

# 小孔の回折像について

On the Diffraction Pattern of a Small Circular Aperture

故 鈴 木 恒 子\*

Tsuneko SUZUKI

大きなつい立の中にあけたいろいろの形の小孔に光をあてたとき、その後方の回折像の理論は基礎的に重要なもので、計算公式等も種々与えられているが、具体的な数字をくわしく示してあるものは少ない。筆者はこれを数値計算により解明する一連の研究の出発点とし、円形および同心輪帯へ光が垂直に入射した場合をくわしく計算し、強度分布を示すグラフを得た回折像の性質について二、三の事を明らかにしたので、従来の研究と併せてこれを示した。

大きな紙片に針で小孔を明け、これに点光源からの光をあてたときの後方の光の分布は、幾何学的に言えば光源を頂点とし小孔を導線とする円すい内に様に広がったものになるはずであるが、実際には回折のためもっと複雑なものとなる。小孔が円形のとときのいわゆるピンホールカメラは最近人工衛星に載せられたり集積回路の製作に用いられたりなど利用の道が多くなり<sup>1)</sup>、また回折理論もホログラフィや文字読取りの発達にともない詳しいものが必要になってきた。著者らは円形および輪帯開口の場合の強度分布に関する詳しい計算を試みたのを機会に、これらの回折像に関する諸事実をまとめてみた。

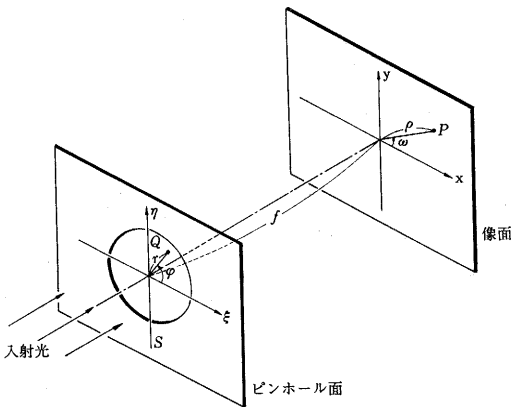


図 1

## 1. 振幅の式

図1の小孔 S に光が当たっているとき、これから距離 f の像面上の一点 P における振幅は f が著しく大で S 内の小面積 Q (大きき dδ から出た光が P に達するまでの振幅の減小が P, Q の位置によりあまり変わらないとすれば、これを小孔全面について積分したものに比例する。面積 dσ からの光の振幅は  $\overline{QP} = D$ , 波長を λ, 入射光の小孔面での振幅を u<sub>0</sub> とすれば、あまり小孔の近くでなければ下式で与えられることはよく知

られている。

$$du = \frac{u_0}{i\lambda f} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}D} d\sigma$$

座標を図のように Q(ξ, η), P(x, y) とすれば

$$D = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + f^2}$$

あるいは極座標 Q(r, φ), P(ρ, ω) で表わせば

$$D = f + \frac{1}{f} \rho r \cos(\varphi - \omega) + \frac{r^2}{2f} + \dots$$

したがって、小孔を半径 a の小円とすれば、P における振幅は  $d\sigma = r dr d\varphi$  であるから、 $2\pi\lambda = k$  として

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_0}{i\lambda f} \int_a du \\ &= \frac{u_0}{i\lambda f} e^{ikf} \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp ik \left( \frac{r\rho}{f} \cos(\varphi - \omega) + \frac{r^2}{2f} + \dots \right) r dr d\varphi = \frac{u_0}{i\lambda} e^{ikf} (C + iS). \end{aligned}$$

ただし  $\frac{\pi}{\lambda f} = Z$ ,  $\frac{2\pi}{\lambda f} \rho = R$  として

$$C(\rho) + iS(\rho) = \int_0^a \exp(iZr^2) J_0(Rr) r dr \tag{1}$$

この積分はいろいろの方法でなされており、 $eiZr^2$  をベッセル関数の級数に展開し項別積分により求めると、ロンメル関数<sup>2)</sup> U, V を用いて

$$\left. \begin{aligned} \rho \geq a \text{ のとき: } C + iS &= i(\lambda f) eiZa^2 \\ &\quad (U_1 - iU_2) \\ \rho \leq a \text{ のとき: } C + iS &= i(\lambda f) \{ eiZ\rho^2 \\ &\quad - eiZa^2 (V_0 + iV_1) \} \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

