UDC 624.073.1

有限要素法による平板の大たわみ問題の解析

Analysis of Large Deflection of Plates by the Finite Element Method.

川　井　忠　彦*・吉　村　信　敏*

Tadahiko KAWAI　and　Nobutoshi YOSHIMURA

最近構造工学の多くの分野で注目されている有限要素法（マトリックス法）をもちいて，板の大たわみ問題を解析し，いくつかの例題をといてその実用性を確認することができたので報告する．

1. ま え が き

大たわみ問題の有限要素法による解析は欧米においてはすでにかなり前から骨組構造についておこなわれており，わが国でも藤野・大坂によるツリ橋の解析[1]，坪井・大山によるテンション構造の解析[2] がおこなわれている．筆者らはさきに有限要素法をもちいて平板の平面応力場における有限変形問題について“くりかえし法（Iteration methed)”による解法を研究したが[3]，さらに研究をすすめて，板の曲げにおける大たわみ問題を解析しかなりの成果が得られたので報告する．

2. 基 礎 理 論

図1にしめすように，平板の中央面内に x, y 軸をとり，これと垂直に z 軸をとる（右手系を採用)．そして x, y および z 軸方向の変位をそれぞれ u, v および w とする．

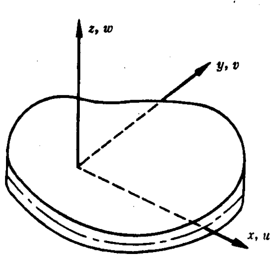

図 1　座標軸と変位

さて板の曲げに関する線型理論では x, y 方向の縦ひずみ ε_x, ε_y およびこれらの軸に関するせん断ひずみ γ_{xy} は板の中央面の伸びを無視してつぎのようにあらわされる．

$$\varepsilon_x{}^b=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \varepsilon_y{}^b=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \gamma_{xy}{}^b=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{1}$$

しかしたわみが大きくなると，もはや板の中央面の伸びは無視できなくなり，（1）式でしめしたひずみの他につぎのようなひずみを考えなければならなくなる．

$$\varepsilon_x{}^p=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\quad \varepsilon_y{}^p=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$
$$\gamma_{xy}{}^p=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2}$$

したがって，全体のひずみはつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ここで，中央面の伸びも考慮に入れた板のひずみエネルギを計算しておく．平板のひずみエネルギ U は一般的につぎのようにあらわされる．

$$U=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\iiint\left\{\varepsilon_x{}^2+2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y{}^2+\frac{(1-\nu)}{2}\gamma_{xy}{}^2\right\}dx\,dy\,dz \tag{4}$$

（4）式に（3）式を代入し，被積分関数のうち z に関する1次の項はその方向に積分するとゼロになることに気をつけて計算すると，結局つぎのような式が得られる．

$$U=U_1+U_2+U_3+U_4 \tag{5}$$

$$U_1=\frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\iint\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}dx\,dy \tag{5-1}$$

$$U_2=\frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy \tag{5-2}$$

$$U_3=\frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\iint\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+(1-\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right\}dx\,dy \tag{5-3}$$

$$U_4=\frac{Eh}{8(1-\nu^2)}\iint\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}^2dx\,dy \tag{5-4}$$

ここに h は板厚，D は曲げ剛性である．

以上で大たわみを考慮した場合のひずみエネルギ式がもとめられた．これに有限要素法をあてはめて問題をとくわけであるが，そのためにはまず板の曲げ変形および面内変形に関

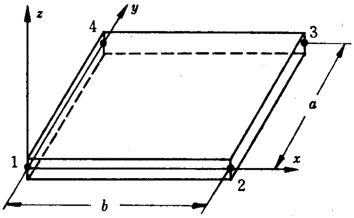

図 2　長方形平板要素

* 東京大学生産技術研究所第2部

する変位関数 (Shape function) を仮定する必要がある．ここで使用する有限要素は図 2 にしめすような長方形平板要素とする．

曲げ変形に対しては，Greene[4] によって提案された変位関数をもちいる．この関数は要素の各辺上でたわみおよび傾斜角の適合条件を完全にみたしており，つぎのように与えられる．

