta_1}^{\theta_3} \sin 2\pi (y - y_1) d\theta \\ &= \frac{2\Delta}{\pi} \left[D_0 - \left(\frac{2c}{\pi} \right)^2 \frac{D_2}{2!} + \left(\frac{2c}{\pi} \right)^4 \frac{D_4}{4!} \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{2c}{\pi} \right)^6 \frac{D_6}{6!} + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ただし、 $c = \frac{\varepsilon/\Delta}{1 - (\varepsilon/\Delta)^2}$, $D_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\zeta^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right]^n \cos \zeta d\zeta$

である。

数値積分により D_n と $D_n/n!$ を $n=0 \sim 20$ について求めると表 2 となる。これを用いると (29) は

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\theta_1}^{\theta_3} \cos 2\pi (y - y_1) d\theta = \frac{2\Delta}{\pi} \left[4 \left(\frac{2c}{\pi} \right) \right. \\ & \quad \left. - 3.12949438 \left(\frac{2c}{\pi} \right)^3 + 0.80388672 \left(\frac{2c}{\pi} \right)^5 \right. \\ & \quad \left. - 0.10269292 \left(\frac{2c}{\pi} \right)^7 + 0.00785121 \left(\frac{2c}{\pi} \right)^9 \right. \\ & \quad \left. - 0.00039961 \left(\frac{2c}{\pi} \right)^{11} \right] \\ & \int_{\theta_1}^{\theta_3} \sin 2\pi (y - y_1) d\theta = \frac{2\Delta}{\pi} \left[2 - 4.26079121 \left(\frac{2c}{\pi} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + 1.76059768 \left(\frac{2c}{\pi} \right)^4 - 0.30910526 \left(\frac{2c}{\pi} \right)^6 \right. \\ & \quad \left. + 0.03004087 \left(\frac{2c}{\pi} \right)^8 - 0.00185448 \left(\frac{2c}{\pi} \right)^{10} \right] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$a/\lambda=100$, $z/a=10$, $x/a=0.35 \sim 0.44$ の場合につき、積分の全区間に数値積分公式を適用したときと、(30) 式を適用した近似計算を途中の区間に入れた場合とで結果を比較すると表 3 となる。計算時間は前者に比べて後者は数分の 1 ですむが、結果の比較から見て、(30) 式はこの場合の積分の近似式として満足すべきものといえる。

以上主として $0 \leq x/a \leq 1$ の場合について述べたが、 $x/a \geq 1$ の場合すなわち図 7 の O が音源外に出る場合に

表 3 $a/\lambda=100$, $z/a=10$

x/a	$ I $ (全区域数値積分)	$ I $ (近似式を含む)
0.35	0.932194	0.932194
0.36	0.892439	0.892438
0.37	0.893426	0.893420
0.38	0.911872	0.911868
0.39	0.927365	0.927364
0.40	0.930299	0.930300
0.41	0.923701	0.923703
0.42	0.925765	0.925768
0.43	0.961190	0.961191
0.44	1.035055	1.035056

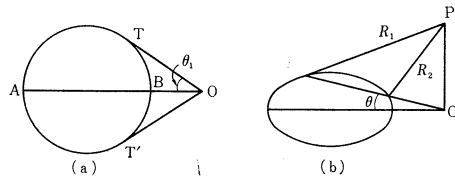


図14

は、図14 (a) のように O から音源周辺に2本の切線 OT, OT' を引き、これと音源周辺とのなす図形 OTAT' を音源としたときの音場から、OTBT' を音源としたときの音場を差引けばよい。同図 (b) のように R_1, R_2 , θ をとると、観察点 P における音圧は次式で与えられる。

$$p = \sigma c w_0 e^{i\omega t} \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_1} (e^{-ikR_2} - e^{-ikR_1}) d\theta \quad (31)$$

図15は (17), (31) の両式を用いて求めた音圧振幅の計算例である。

9. Lommel の近似式^{18), 19)}

Schoch の線積分の式でピストン音源の呈する音場は完全に求められるのであるが、計算時間をくうので、これに代るものとして、光学における回折を扱った Lommel の近似式²⁰⁾を用いると、これは現在の場合にもただちに応用できて、しかも短時間に結果が得られる。