したがって、強度はたとえば  $\rho \geq a$  のときは下式で与えられる。

$$I(\rho) = I_0(U_1^2 + U_2^2).$$

$eiZr^2$  を circle polynomial  $R_n^m(\rho)$  に展開して項別積分を行なえば、 $\rho \leq a$  のいかんにかかわらず用いられる下記のゼルニケ・ニーボアの解<sup>3)</sup>を得る。

$$u = \sum (i)^m (2m+1) J_{m+1/2} \left( \frac{a^2}{2} Z \right) J_{2m+1}(aR) / aR. \tag{3}$$

\* 東京大学生産技術研究所第1部, 文責在編者 久保田広

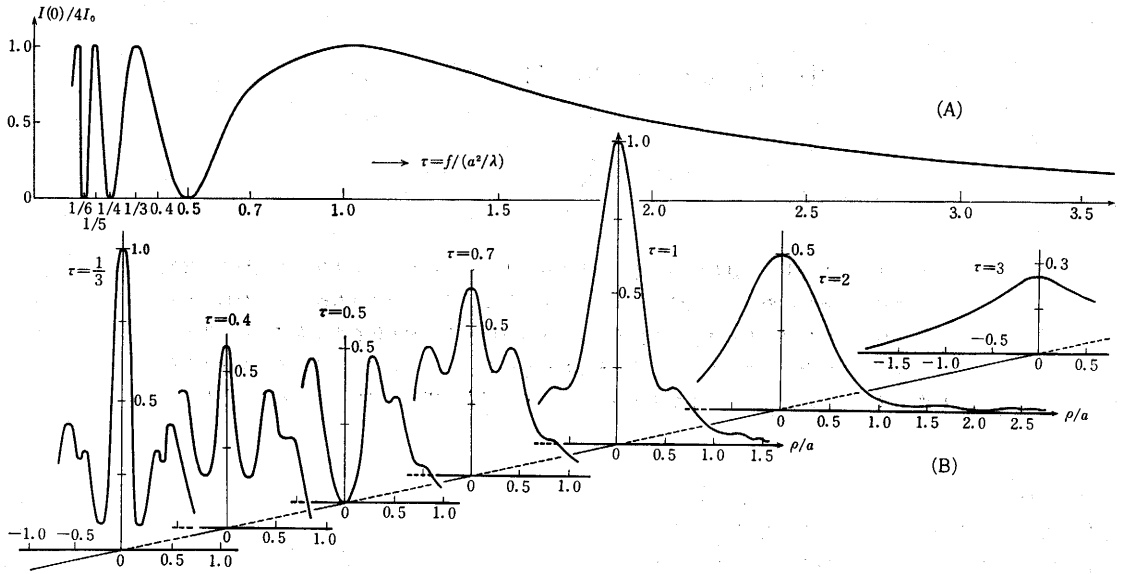


図 2 等強度線 (A) 光軸上, (B) 像面上

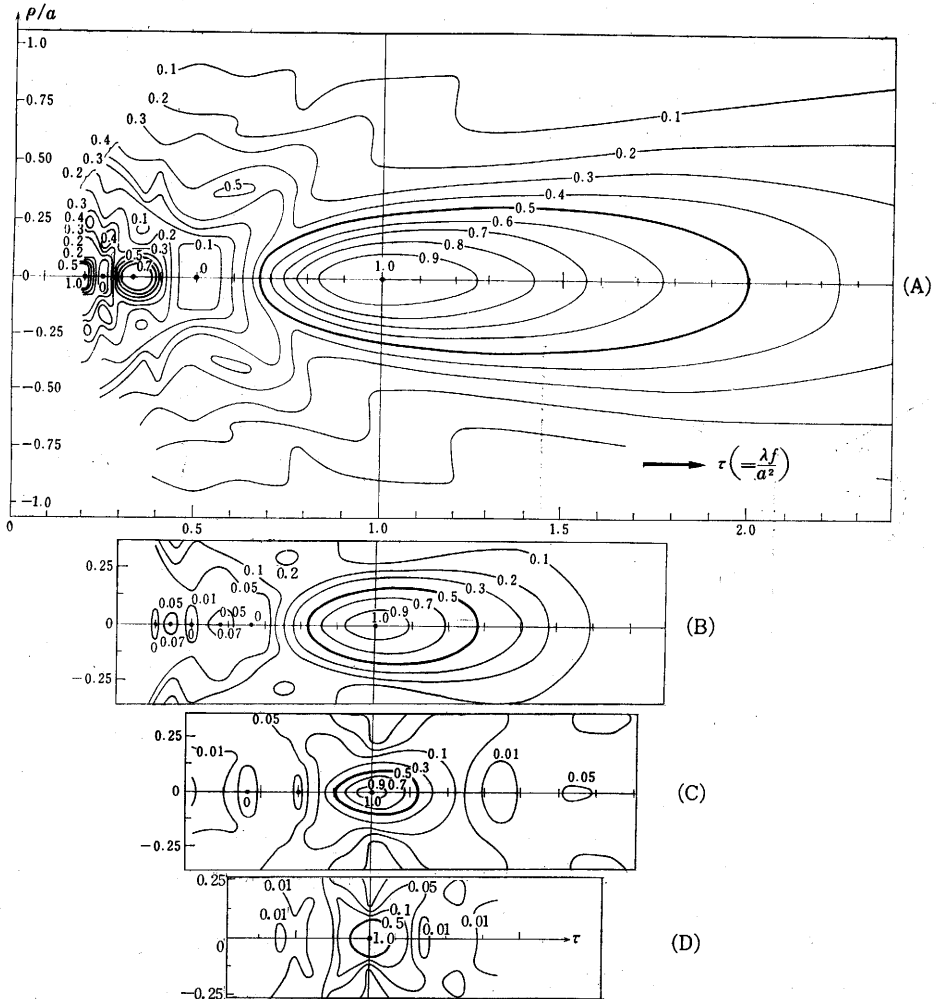


図 3 光軸を含む面内の等強度線 (M: 輪帯数)  
 (A)  $M=1$  (ピンホール), (B)  $M=2$ , (C)  $M=3$ , (D)  $M=8$

$J_0(aR)$  を  $r$  のべき級数に展開し項別積分した Boivin の解<sup>4)</sup>は、後述の輪帯板の計算に用いられる。

2. 主焦点および副焦点

光軸上の点 ( $\rho=0$ ) の振幅は(3)からただちに

$$C(0) + iS(0) = 2\pi \int_0^a \exp(iZr^2) r dr$$

$$= \frac{2\pi}{Z} e^{i\frac{a^2}{2}Z} \sin \frac{a^2}{2} Z$$

$$\therefore I(0) = I_0(C^2 + S^2) = 4I_0 \sin^2 \frac{\pi}{2\tau} \quad (4)$$

ただし、 $I_0 = |u_0|^2$  は小孔面上での入射光の強度で、光源が無限遠にあれば(今後はこの場合のみ考える)小孔がなく光が光源から直接来ているときの  $P$  の強度(常数)に等しい。 $\tau = \frac{\lambda f}{a^2}$  はフレネルの数といわれ、小孔の半径が一定のときは小孔から像面までの距離を、この距離が一定のときは小孔半径を表わすパラメータとして重要な無次元の数である。

(4)は

$$\tau = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$$

に  $I(0) = 4I_0$  の極大を持ち、極小は  $I(0) = 0$  で

$$\tau = \infty, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$$

にある(図2(A))。これらの極値を与える点を通る光軸に直角の面(像面)上の強度分布のいくつかを示すと、同図(B)ようになる。さらに詳しい様子を知るため多くの点での強度を求め、これらから光軸を含む(子午面)内の等強度線を描くと図3(A)ようになる。

