

# VHF 超音波による光散乱

Scattering of Light by VHF Ultrasonicwaves

山崎 正之\*

Masaayuki YAMAZAKI

## 1. 緒言

超音波が伝ばしている媒質に光を通すと、超音波による密度変化のために光の一部が入射光の方向と異なった方向に伝ばする散乱光として射出する。この種の問題を取り扱う正統的理論は、誘電率が時間的、空間的に変化するときの Maxwell の電磁場方程式を解くことによって遂行される<sup>1)</sup>。すでに、この方法により、無限に幅の広い入射光が、無吸収媒質中を伝ばする VHF 超音波によって散乱されるとき、散乱光強度の角度依存性が研究されている<sup>2)</sup>。しかしここでは、低パワーの VHF 超音波による光散乱の場合には、超音波によって振幅変調された dipole moment からの散乱波の寄与を、位相を考慮して加え合わせるという回折積分を解く近似法によっても同じ結果を導くことができることを示す。この方法によれば入射光の幅が有限のとき、超音波に吸収が存在するとき、また三次元における散乱を簡単に扱うことができる。最後に応用の一つである音速と吸収の測定に関して若干の注意を述べる。

## 2. 理論

以下の条件下における二次元と三次元の散乱を扱う。

条件 (1) 超音波は十分弱く、入射光の屈折は無視できる。(2) 散乱光強度は入射光強度にくらべ無視できる。条件(2)は後でとりのぞく。

### (1) 二次元の散乱

入射光、散乱光、超音波の幾何学的配置を図 1 に示

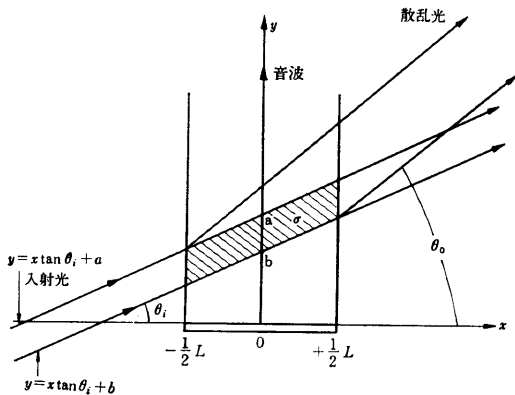


図 1 二次元散乱の入射光、散乱光、超音波の幾何学的配置

す。すなわち  $y$  方向に伝ばする幅  $L$  の平面進行音波に任意の方向から入射した光の散乱光強度を計算する。

点  $(x_0, y_0)$  における実効電場は、条件(1)より、

$$E_{\text{eff}}(x_0, y_0) = |E_{\text{eff}}(x_0, y_0)| \cdot \text{Re}\{e^{i(k\lambda x_0 + k\mu y_0 - \omega t)}\} \quad (1)$$

ただし、 $\lambda = \cos \theta_i$ 、 $\mu = \sin \theta_i$  は入射光の方向余弦、 $k$  は入射光の波数、 $\omega$  は入射光の角振動数、 $\text{Re}$  は実部である。

$|E_{\text{eff}}(x_0, y_0)|$  はエネルギー保存則より、

$$|E_{\text{eff}}(x_0, y_0)| = |E_i| \left( 1 - \frac{\left| \int_{-L/2}^{x_0} \Delta E_i dx \right|^2}{|E_i|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

ただし、 $|E_i|$  は入射光の振幅、 $\left| \int_{-L/2}^{x_0} \Delta E_i dx \right|$  は散乱光の振幅である。

点  $(x_0, y_0)$  における密度は

$$\rho = \rho_m + \Delta\rho = \rho_m + |\Delta\rho(x_0, y_0)| \cdot \text{Re}\{e^{i(Ky_0 - \Omega t)}\} \quad (3)$$

ただし、 $\rho_m$  は平均密度、 $|\Delta\rho(x_0, y_0)|$  は音波によって発生した密度変化の振幅、 $K$  は音波の波数、 $\Omega$  は音波の角振動数である。

したがって、点  $(x_0, y_0)$  に発生する dipole moment は条件(2)より、 $\alpha$  を分極率とすれば、

$$P_{\text{dip}} = \alpha \rho E_{\text{eff}} = \alpha \rho_m E_i + \alpha \Delta\rho E_i = P_{\text{dip}}^T + P_{\text{dip}}^S \quad (4)$$