$$\begin{aligned} w=&\varphi_1(\xi)\varphi_1(\eta)w_1+a\varphi_1(\xi)\varphi_3(\eta)\theta_{x1}+b\varphi_3(\xi)\varphi_1(\eta)\theta_{y1}\\ &+\varphi_2(\xi)\varphi_1(\eta)w_2+a\varphi_2(\xi)\varphi_3(\eta)\theta_{x2}+b\varphi_4(\xi)\varphi_1(\eta)\theta_{y2}\\ &+\varphi_2(\xi)\varphi_2(\eta)w_3+a\varphi_2(\xi)\varphi_4(\eta)\theta_{x3}+b\varphi_4(\xi)\varphi_2(\eta)\theta_{y3}\\ &+\varphi_1(\xi)\varphi_2(\eta)w_4+a\varphi_1(\xi)\varphi_4(\eta)\theta_{x4}+b\varphi_3(\xi)\varphi_2(\eta)\theta_{y4} \end{aligned} \tag{6}$$

ここに ξ および η は x および y 座標を無次元化表示したもので

$$\xi=x/b,\quad \eta=y/a \tag{6-1}$$

また $\varphi_1\sim\varphi_4$ はつぎのようにあらわされる．

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(s)&=1-3s^2+2s^3\\ \varphi_2(s)&=3s^2-2s^3\\ \varphi_3(s)&=s-2s^2+s^3\\ \varphi_4(s)&=-s^2+s^3 \end{aligned}\right\} \tag{6-2}$$

節点変位は各節点におけるたわみと x 軸および y 軸まわりの傾斜角であって，つぎの列ベクトルで定義される．

$$\{\boldsymbol{\delta}_b\}^T=\{w_1,\ \theta_{x1},\ \theta_{y1},\ w_2,\ \theta_{x2},\ \theta_{y2},\ w_3,\ \theta_{x3},\ \theta_{y3},\ w_4,\ \theta_{x4},\ \theta_{y4}\} \tag{7}$$

ここに　$\theta_{xi}=\left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_i,\quad \theta_{yi}=\left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_i\quad (i=1,2,3,4)$

これに対応して節点力は各節点におけるせん断力と x 軸および y 軸まわりの曲げモーメントであって，つぎのように与えられる．

$$\{\boldsymbol{f}_b\}^T=\{F_1,\ M_{x1},\ M_{y1},\ F_2,\ M_{x2},\ M_{y2},\ F_3,\ M_{x3},\ M_{y3},\ F_4,\ M_{x4},\ M_{y4}\} \tag{8}$$

ここに上添字 ^{T} は転置行列をあらわす．

一方面内変位に関しては，変位をつぎのように仮定する．

$$\left.\begin{aligned} u&=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4xy\\ v&=\alpha_5+\alpha_6x+\alpha_7y+\alpha_8xy \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ここに $\alpha_1\sim\alpha_8$ は未定係数である．

(9) 式はあきらかに変位の適合条件を完全に満足している．節点変位は各節点における x および y 方向の変位である．

$$\{\boldsymbol{\delta}_p\}^T=\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\} \tag{10}$$

これに対応する節点力は各節点における x および y 方向の力であってつぎのようにあらわされる．

$$\{\boldsymbol{f}_p\}^T=\{X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4\} \tag{11}$$

各節点における x, y 座標を (9) 式に代入して未定係数 $\alpha_1\sim\alpha_8$ を決定し，変位関数を節点変位であらわすとつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} u&=(1-\xi)(1-\eta)u_1+\xi(1-\eta)u_2+\xi\eta u_3+(1-\xi)\eta u_4\\ v&=(1-\xi)(1-\eta)v_1+\xi(1-\eta)v_2+\xi\eta v_3+(1-\xi)\eta v_4 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ここに ξ, η は (6-1) 式でしめしたと同じものである．

(6), (12) 式を (5) 式に代入して積分すれば，ひずみエネルギが節点変位の関数としてあらわされる．そして，このような節点変位をおこさせるに必要な節点力のベクトル ($\{F_1,\ M_{x1},\ M_{y1}, \cdots, M_{y4}\}^T$ あるいは $\{X_1, X_2, \cdots, Y_4\}^T$) の成分は Castigliano の第 1 定理により，U をその対応変位成分 ($w_1,\ \theta_{x1},\ \theta_{y1}, \cdots, \theta_{y4}$ あるいは $u_1, u_2, \cdots, v_4$) について逐次微分することによって得られる．