小孔のところに焦点距離  $f = \frac{a^2}{\lambda}$  の無収差レンズを置くとその焦点の強度の  $I_0$  との比(集光係数)は

$$I(0)/I_0 = \pi^2.$$

しかるに小孔の集光係数は、 $\tau$  のいかんにかかわらず  $I(0)/I_0 = 4$  であるから小孔もレンズの約半分の集光力があるといえよう。また前記の図を見ても極大付近の三次元的まとまりもよいので、これらのことから小孔は

$$\text{焦点距離} = \tau \frac{a^2}{\lambda}, \tau = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$$

の多焦点レンズと考えてよい。このうち  $\tau$  が小さい像面では高次回折像の強いフレネル回折像を作るが、 $\tau$  が大になるにしたがい、レンズの場合のそれ(フラウンホーフェルの回折像)に近くなるので  $\tau=1$  を主焦点、他を副焦点といおう。

3. 小円板の回折像

小孔とは反対に光軸上にこれを中心とする半径

\* 横軸は  $\rho$  自身でなく  $\tau=1$  のとき図1(B)と一致するよう  $\rho/\sqrt{\lambda f}$  をとった。

$a$  の小円板があるときの、その後方の振幅  $u'$  は、小円板がないときの振幅  $u_0$  から同一半径の小孔のそれを引いたもの

$$u' = u_0 - u$$

であるから、小円板があるときの解を知れば与えられ、たとえば  $\rho \leq a$  のときは(2)から

$$I(\rho) = I_0(V_0^2 + V_1^2).$$

ピンホールの主焦点面に相当する像面 ( $\tau=1$ ) 内の強度分布を描くと図4の実線のようになる。光軸上では

$$V_0(0) = 0, V_1(0) = 1 \therefore I \equiv I_0.$$

したがって、中心は幾何光学的影の中であるにもかかわらず、小円板がないときと同じ明るさであり、これはポアソンの点として知られている。

4. 最良像点および焦点深度

小孔は多焦点レンズの働きをし、そのうち  $\tau=1$  の像面が図2(B)、図3(A)などから見て、光のまとまりが最もよいので、これを主焦点面といったが、実はこれらの図では像面によって倍率が異なるので、これらの図からのみで像の良さを比較することは正しくなく主焦点面が必ずしも最良像面とはいえない。これを求めるためには像面を一定にし、小孔の半径  $a$  を変えたときの強度分布を描き、倍率、視界角がひとしい場合を比べるべきである。ただし、 $a$  を変えると入射光量が変わるから、同時に露出時間を  $1/a^2$  に比例して変え、中心強度が像のよさの目やすになるようにする。 $f$  が一定の像面で  $a$  を変えたときの強度分布を  $I(\rho)/a^2$  を縦軸に  $\rho$  を横軸\*として描くと図5ようになる。これによると、 $\tau=1$  および2の像面は同じ中心強度を与え、中心強度最大の面はこの間にあり、この間の像面はいずれもだいたい同じような良い像を与えるので  $1 \leq \tau \leq 2$  が小孔の主焦点の