観察点と音源との距離が、中心軸からの距離や音源の寸法に比べて相当に大きいときには、Lommel の近似法が用いられ、その結果を書くと次式となる。

$$p = \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} \left[1 - e^{-ik \frac{a^2 + x^2}{2z}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(i \frac{x}{a} \right)^n J_n \left(\frac{kax}{z} \right) \right] \quad x \leq a \quad (32)$$

あるいは

$$= \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} \cdot e^{-ik \frac{a^2 + x^2}{2z}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(i \frac{a}{x} \right)^n J_n \left(\frac{kax}{z} \right) \quad x \geq a \quad (33)$$

上式で $\partial |p|^2 / \partial x = 0$ を計算すると、 $z \gg a$ として、容易に (23) 式と同じ式が得られるので、(23) 式は中心軸付近にかぎらず成立する。(23) 式できまる方向はまた遠

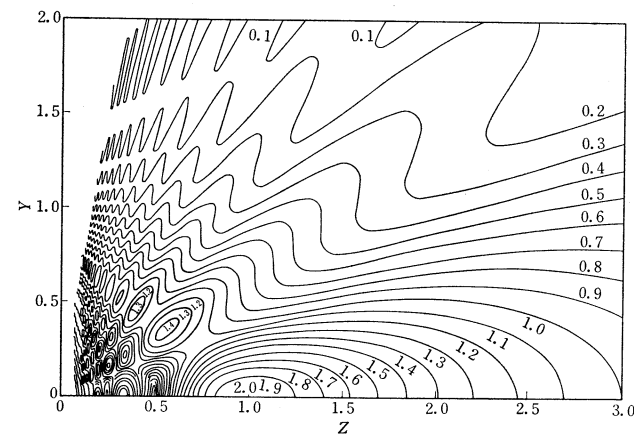


図16 Lommel の近似式による音圧振幅分布

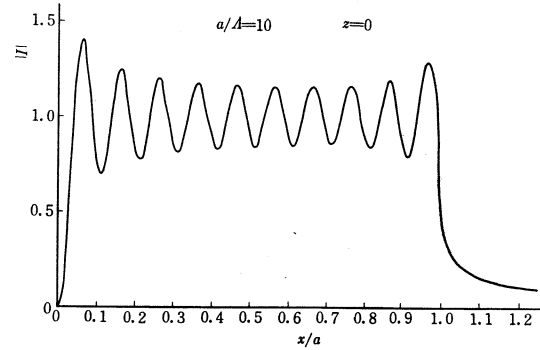


図15

距離で音圧 0 の方向である。

$$(32), (33) \text{ 式で } Y \equiv x/a, Z \equiv 2\pi z/ka^2 \text{ とおくと,} \\ p = \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} I$$

として、

$$I = 1 - e^{-i\frac{\pi}{Z}(1+Y^2)} \sum_{n=0}^{\infty} (iY)^n J_n \left(2\pi \frac{Y}{Z} \right) \quad Y \leq 1 \quad (34)$$

または、

$$= e^{-i\frac{\pi}{Z}(1+Y^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{Y} \right)^n J_n \left(2\pi \frac{Y}{Z} \right) \quad Y \geq 1 \quad (35)$$