まず，上記の操作にしたがって $w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \cdots, \theta_{y4}$ によって U を逐次微分して曲げに対する節点力の成分 $F_1, M_{x1}, M_{y1}, \cdots, M_{y4}$ を計算する．ひずみエネルギ U のうち，U_1 は $w_1, \theta_{x1}, \cdots, \theta_{y4}$ の項を含まないので節点力への寄与はゼロである．また U_2 は，線型曲げ理論におけるひずみエネルギであるから，これから線型曲げに対する剛性マトリックス $\boldsymbol{k}_b$ が得られる．U_3 および U_4 からは膜力 (membrane force) の影響による付加的な剛性が計算される．すなわち

$${}^{12}\overset{1}{\boldsymbol{f}}_b={}^{12}\overset{12}{\boldsymbol{k}}_b\cdot{}^{12}\overset{1}{\boldsymbol{\delta}}_b+{}^{12}\overset{96}{\boldsymbol{k}}_{a1}\cdot{}^{96}\overset{1}{\boldsymbol{\delta}}_{a1}+{}^{12}\overset{364}{\boldsymbol{k}}_{a2}\cdot{}^{364}\overset{1}{\boldsymbol{\delta}}_{a2} \tag{13}$$

ここに ${}^m\overset{n}{\boldsymbol{A}}$ は $\boldsymbol{A}$ が m 行 n 列のマトリックスであることをしめす．ここで曲げに対する節点変位 $\{w_1, \theta_{x1}, \cdots, \theta_{y4}\}^T$ を $\{\delta_1{}^b, \delta_2{}^b, \cdots, \delta_{12}{}^b\}^T$ とあらわし，また面内変形に対する節点変位 $\{u_1, u_2, \cdots, v_4\}^T$ を $\{\delta_1{}^p, \delta_2{}^p, \cdots, \delta_8{}^p\}^T$ とあらわすとすると，$\{\boldsymbol{\delta}_{a1}\}$ と $\{\boldsymbol{\delta}_{a2}\}$ はつぎのようになる．

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\delta}_{a1}\}^T=\{&\delta_1{}^p\delta_1{}^b,\ \delta_1{}^p\delta_2{}^b, \cdots, \delta_1{}^p\delta_j{}^b, \cdots, \delta_1{}^p\delta_{12}{}^b,\\ &\vdots\\ &\delta_i{}^p\delta_1{}^b,\ \delta_i{}^p\delta_2{}^b, \cdots, \delta_i{}^p\delta_j{}^b, \cdots, \delta_i{}^p\delta_{12}{}^b,\\ &\vdots\\ &\delta_8{}^p\delta_1{}^b,\ \delta_8{}^p\delta_2{}^b, \cdots, \delta_8{}^p\delta_j{}^b, \cdots, \delta_8{}^p\delta_{12}{}^b\}\\ &(i\leqq 8,\ j\leqq 12) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\delta}_{a2}\}^T=\{&(\delta_1{}^b)^3,\ \delta_2{}^b(\delta_1{}^b)^2,\ (\delta_2{}^b)^2\delta_1{}^b,\ (\delta_2{}^b)^3,\\ &\delta_3{}^b(\delta_1{}^b)^2,\ \delta_3{}^b\delta_2{}^b\delta_1{}^b,\ \delta_3{}^b(\delta_2{}^b)^2,\ (\delta_3{}^b)^2\delta_1{}^b,\\ &(\delta_3{}^b)^2\delta_2{}^b,\ (\delta_3{}^b)^3, \cdots, \delta_i{}^b\delta_j{}^b\delta_k{}^b, \cdots, (\delta_{12}{}^b)^3\}\\ &(12\geqq i\geqq j\geqq k) \end{aligned} \tag{15}$$