(4) 式の右辺第一項は透過光を、第 2 項は散乱光を発生する dipole moment をあらわしている。

(1) 式と(3)式を(4)式に代入すると、 $P_{\text{dip}}^S$  は

$$P_{\text{dip}}^S = |\Delta\rho(x_0, y_0)| |E_i(x_0, y_0)| \cdot \text{Re}\{e^{i(Ky_0 - \Omega t)}\} \cdot \text{Re}\{e^{i(k\lambda x_0 + k\mu y_0 - \omega t)}\} \quad (5)$$

比例定数を無視すれば、この dipole moment が十分遠くの点  $(x, y)$  に作る電場は  $t \rightarrow t - \mathbf{R}' \cdot \mathbf{S} / C'$  に変換して

$$\Delta E = |E_i| |\Delta\rho| \left\{ e^{i(\xi x_0 + \eta y_0)} \cdot e^{i(k' \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} - \omega' t)} + e^{i(\xi x_0 + \eta' y_0)} \cdot e^{i(k'' \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} - \omega'' t)} \right\} \quad (6)$$

ただし、 $\xi = k\lambda - k'\lambda'$ 、 $\eta = k\mu - k'\mu' + K$ 、 $\eta' = k\mu - k''\mu' - K$ 、 $\lambda' = \cos \theta_0$ 、 $\mu' = \sin \theta_0$ 、 $\mathbf{R} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ 、 $\mathbf{R}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$ 、 $\omega' = \omega + \Omega$ 、 $\omega'' = \omega - \Omega$ 。  $k' = \omega' / C'$ 、 $k'' = \omega'' / C'$ 、 $C'$  は媒質中の光速、 $\mathbf{S}$  は散乱光の伝ば方向の単位ベクトルである。

(6) 式の第 1 項は anti-Stokes 光を、第 2 項は Stokes 光を示している。以下では式が複雑になるのを避けるため、anti Stokes 光のみを考慮する。もちろん厳密には、anti Stokes 光と Stokes 光を同時に考えなければなら

\* 東京大学生産技術研究所 第 1 部

研究速報  
 いが, 以下の考察で, 光の幅が広ければ干渉効果により指向性が良くなり, anti Stokes 光と Stokes 光を別々に考えても良いことがわかる.

点  $(x, y)$  における全電場は, 音波と入射光が交差する領域  $\sigma$  で積分して

$$E_s = dx_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} e^{i\xi x_0} dx_0 \int_{x_0 \tan \theta_i + b}^{x_0 \tan \theta_i + a} |E_i| |\Delta\rho| e^{i\nu y_0} dy_0 \quad (7)$$

(7)式は  $|E_i|$ ,  $|\Delta\rho|$  を任意の関数型として含んでいるので, 一般的である. 次に  $|E_i|$ ,  $|\Delta\rho|$  に特別な関数型を仮定し, 実際に (7) の積分を行なう.

1)  $|E_i| = \text{const.}$  (ビーム幅  $W$  内),  
 $|\Delta\rho| = \text{const.}$  ( $-L/2 \leq x \leq L/2$ ) (8)

このとき,  
 $E_s = WL \text{sinc}(1/2) W\eta \cdot \text{sinc}(1/2) L(\xi + \tan \theta_i \eta)$  (9)

ただし,  $\text{sinc} X = \sin X/X$  をあらわす.  $W \rightarrow \infty$  では, 干渉効果がより鋭くなるため,

$$W \text{sinc}(1/2) W\eta \rightarrow 2\pi\delta(\eta) \quad (10)$$

ここで,  $\delta$  は Dirac の  $\delta$  関数である.

したがって, 光は  
 $\eta = k\mu - k'\mu' + K = 0$  (11)

を満す方向にのみ散乱される. (11)式を用いると,  $\xi$  は,  $\mu$  が  $V/C' - (K/2k)(1 - V^2/C'^2) \equiv \sin \Theta \equiv \theta = -K/2k$  の近傍では  $\xi = K(\theta - \theta_i)$  となる. ただし  $V$  は音速である.

したがって, 散乱光の電場振幅は,  
 $E_s = L \text{sinc}(1/2) KL(\theta - \theta_i)$  (12)

2) 音波に吸収が存在する場合, すなわち,  
 $|E_i| = \text{const.}$  (ビーム幅  $W$  内),  
 $|\Delta\rho| = e^{-\beta y_0} (-L/2 \leq x \leq L/2, \beta > 0)$  (13)

このとき, 特に  $\eta = 0$  の方向では  
 $E_s = e^{-\beta a}(1 - e^{-\beta W})L \text{sinc}\{1/2[K(\theta - \theta_i) + i\beta \tan \theta_i]\}$  (14)

(12)式および(14)式で  $W \rightarrow \infty$  にしたものは Gordon 等が微分方程式を解いて得た結果<sup>3)</sup>と一致する.