となり、音場分布は2つの変数 Y, Z のみで与えられる。

(34) または (35) より I の絶対値を Y, Z の種々の値に対して求めその分布図を描くと図16となる。

とくに $Y=0$ とおくと中心軸上の変化が得られ、(34) 式より、

$$I_{Y=0} = 1 - e^{-i\frac{\pi}{Z}} \quad (36)$$

周辺直上は $Y=1$ において

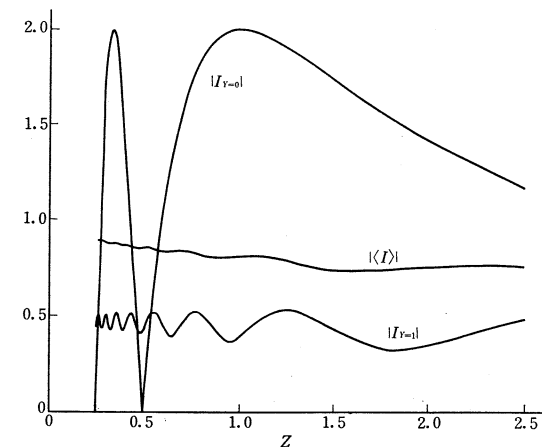
$$I_{Y=1} = 1 - e^{-i\frac{2\pi}{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n J_n \left(\frac{2\pi}{Z} \right) \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{Z} \cdot J_0 \left(\frac{2\pi}{Z} \right) + \frac{1}{2} i \sin \frac{2\pi}{Z} \cdot J_0 \left(\frac{2\pi}{Z} \right) \quad (37)$$

次に円形音源を送受波子として受音器としての作用をさせて多重反射法により媒体中の音の吸収を求めるときの音場分布の影響を調べる。音圧を $x=0 \sim a$ の範囲で平均したものを求めると、(32), (34) 式より

$$\langle p \rangle = \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} \cdot \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a I 2\pi x dx \\ = \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ \cdot 2 \int_0^1 \left[1 - e^{-i\frac{\pi}{Z}(1+Y^2)} \sum_{n=0}^{\infty} (iY)^n J_n \left(2\pi \frac{Y}{Z} \right) \right] \cdot Y dY \\ = \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} \left[1 - e^{-i\frac{2\pi}{Z}} \left\{ J_0 \left(\frac{2\pi}{Z} \right) + i J_1 \left(\frac{2\pi}{Z} \right) \right\} \right] \\ = \sigma c w_0 e^{i(\omega t - kz)} \langle I \rangle \quad (38)$$

が得られる。

図17は $I_{Y=0}, I_{Y=1}, \langle I \rangle$ の絶対値の Z による変化

図17 $|I_{Y=0}|, |I_{Y=1}|, |\langle I \rangle|$

を図示したものである。

次に $X \equiv kax/z$ において新しい変数を定義すると次の関係がある。

$$X = 2\pi Y/Z, \quad Y = XZ/2\pi \quad (39)$$

(35) 式に (39) 式を代入して I の絶対値を Z と X で表わすと、

$$|I| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi i}{XZ} \right)^n J_n(X) \right| \quad (40)$$

となり、 Z が大きくなると、

$$|I| \rightarrow \left| \frac{2\pi}{Z} \cdot \frac{J_1(X)}{X} \right| \quad (41)$$

となって遠距離音場の式となる。すなわち、遠距離音場と近距離音場の差は (40) 式の無限級数の第2項以下にあるといえることができる。図18は X をパラメーターとして $|I|$ を Z の関数で表わしたもので、実線は ($X=0, 1.2, 2.4, 4.6$ のとき) (41) 式すなわち遠距離音場の式より得られるものである。図から $Z=3 \sim 4$ の付近で遠距

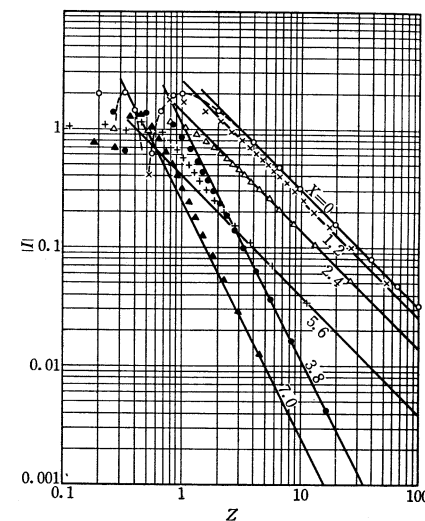
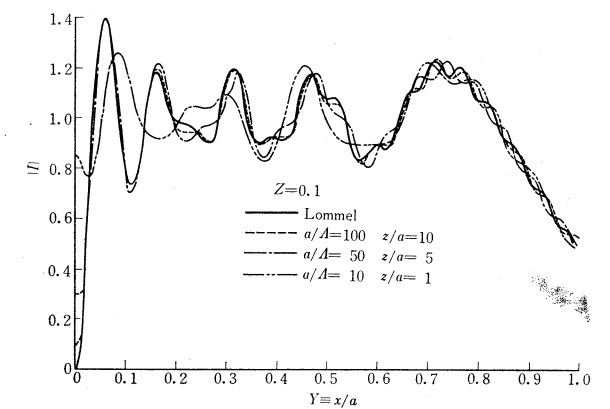
図18 X をパラメーターとした $|I|$ と Z の関係の計算値
実線は遠距離音場