つぎに $u_1, u_2, \cdots, v_4$ によって U を逐次微分して面内変位に対する節点力の成分 $X_1, X_2, \cdots, Y_4$ を計算する．ひずみエネルギ U のうち U_2 と U_4 は $u_1, u_2, \cdots, v_4$ の項を含まないので節点力への寄与はゼロである．また U_1 は平面応力場における線型ひずみエネルギであるから，これから平面応力場に対する剛性マトリックス $\boldsymbol{k}_p$ が得られる．U_3 からは膜力の影響による付加的な剛性が計算される．すなわち

$${}^8\overset{1}{\boldsymbol{f}}_p={}^8\overset{8}{\boldsymbol{k}}_p{}^8\overset{1}{\boldsymbol{\delta}}_p+{}^8\overset{78}{\boldsymbol{k}}_{a3}{}^{78}\overset{1}{\boldsymbol{\delta}}_{a3} \tag{16}$$

ここに $\boldsymbol{\delta}_{a3}$ はつぎのようになる．

$$\{\boldsymbol{\delta}_{a3}\}^T=\{(\delta_1{}^b)^2,\ \delta_2{}^b\delta_1{}^b,\ (\delta_2{}^b)^2, \cdots, \delta_i{}^b\delta_j{}^b,$$

$$\cdots,\ (\delta_{12}{}^{b})^2\}\quad (12 \geqq i \geqq j) \tag{17}$$

(13), (16) 式で各要素について節点変位と節点力の関係がもとめられたので，境界条件を考えて (13), (16) 式を整理して加え合わせれば平板全体について節点変位と節点力の関係が得られる．しかしこれは3次の連立代数方程式となり，これを陽にとくことは実際上不可能である．そこで (13), (16) 式のうち非線型項を付加節点力として解釈し，つぎのように書きかえる．

$${}^{12}\overset{1}{\boldsymbol{f}}_b = {}^{12}\overset{12}{\boldsymbol{k}}_b\,{}^{12}\overset{1}{\boldsymbol{\delta}}_b + {}^{12}\overset{1}{\boldsymbol{f}}_{a1}(\boldsymbol{\delta}_p,\ \boldsymbol{\delta}_b) + {}^{12}\overset{1}{\boldsymbol{f}}_{a2}(\boldsymbol{\delta}_b) \tag{18}$$

$${}^{8}\overset{1}{\boldsymbol{f}}_p = {}^{8}\overset{8}{\boldsymbol{k}}_p\,{}^{8}\overset{1}{\boldsymbol{\delta}}_p + {}^{8}\overset{1}{\boldsymbol{f}}_{a3}(\boldsymbol{\delta}_b) \tag{19}$$

ここに　$\boldsymbol{f}_{a1}(\boldsymbol{\delta}_p,\ \boldsymbol{\delta}_b) = \boldsymbol{k}_{a1}\boldsymbol{\delta}_{a1}$

$\boldsymbol{f}_{a2}(\boldsymbol{\delta}_b) \quad = \boldsymbol{k}_{a2}\boldsymbol{\delta}_{a2}$

$\boldsymbol{f}_{a3}(\boldsymbol{\delta}_b) \quad = \boldsymbol{k}_{a3}\boldsymbol{\delta}_{a3}$

また $\boldsymbol{f}_{a1}(\boldsymbol{\delta}_p,\ \boldsymbol{\delta}_b)$ は付加節点力 $\boldsymbol{f}_{a1}$ が $\boldsymbol{\delta}_p$ および $\boldsymbol{\delta}_b$ の関数であることをあらわしている．$\boldsymbol{f}_{a2}$, $\boldsymbol{f}_{a3}$ についても同様である．

各要素についての節点力と節点変位の関係 (18), (19) 式を境界条件を考慮しつつ整理して組みあわせ，平板全体について節点力と節点変位の関係をもとめると，つぎのようになる．

$$\boldsymbol{F}_b = \boldsymbol{K}_b\boldsymbol{d}_b + \boldsymbol{F}_{a1}(\boldsymbol{d}_p,\ \boldsymbol{d}_b) + \boldsymbol{F}_{a2}(\boldsymbol{d}_b) \tag{20}$$

$$\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{K}_p\boldsymbol{d}_p + \boldsymbol{F}_{a3}(\boldsymbol{d}_b) \tag{21}$$