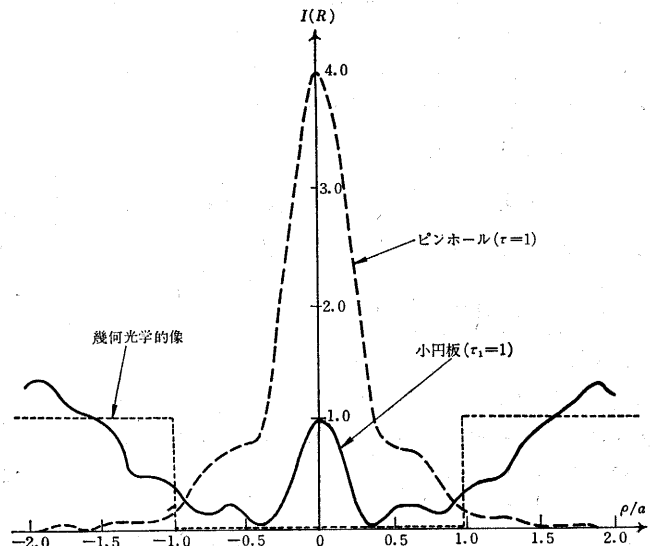


図4 主焦点面における回折像

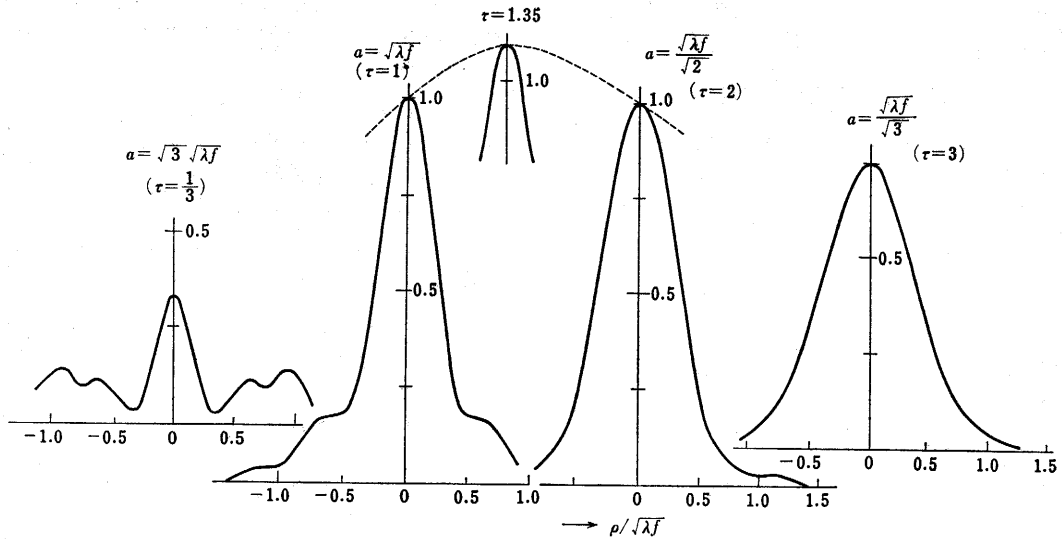


図 5 各像面の回折像の比較 (同一倍率)

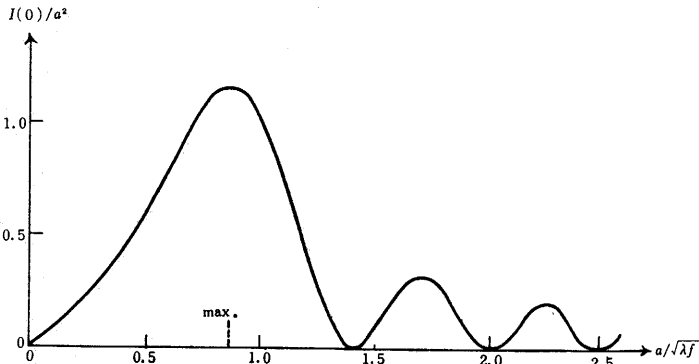


図 6 中心強度の比較 (露出時間  $1/a_2$  に比例)

深度と考えられる。この値は小孔から主焦点までの距離にひとしいから、焦点深度は幾何光学で考えるように  $\infty$  ではないとしてもきわめて深いものである。ただし、これは主焦点付近の話で、図 1 (A) から明らかなように副焦点では焦点深度はずっと浅くなる。中心強度

$$I = I(0)/a^2 = 4 \frac{I_0}{a^2} \sin^2 \frac{\pi a^2}{2\lambda f}$$

を  $a/\sqrt{\lambda f}$  を横軸にとり、グラフを描くと図 6 のようになる。極大を求めるため  $\frac{\pi a^2}{2\lambda f} = x$  とおいて

$$\frac{\partial I}{\partial a} \sim \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sin^2 x}{x} \right) = 0 \quad \therefore 2x = \tan x.$$