図19

離音場すなわち Fraunhofer 領域から近距離音場すなわち Fresnel 領域への移行があることがわかる。また $J_1(X)=0$ の場合には ($X=3.8, 7.0$)、音圧振幅は距離の2乗に逆比例しておちているが、このことは (40) 式から明らかである。

最後に Lommel の近似式の近似の程度について述べる。Lommel の式によると任意の異なる音源についても同じ Z の面上では音場分布が互いに相似であるが、これは $z \gg a$, $z \gg x$ の仮定の下に得られた関係であって、一般に同じ Z であっても、 z/a または a/A の大きさによって分布は異なってくる。Lommel の式の近似度を求めるには正しい音場分布を求める必要があるが、それには前項に述べた数値積分法を適用すればよい。

$Z=0.1$ の場合について、 z/a または a/A を種々に変えて計算し、Lommel の式と比較したものが図19^{16), 19)}である。これから $z/a \geq 10$ の場合に Lommel の近似式が適用できることがわかる。

10. あとがき

超音波干渉計、超音波探傷器、超音波洗浄器など、超音波の応用において音源付近の音場を利用することが多い。またスピーカーその他の音源についても同様で、近距離音場の計算は音響学における基本的問題であるが、一般にその計算はなかなかやっかいである。

本稿では、その中でも特に簡単な円形ピストン音源の呈する音場について述べ、印画紙法による音場分布の映像、Schoch の線積分表示に対する適当な近似の導入と実験結果との比較、Lommel の近似式などを中心に論じた。

Schoch の式は円形でなくても一般のピストン音源に適用できる式であって、すでに円形のほか、楕円形、長方形、半円形の音源について同様な近似を用い、実験結果とよく合う結果を得ている。また、Lommel の近似式は、適用範囲に制限はあるが、手軽に円形ピストン音源の呈する音場を求める式としてすぐれた式であり、この式はさらに環状音源の呈する音場の計算に利用されて成

功している。

しかし音源の表面が一樣な速度と位相で振動する完全なピストン音源は存しないのであって、音源面上に速度分布がある場合の音場の問題、逆に希望する音場分布を与えて、これと合致する音場が得られるような音源を見出す問題、さらにピストン音源に対して、(1)式が常に適用できるものであろうかという Rayleigh の式の限界に関する問題など、まだまだ問題はつきないようである。

(1968年12月6日受理)

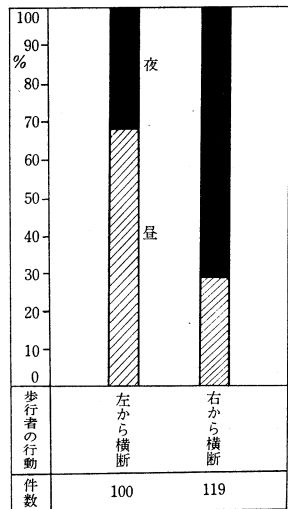
参 考 文 献

1) Lord Rayleigh, *Theory of Sound* (Dover Publ. New York, 1945), vol. II, p. 107.
2) H. Backhaus, Ann. Physik, **5**, 1, 1930.
3) L.V. King, Can. J. Research **11**, 135, 1934.
4) A. Sommerfeld, Electromagnetische Schwingungen Abschn. V in Frank-von Mises: *Differentialgleichungen der Physik*, Bd. II, 1935.