ここに $\boldsymbol{F}_b$, $\boldsymbol{F}_p$ は面外および面内の節点外力である．

3. 数 値 解 法

問題は (20), (21) の両式を同時に満足する $\boldsymbol{d}_b$ および $\boldsymbol{d}_p$ をもとめることに帰着したが，付加節点力の項が $\boldsymbol{d}_p$ および $\boldsymbol{d}_b$ の2次または3次の関数であるから，線型の問題のように容易にとくことはできない．そこで，この解法として“くり返し法 (Iteration method)”を採用した．以下その演算操作を説明する．

①；(20)式の付加節点力の項を無視して，線型の曲げに対する解をもとめ，これを $\boldsymbol{d}_b$ の第0近似解 $\boldsymbol{d}_b{}^{(0)}$ とする．すなわち

$$\boldsymbol{d}_b{}^{(0)} = \boldsymbol{K}_b{}^{-1}\boldsymbol{F}_b \tag{22}$$

②；①でもとめた $\boldsymbol{d}_b{}^{(0)}$ を使って (21) 式の付加節点力を計算し，これを左辺に移項して $\boldsymbol{d}_p$ の第0近似解 $\boldsymbol{d}_p{}^{(0)}$ をもとめる．すなわち

$$\boldsymbol{d}_p{}^{(0)} = \boldsymbol{K}_p{}^{-1}(\boldsymbol{F}_p - \boldsymbol{F}_{a3}(\boldsymbol{d}_b{}^{(0)})) \tag{23}$$

③；① および ② でもとめた第0近似解 $\boldsymbol{d}_b{}^{(0)}$ および $\boldsymbol{d}_p{}^{(0)}$ を使って (20)式の付加節点力を計算し，これを左辺に移項して $\boldsymbol{d}_b$ の第1近似解 $\boldsymbol{d}_b{}^{(1)}$ をもとめる．すなわち

$$\boldsymbol{d}_b{}^{(1)} = \boldsymbol{K}_b{}^{-1}(\boldsymbol{F}_b - \boldsymbol{F}_{a1}(\boldsymbol{d}_p{}^{(0)},\ \boldsymbol{d}_b{}^{(0)}) - \boldsymbol{F}_{a2}(\boldsymbol{d}_b{}^{(0)})) \tag{24}$$

④；③でもとめた $\boldsymbol{d}_b{}^{(1)}$ を使って (21) 式の付加節点力を計算し，$\boldsymbol{d}_p$ の第1近似解 $\boldsymbol{d}_p{}^{(1)}$ をもとめる．すなわち

$$\boldsymbol{d}_p{}^{(1)} = \boldsymbol{K}_p{}^{-1}(\boldsymbol{F}_p - \boldsymbol{F}_{a3}(\boldsymbol{d}_b{}^{(1)})) \tag{25}$$

⑤；このようにして

$$\boldsymbol{d}_b{}^{(n)} \fallingdotseq \boldsymbol{d}_b{}^{(n-1)},\quad \boldsymbol{d}_p{}^{(n)} \fallingdotseq \boldsymbol{d}_p{}^{(n-1)} \tag{26}$$

になるまで計算をくり返す．実際には仮定した節点変位とそれをもちいてもとめられた節点変位との相対誤差がある限度以下になるまで計算をすすめるわけである．

以上が“くり返し法”による大たわみ問題解析の概略であるが，実際に数値計算をしてみるとこの系はかなりsensitive であるので，$\boldsymbol{d}^{(i-1)}$ だけを使って $\boldsymbol{d}^{(i)}$ を計算していると，$\boldsymbol{d}^{(i)}$ は振動しながら発散してしまうので解をもとめることができない．この現象をさけるため，藤野・大坂[1] がツリ橋の大たわみ問題を解析した際にもちいた手法を導入した．それは $\boldsymbol{d}^{(i)}$ を計算するとき，非線型項に代入すべき節点変位には一つ前の段階でもとめられた近似解 $\boldsymbol{d}^{(i-1)}$ を使うだけでなく，そのもう一つ前の段階の近似解 $\boldsymbol{d}^{(i-2)}$ をも考慮に入れて $\boldsymbol{d}^{(i-1)}$ と $\boldsymbol{d}^{(i-2)}$ にちがう重みをつけて加え合わせた値 $\boldsymbol{d}_m{}^{(i-1)}$ をもちいるという方法である．すなわち

$$\boldsymbol{d}_m{}^{(i-1)} = (1-\beta)\boldsymbol{d}^{(i-2)} + \beta\boldsymbol{d}^{(i-1)} \tag{27}$$