この最も小さい正の根は

$$x = 0.37\pi \quad \therefore a^2 = 0.74\lambda f$$

すなわち、 $\tau = 1.35$  が中心強度最大の点、すなわち小孔の最良像点を与える条件でその強度は

$$I(0)/4I_0 = 1.10$$

である<sup>5)</sup>。しかしこの点は主焦点とわずかに異なるのみで像の良さもほとんど主焦点と同じであるので (数字的

なきれいさからいって、レーレーが推した値<sup>6)</sup>をとり、主焦点面を最良像面であるといってもよいであろう。

しかし、この面に感光紙を置いてピンホールカメラとして使ってもきわめて胴の長いかつ、暗いカメラとなる (たとえば  $a = 1$  mm,  $\lambda = 0.5\mu$  として  $f = 2$  m,  $F/1,000$ )。そこで副焦点が使えるときは、ここを像面として使った方が明るく、かつ胴の長さも短い ( $\tau = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$  でそれぞれ  $f = 70$  cm,  $F/350$  または  $f = 40$  cm,  $F/200$ ) もものとなる。ただし、被写体はコントラストの高ものに限りに、かつ  $\gamma$  の大きな感光剤を用い、露出を加減し高次回折像が写らないようにするなどの工夫を要する。

### 5. 解 像 力

図 7 の実線は主焦点面における小孔の回折像の強度分布を与えたもので、小孔の集光性により、実際には幾何光学的な像 (同図点線) よりはるかによい像を与え、同じ  $F$  ナンバー ( $F/\frac{a}{2\lambda}$ ) の無収差レンズの焦点における回折像 (同図破線、いずれも中心強度を 1.0 に揃えてある) と、裾の方を除きほぼ同じものである。

これから、主焦点面での小孔の解像力  $R$  は、同一  $F$  ナンバーの無収差レンズのそれにひとしいとすれば、

$$R = 0.61 \frac{\lambda}{a} = 0.61 \frac{a}{f}.$$

したがって、小孔の半径が大きいほど、解像力は大である。

以上の議論は、光軸上の点光源の像のみを見ての議論

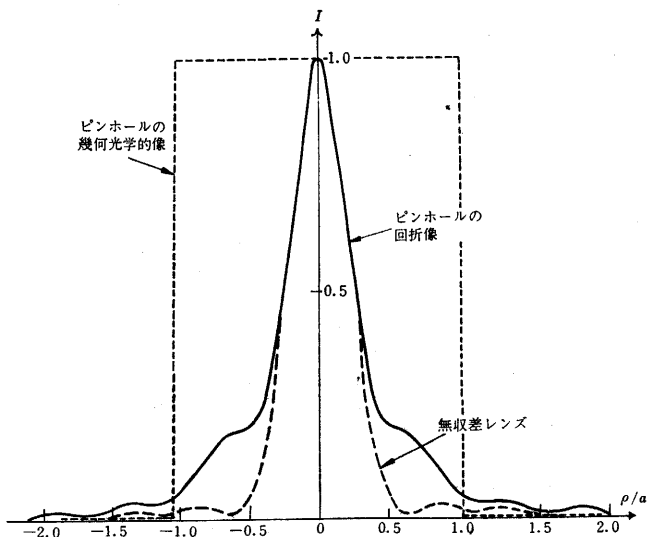


図 7 小孔およびこれと同一Fナンバーの無収差レンズの回折像の比較(主焦点面)

で斜入射光については言及しなかった。これについての実験および議論は一、二あるのみで<sup>7)</sup>、強度分布や等強度線を描いて調べることは行なわれていない。

### 6. 輪 帯 板

小孔にはこのように集光作用があるが、孔が一つではきわめて暗いものであるので、内および外径がそれぞれ  $\sqrt{2m}a$ 、および  $\sqrt{(2m+1)}a$ 、( $m=0, 1, 2, \dots$ )の多数の同心の輪帯を用いばずっと明るい像を得る。これはレーレーによって初めて作られたがさらに詳しい実験をした人の名をとりソレーの輪帯板といわれている。このときは多数の波が一定の位相差で集まるので、明るくなることのほかに多波干渉の理により像が(三次元的)鋭くなることはあまり気付かれていない。