研 究 速 報

(p.32 よりつづく)

表 7 車両に対する横断方向と昼夜の関係



注) 横断については自動車の進行方向に対して左、右とした。

の約 70% は夜に、それぞれ生じている。これについては、夜間の対向車による眩惑、街路照明の配光、歩行者存在の遮へい物、横断者の心理など、多くの要素が関係していると考えられる。

7. 人の行動と歩道の有無の関係

表 8 は、人の行動を歩道の有無によって分類したものである。表 8 から歩道のある道路と歩道のない道路とでは、前者が 183 件、後者が 143 件で、歩道のある道路で生じた事故の方が多いことが知られる。しかし、歩行者

5) A.O. Williams, J. Acoust. Soc. Am. **23**, 1, 1951.
6) H. Stenzel, *Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen* (Verlag, Julius Springer, Berlin, 1939), s. 67 ff.
7) G.N. Watson, *Theory of Bessel Functions* (Cambridge, 1922) p. 366.
8) 根岸, 鳥飼, 生産研究, **5**, 246, 1953.
9) Y. Torikai, K. Negishi, J. Phys. Soc. Japan **10**, 1110, 1955.
10) 鳥飼, 根岸, 日本音響学会誌, **13**, 117, 1957.
11) 鳥飼, 生産研究, **8**, 410, 1956.
12) 鳥飼, 超音波音源付近の音場, 超音波研究専門委員会資料 (1957-4-2)
13) 鳥飼, 日本音響学会誌, **14**, 36, 1958.
14) A. Schöch, Akust. Z. **6**, 318, 1941.
15) M.E. Huford, H.T. Davis, Phys. Rev. **33**, 589, 1929.
16) 鳥飼, 生産研究, **15**, 421, 1963.
17) 鳥飼, 生産研究, **16**, 19, 1964.
18) 鳥飼, 超音波の近距離音場と遠距離音場, 超音波研究専門委員会資料 (1960-9-6)
19) 鳥飼, 近距離音場, 超音波技術便覧 (改訂新版) (実吉, 菊池, 能本監修), (日刊工業新聞社, 1966) p. 1399.
20) E. Lommel, Abh. der K. Bayer. Akad. der Wissen. **15**, 233, 1886.

表 8 人の行動と歩道の有無の関係

人の行動	歩道あり		歩道なし		合 計	
	件	%	件	%	件	%
対 面 進 行 中	1	0	10	7	11	3
背 面 進 行 中	3	1	19	13	22	7
交差点横断歩道横断中	43	23	5	3	48	15
交差点横断歩道外横断中	52	28	23	16	75	23
単路横断歩道横断中	11	6	7	5	18	5
単路横断歩道外横断中	43	23	24	17	67	20
路上遊戯・作業中	2	1	10	7	12	4
路上とび出し	14	8	25	18	39	12
そ の 他 (注)	11	6	13	9	19	6
不 明	8	4	7	5	15	5
合 計	183	100	143	100	326	100

(注) その他: 道路上に寝ていた、座っていた、倒れていた、など静止していたものである

の行動別にみると対面および背面進行中、路上遊戯・作業中、路上とび出しについては、それぞれ歩道のない道路で生じた事故の方が多く、これらの事故を合計すると歩道あり 20 件、歩道なし 64 件で約 1 対 3 になっている。結局、普通の横断事故と対面・背面進行中、路上遊戯・作業中、路上とび出しなど普通の横断以外の事故とを比較すると、歩道ありの場合約 7 対 1、歩道なしの場合約 1 対 1 であり、とび出しなどの事故は歩道のない道路に特徴的であるといえる。

8. おわりに

今回までに名車種における事故の特徴、ならびに全事故の概要について述べたが、次回は今回のいくつかの特徴的な事故についてさらに詳細な解析結果を報告したい。

(1968 年 11 月 21 日受理)

UDC 539.4.015.2: 666.11.017

ガ ラ ス の 強 度

Strength of Glass.

今 岡 稔*・長 谷 川 洋*

Minoru IMAOKA and Hiroshi HASEGAWA

われやすいものの代表のようにいわれているガラスは、実は決して弱い材料ではなくガラス繊維になると鉄に負けない強さを示す。ではなぜ普通の窓ガラスやコップなどは弱いのか。それについては、ガラス表面にできる小さなクラックが原因だ。と考えられているが、まだはっきりわからない点が多い。しかしそうした表面の欠陥を取除いてやれば、確かにガラスは強くなるし、強いガラスが作られる可能性もありうる。