ここに　$0 \leqq \beta \leqq 1$　である．

$\boldsymbol{d}^{(i-1)}$ だけを使って付加節点力を計算するということは，$\beta=1$ にしたことになる．

計算時間の都合で β のとるべき値についてこまかな検討はできなかったが，一般に $\beta=0.3$ 程度にすれば問題ないことがわかった．ただし荷重が小さくて線型に近い場合は $\beta=0.5$ をとっても収束するようである．

以上述べたように有限要素法と多少改良を加えた“くり返し法”を併用することにより板の大たわみ問題はかなり実用的に解析しうるものと思われる．

4. 解 析 例

はじめに従来の研究成果と比較するために，下向きの等分布荷重をうける周辺固定正方形板 (1 m×1 m×2 mm $E=2\times10^4\,\mathrm{kg/mm^2}$, $\nu=0.3$) について解析をおこなった．対称性から全体の 1/4 について考慮すればよいが，これを図3にしめす．境界条件は，OA 上の節点について

$\theta_x=0,$
$v=0$

AB および BC 上の節点で

$w=\theta_x=\theta_y=0,$
$u=v=0$

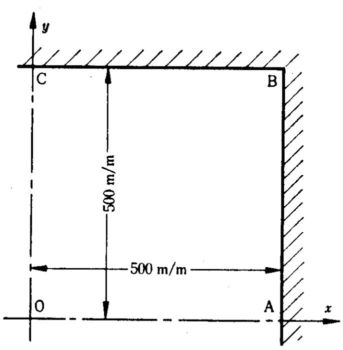

図 3　周辺固定正方形板
(全体の 1/4)

CO 上の節点で　$\theta_y=0,\ \ u=0$

さて解析しようとする領域OABCを図4にしめすように 25 の正方形要素で分割した（節点数 36）. 節点外力は，各要素に加わる全荷重をそれを構成する四つの節点に 1/4 ずつふり分けた．面内方向には外荷重は加わっていないから $\boldsymbol{F}_p=0$ であることはいうまでもない．単位面積当たりの荷重 q を 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, $0.8\times10^{-4}\mathrm{kg/mm^2}$ の5通りにかえて計算をおこなった．“くり返し法” による解の収束のようすをO点のたわみについてしめしたのが図5である．なお，許容誤差は 0.5% とした．図中には β の値も書きこんである．

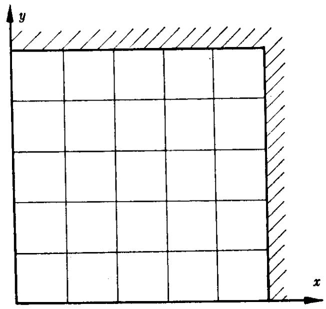

図 4　要素分割

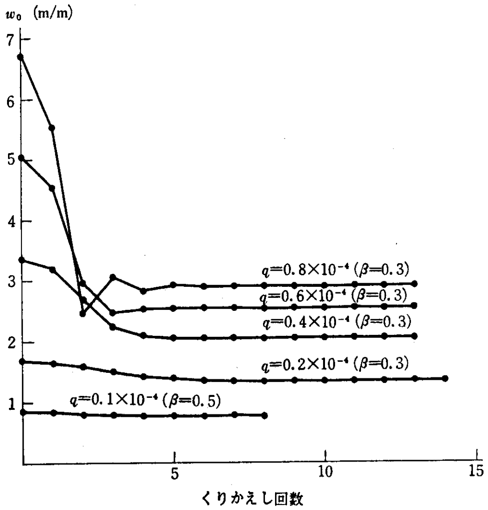

図 5　“くりかえし法” による解の収束のようす

図6はO点におけるたわみについて q を変えながら線型解と大たわみを考慮した解を比較したものである．同時に Stewart Way[5] がエネルギ法を使ってもとめた解もしめしてあるが，有限要素法による解とよく一致していることがわかる．一般に，たわみが板厚程度（この場合 2mm）までは線型理論でよいとされているが，この結果をみると線型解でたわみがちょうど板厚と等しくなるような荷重（$q\doteqdot0.24\times10^{-4}\mathrm{kg/mm^2}$）でも大たわみを考慮すると，たわみは線型解のそれの 75% 程度とかなりの差を生じる．したがってたわみが板厚程度であるから大たわみの影響は少ないという理屈はすべての場合については成り立たないことがわかる．ただし大たわみを考慮すれば，たわみは小さくなるので，線型理論は常に安全側の解を与えることになる．