半径  $a_m$  と  $a_{m'}$  との間の輪帯から来る光による振幅  $u_m$  は(1)により

$$u_m(\rho) = C_m(\rho) = 2\pi \int_{a_m}^{a_{m'}} \exp(iZr^2) J_0(Rr) r dr.$$

ただし、 $a_m = \sqrt{2m}a_1$ 、 $a_{m'} = \sqrt{2m+1}a_1$ である。この積分は既述の方法で求められ考える点の振幅は、これを輪帯全部について加えたもので輪帯の数を  $M$  として

$$I = \left( \frac{u_0}{\lambda} \right)^2 \left| \sum_{m=0}^{M-1} u_m \right|^2 \quad (5)$$

したがって、軸上の強度は  $|u_0|^2 = I_0$  として

$$I(0) = \left( \frac{4\pi^2}{\lambda f} \right)^2 I_0 \left| \sum_{m=0}^{M-1} \int_{\sqrt{2m}a_1}^{\sqrt{2m+1}a_1} \exp(iZr^2) r dr \right|^2 = I_0 \left( \frac{\sin M\pi/\tau_1}{\cos \pi/2\tau_1} \right)^2.$$

ただし、 $\tau_1 = \frac{\lambda f}{a_1^2}$  である。これは  $M=1$ (ピンホール、2、4 および 8 のとき図8のようになる(異なる  $M$  の曲線の高さは  $\tau_1=1$  での極大が同じになるよう揃えてある)。

これからわかるように、 $\tau=1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$ に極大

があり、さらに子午面内の等強度線を描くと、図3(B)(C)(D)のようになり、極大を中心とする光の集まりはよいので、小孔のときと同様これらを焦点とする多焦点レンズの働きをするようである。しかし、ソレーは  $M=200$  の輪帯板を作り観測したところ、 $\tau_1=1$  の焦点のみ光源の鮮明な像を与え、 $\tau=\frac{1}{3}$  はボケた像、 $\tau=\frac{1}{5}$  では像は見えなかったといっている<sup>8)</sup>。

主焦点面上での強度分布も図9に示すように、 $M$  が大になるにしたがい、0 次回折像は鋭いものとなる。この半値幅  $l$  は図10の実線で示すように、 $M$  とともに小さくなり、 $1/l$  はほぼ  $M$  に比例する(同図点線)。

しかし、図の実線からわかるように、 $M=6$  ぐらいで

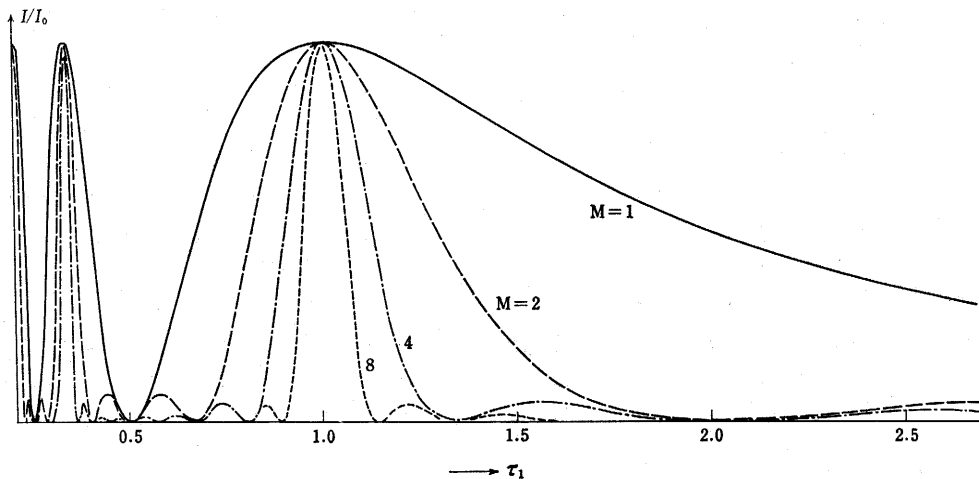


図 8 軸上強度 ( $M$ : 輪帯数)