これまで入射光の一部が散乱されるにもかかわらず, 実効電場と入射光電場が等しいとしてきた. いままで得られる結果を用いて, 散乱光強度に補正を行う. 入射光電場の振幅を1に規格化すると,  $-L/2$  から  $x_0$  までに散乱された電場の振幅は, (12)式より,  $\theta_i = \theta$  のとき,

$$|E_s| = \int_{-\frac{L}{2}}^{x_0} \Delta E_s dx = A \left( x_0 + \frac{L}{2} \right) \quad (15)$$

ここで  $A$  は比例定数である.

(15)式を(2)式に代入すると,  
 $|E_{\text{eff}}| = [1 - A^2(x_0 + L/2)^2]^{1/2}$   
 $1 \gg A^2(x_0 + L/2)^2$  として右辺を展開すると  
 $|E_{\text{eff}}| = 1 - (1/2)A^2(x_0 + L/2)^2$  (16)

散乱光の電場振幅は, (16)式を(7)式に代入して,  
 $E_s = AL - A^3L^3/6$  (17)

(16)式と(17)式は正確な取り扱いによって得られる結果  $E_s = \sin AL$ ,  $E_{\text{eff}}(L/2) = \cos AL$  を級数展開した形になっている.

(2) 三次元の散乱

三次元の場合も二次元の場合と本質的に異なるところはない. ただし回折積分が二重積分から三重積分に変わる. ここでは,  $y$  方向に伝ばする幅  $L$  の超音波に, 入射面が  $xy$  面である円形断面を持つ平面光波が入射したときの  $xy$  面内における散乱光強度の角度依存性を求めるに止める. このとき, (7)式に代わるものは

$$E_s = \int_{-a}^{+a} dx_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} e^{i(k\lambda - k'\lambda')x_0} dx_0 \int_{x_0 \tan \theta_i + Y - \frac{\sqrt{a^2 b^2 - b^2 x_0^2}}{a}}^{x_0 \tan \theta_i + Y + \frac{\sqrt{a^2 b^2 - b^2 x_0^2}}{a}} e^{i(k\mu - k'\mu' + K)y_0} dy_0 \quad (18)$$

となる. ここで,  $Y$  は入射光波の中心と  $y$  軸の交点の座標,  $a$  は円の半径,  $b = a/\lambda$  である.

$$\sin(Z \cos \theta) = 2[J_1(Z) \cos \theta - J_3(Z) \cos 3\theta + \dots]$$

$J_n$  は第1種ベッセル関数

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0 \quad (m \neq n)$$

を考慮して, (18)の積分を行なうと

$$E_s = \pi a b L \frac{2J_1(b\eta)}{b\eta} \text{sinc}(1/2) L(\xi + \tan \theta_i \eta) \quad (19)$$

3. 音速, 吸収測定への応用

最後に音速と吸収測定について注意を述べる. (12)式によれば, 吸収が無視できる場合には, 超音波セルを回転し,  $E_s$  が最大となる角,  $\theta_i = \theta = -K/2k$  より音速を算出することができる. しかし, 吸収が存在するときには, (14)式によって音速を算出しなければならない. このとき, 回転によって  $a$  が変化しないように回転軸を選ぶ必要がある. このように回転軸を選べば,  $\beta/K < 1$  である限り音速は  $E_s$  が最大となる角の測定からもとまる. 吸収測定は(6)および(16)より, 超音波セルを音波の伝ば方向に平行移動することによって求めることができる. もちろん, これは光のビーム幅や空間的強度分布には依存しない. ただ(17)式よりわかるように, 入射光強度と散乱光強度の比を約 10 : 1 以下にして測定する方が補正の点から望ましい. (1968年11月25日受理)

文 献

1) John C. Slater Revs. Modern Phys. 30, 197 (1958)  
 2) Erwin David Phys. Zeitschr. 38, 587 (1937)  
 3) E. I. Gordon et al. B. S. T. J. 44, 693 (1965)  
 4) W. R. Klein et al. Acustica, 15, 67 (1965)