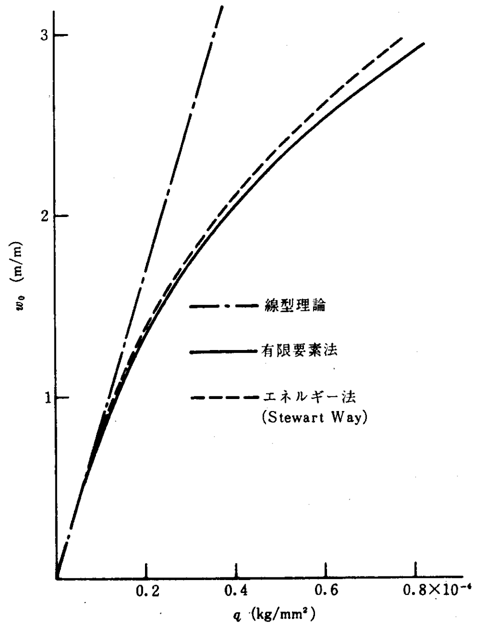

図 6　O点の荷重—たわみ曲線

図7はO点およびA点における板の上面および下面の σ_x について q を変えながら線型解と大たわみを考慮した解を比較したものである．変位（たわみ）の場合と同じように，大たわみを考慮すると応力値は線型解にくらべてかなり小さくなることがわかる．したがって線型理論をもちいて設計すればもちろん安全側の解を与えるが，かなり over-scantling の場合もありうるであろう．

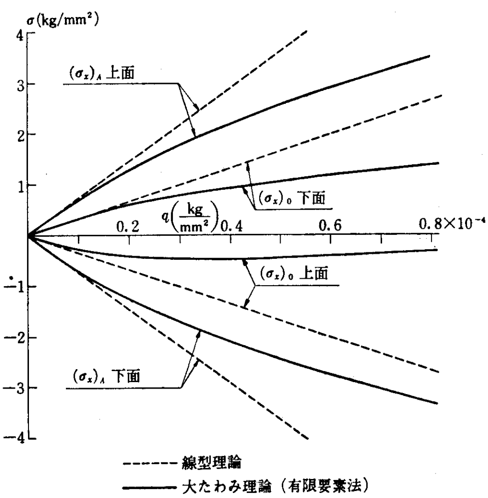

図 7　O点およびA点における板の上面および下面の応力

もう一つの例題として相対する2辺固定・その他の2辺自由の正方形に集中荷重を加える場合（図8）をとりあげた．点Nに荷重 P_N を加える場合について計算をおこなった．対称性から板の上半部のみを考慮することに

して，50 の要素に分割した．図9に荷重をだんだん増していった場合の荷重-たわみ（N点）曲線を筆者らの研究室でおこなった実験値とともにしめしたが両者はかなりよく一致している．時間の関係でこの報告にはのせられなかったが，ひずみゲージによるひずみ測定も近い将来おこなう予定である．

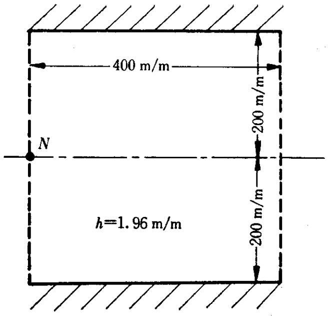

図 8　2辺固定・2辺自由正方形板 $\left(\begin{array}{l} E=2.1\times10^4\,\mathrm{kg/mm^2} \\ \nu=0.3 \end{array}\right)$