ま え が き

戦後プラスチックがめざましい進出をみせた当時、ガラスは遠からずプラスチックに取ってかわられるのではないかと考えた人も少なくなかったと思う。しかしその後プラスチックはますます量産されて安くなり、その用途はいよいよ広く実生活のすみずみにまで及んだ感があるが、当初の予想と反してガラスの方もいたって健在で、いわば共存共栄の道を歩んでいるといえよう。ガラスがプラスチックに敗けるのではないかと考えた人たちは、“ガラスはわれやすい”ということ強く感じていたのであろう。たしかにプラスチックは透明でわれにくい材料で、ガラスの最大の欠点を取除いたわけであるが、一方ではかたさや圧縮、引張りに対する強さ、耐熱性や耐久性など、他の面でガラスに劣る点も多々あり結局多くの部分でガラスに取ってかわることができなかった。むしろプラスチックの出現によってガラスの本質が見直されてきたのではなからうか。しかし、いずれにしても“ガラスがわれやすい”という事実は本質的に変わったわけではなく、ガラス屋にとってこの問題は今後も大きな課題であることは間違いない。

“われないガラス”を作るということは、いうまでもなく古くからの課題であり、したがってまた多くの試みと努力が払われてきたことにいうまでもない。その結果として、現在“強化ガラス”が作られ、広く使われていることは周知のことと思う。この強化ガラスは、ガラスの表面に圧縮層を作りだすことにより、表面をかたくし曲げに対して引張りの力に弱いというガラスの欠点をカバーする効果で、ガラスをわれにくくしている。いま広く使われている方法は風冷強化法で、軟化温度付近まで加熱したガラスに空気を吹きつけて急冷する。こうして作られた強化ガラスは普通のガラスの引張り強さの 4 倍程度に強くなり、新幹線の列車の窓ガラスや自動車のフロントガラス、また最近は、一部コップなどにも使われている。一方こうした物理強化と呼ばれる強化ガラスの作り方に対し、最近化学強化といわれる新しい強化法が開発されて注目を集めている。これはガラス表面に圧縮層を作るのに、表面だけイオン交換させて大きなイオン

を押込むとか、表面に結晶化層を作らせるなどの方法によるもので、発表されているところによると 10 倍からそれ以上にも達している。

ところで、近頃のガラスの新しい用途として注目されているものに、強化プラスチック (FRP=Fiber Glass Reinforced Plastic) がある。これは名前のとおりプラスチックの機械的な弱さを補強して強くしようとするもので、その補強材料としてガラス繊維が使われている。こうした強化プラスチックはモーターボートから次第に大きな船に、さらには自動車のボディなど用途を広めつつあり、次第に鉄にとってかわろうとしつつあるといえそうである。さて、これまで“われやすい”ガラス、弱いガラスであったものが、ここでは逆に強いガラスとして登場してきている。また互いにライバルはずであったガラスとプラスチックが、ここでは完全に一体となって協力しているのもおもしろい。いずれにしてもガラスのこのような転身ぶりは板ガラスとガラス繊維の強さを比較してみると容易に理解されよう。すなわち板ガラスの場合引張り強さは 5 kg/mm² からせいぜい 10 kg/mm² であるのに、ガラス繊維の場合はその太さにもよるが、10~15 μ 付近で 100 kg/mm² 以上の引張り強さがある。これは板ガラスの 10 倍から 20 倍の強さで、これまでの強化ガラスよりもはるかに強い。それに細い繊維状のガラスは柔軟性もあり、板ガラスなどのガラスロックとはまったく違った性格をみせる。そこでガラスの強度ということを考えてみる必要がある。なぜ板ガラスはわれやすく弱いのか、ガラス繊維はなぜ強いのか。それも細いものほど強いが、一体ガラスの本質的な強さはどの程度のものか、等々である。

1. ガラスの理論強度

そこで、まずガラスを形成している化合物の化学結合の強さを基礎にガラスの強度を理論的に求めて、ガラスの強さの限界、本質を知っておこう。Náray-Szabo と Ladik¹⁾ が SiO₂ ガラスについてこうした計算をしている。すなわち Si-O の結合の強さと単位面積当たりの結合の数を計算して 2470 kg/mm² という値を出している。これは確かに構造的にも理想的なものについての理論値といえようが、実際の材料についての理論値ということ

* 東京大学生産技術研究所 第 4 部