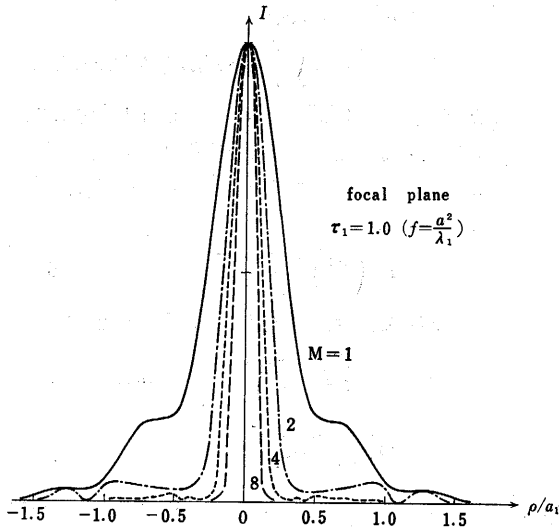


図 9 主焦点面上の強度

事実上飽和に達するから、これ以上、輪帯を増しても光量を増すという以外には無意味で、光量を増すためには(ウッドがしたように)、輪帯の光を通さないところも光を通すようにし、これに光路差  $\frac{\lambda}{2}$  を与える透明な薄膜をつけた方がよく、これによれば同一半径の輪帯板で光量は4倍となる。  
(1968年7月13日受理)

参考文献

- 1) A. H. Gollas, G. A. Gibert & A. B. Hitterland: Jour. SMPTE 74 (1965) 321; P. A. Newman & V. E. Rible: Appl. Opt. 5 (1966) 1225
- 2) E. Lommel: Abh. Bayer. Akad. 15 Abt. 2 (1885) 233
- 3) B. R. A. Nijboer: These (Groningen, 1942) 43
- 4) A. Boivin: Jour. Opt. Soc. Am. 42 (1952) 60
- 5) E. W. H. Selwyn: Photo. Jour. 90B (1950) 49
- 6) Rayleigh: Sci. Pap. I 513

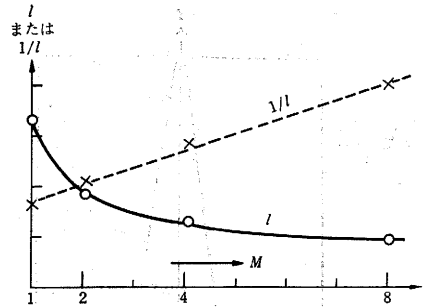


図 10 半値幅と輪帯数

- 7) E. W. H. Selwyn (前出実験): 佐柳和男: Jour. Opt. Soc. Am. 57 (1967) 1091 (理論)
- 8) J. L. Solet: Ann. d. Phys. VI 156 (1875) 99

付記

著者は、昭和 25 年東京女子大の数学科を卒業後直ちに当時の第二工学部の私達の研究室に入られ、以来十数年間得意の数値計算をもって皆の研究を助けて下さったが、昭和 42 年 10 月、自動車事故のため突然に他界された。同姉の存在がわれわれになくはならぬものであったことは私達の研究室から出た論文の多くが同姉との連名かまたは同姉に謝辞が述べられてあることから判られると思うが、特に干渉色表の完成はその代表的なものであった。その他界は、われわれにとって手足をもぎ取られたようなものである。1964年から2カ年米国に留学され、帰国後回折像の諸性質を数値計算を主とした解析により明らかにすべく、ここに述べた計算を出発点とし周辺波の理論をも用い、斜め入射や収差のある場合の計算を進めていた矢先であった。これ等のうち、本年春の学会に発表を予定しておられたものに筆を加えたのが本文で、これ以外は整理し得なかったが、同姉の一周忌に際し、これのみでもその墓前に捧げ、研究室員一同と共にその冥福を祈りたいと、とりあえずまとめたものである。

なお、入手困難な文献の複写を賜わり、これをまとめるのにご助力下さった服部広島大学教授に厚くお礼を申し上げます。  
(教授 久保田 広 記)

正 誤 表 (8 月号)

ページ	段	行	種 別	正	誤
40			図 3 説明	定周期 3 ダイアル	定周期ダイアル
44	右	10	式	$H_i = E_{sL} - E_s \quad (2)$	$H_i = E_{sL} - E_s$
52			図 2 説明	MTR (平均遷移率)	MTR (平均遷移表)