5. プログラミング上の工夫

すでにのべたように本解析法は“くり返し法”を採用しているので，計算時間を短縮するためにいくつかの工夫をおこなっている．

(22)～(25) 式を参照すればあきらかなように，逆行列演算はどのくりかえし過程についても共通であるので，あらかじめ計算して磁気ドラム中に格納しておき，くりかえし過程では付加節点力の算出をおこない，これと磁気ドラム中に格納してあるデータとによって節点変位を計算することにした．また k_{a1}, k_{a2}, k_{a3} の計算にもかなりの時間を要するので，同じ形状の要素に関しては計算の重複をさけるように工夫した．なお使用計算機は HITAC 5020, 5020 F, 5020 E である．

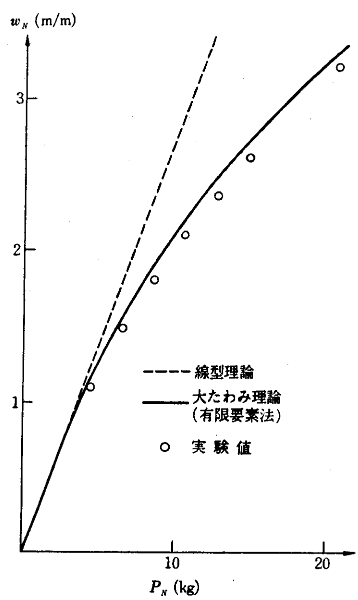

図 9　N点の荷重-たわみ曲線

6. 結　　論

平板の大たわみ問題が，“くり返し法”を採用し有限要素法によって解析できることをしめし，その第一歩として横荷重を受ける正方形板の大たわみ問題をといて，その実用性を確認した．

(1968 年 5 月 27 日受理)

7. 参 考 文 献

1) 藤野勉，大坂憲司：“任意形式のツリ橋の静的構造解析法”，三菱重工技報，Vol. 3, No. 6, p. 17 (1966).
2) 坪井善勝，大山宏：MATRIX 法によるテンション構造の解析，第 17 回応用力学連合講演会前刷 (1967).
3) 吉識雅夫，川井忠彦，吉村信敏：“マトリックス法による船体構造解析に関する研究（Ⅲ）”，日本造船学会論文集，第 123 号，p. 97 (1968).
4) B. E. Greene: “Stiffness Matrix for Bending of a Rectangular Element with Initial Membrane Stresses”, Structural Analysis Research Memorandum No. 45.
The Boeing Company, Seattle, Wash., (1962).
5) Stewart Way: “A Laterally Loaded Clamped Square Plate with Large Deformation”, Proc. 5th Intern. Congr.
Appl. Mech. Cambridge, Mass., U. S. A., (1938).

(p. 43 よりつづく)

$\mathrm{cm^2}$, $l_s=6.0\,\mathrm{cm}$, $l_n=4.3\,\mathrm{cm}$, $l_f=1.2\,\mathrm{cm}$, $K_f=1.76\,\mathrm{kg\cdot cm/rad}$, $V_n=2.5\,\mathrm{cm^3}$, $x_0=0.017\,\mathrm{cm}$, $C_1+C_3=C_1'+C_3'=10^{-4}\,\mathrm{cm^2\cdot sec^{-1}}$,　$C_2=C_2'=1.74\times10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot sec^{-1}\cdot cm^{-1}}$ である．$p_s=5.0\,\mathrm{kg/cm^2}$ の場合，ノズル a に対しては式（7）の係数が $a_2<0$, $a_3<0$, $a_4<0$ となり不安定，ノズル d に対しては安定となる（ただし，ノズル a に対して $N_x=-13.3$，ノズル d に対して $N_x=2.0$）．

6. む す び

力フィードバック空気圧サーボ弁が，ノズル噴流力の非線形性によって自励振動を起こすことを実験的に確かめ，その理論的裏づけを行なった．

この自励振動はディザとして利用できる可能性があり，また，V_n を変化すれば発振周波数が変わるので空気圧発振器にも使用できる．

(1968 年 5 月 28 日受理)

文　　献

1) 富成，荒木：ノズル・フラッパがサーボ弁に及ぼす影響　機械学会関西支部講演会第 205 回前刷，昭和 34 年．
2) 荒木：空気圧サーボ機構におけるノズル・フラッパの静特性，計測自動制御学会論文集，第 1 巻，第 2 号，p. 182～188.